А 01.01.01
Ա-97

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՓՈՋՅԱՆ ԱՐՄԵՆ ՏԻԳՐԱՆԻ

ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՅԻՆ ՄԻՋԱՐԿՄԱՆ, GC_n ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԳԱՍՔԱ-ՄԱԵԶԹՈՒԻ ՎԱՐԿԱԾԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա.01.01 "Մաթեմատիկական անալիզ"
մասնագիտությամբ
Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության սեղմագիր

ԵՐԵՎԱՆ 2011

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АПОЗЯН АРМЕН ТИГРАНОВИЧ

О МНОГОМЕРНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, GC_n МНОЖЕСТВАХ И ГИПОТЕЗЕ ГАСКА-МАЕЗТУ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.01 – "Математический анализ"

ЕРЕВАН 2011

© National Library of Armenia OCR by Portmind

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ-մաթ. գիտ.դոկտոր Հ. Ա. Հակոբյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ-մաթ. գիտ.դոկտոր Ն. Գ. Նայդենով (Բուլղարիա)

ֆիզ-մաթ. գիտ.դոկտոր Գ. Ա. Կարագուլյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան (Պոլիտեխնիկ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2011 թ. հունիսի 14-ին, ժամը 15:00, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 050 "Մաթեմատիկա" մասնագիտական խորհրդի նիստում: Հասցեն՝ 0025, ք. Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2011 թ. մայիսի 11-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ-մաթ. գիտ.դոկտոր Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Институте математики НАН Армении

Научный руководитель: доктор физ-мат. наук А. А. Акопян

Официальные оппоненты: доктор физ-мат. наук Н. Г. Найденов (Болгария)
доктор физ-мат. наук Г. А. Карагулян

Ведущая организация: Государственный инженерный университет Армении (Политехник)

Защита диссертации состоится 14 июня 2011 г. в 15:00 на заседании специализированного совета ВАК 050 "Математика", действующего в ЕГУ по адресу 0025, г. Ереван, Алека Манукяна 1.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 11-ого мая 2011 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ-мат. наук Т. Н. Арутюнян

3180-2011

Թեմայի արդիականությունը. Մաթեմատիկական անալիզի, որոշ բաժիններում (մոտարկումների տեսություն, թվային անալիզ, հաշվողական մաթեմատիկա և այլն) խնդիրների լուծման ժամանակ հաճախ անհրաժեշտություն է առաջանում բարդ ֆունկցիաները փոխարինել իրենց որոշակի իմաստով մոտ և ավելի պարզ ֆունկցիաներով, մասնավորապես՝ բազմանդամներով: Ֆունկցիաների մոտարկման առավել տարածված և պատմականորեն ավելի վաղ ձևավորված մեթոդներից է *բազմանդամային միջարկումը*: Ներկայումս բազմանդամային միջարկումը մոտարկումների տեսության, թվային անալիզի և հաշվողական մաթեմատիկայի կարևորագույն բաժիններից մեկն է: Միաչափ բազմանդամային միջարկման հիմնարար արդյունքները ստացել են դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը: Միաչափ դեպքում Լագրանժի և Նյուտոնի ստացած արդյունքները տալիս են միջարկման խնդրի սպառիչ պատասխան: Բազմաչափ դեպքում իրավիճակն էապես բարդանում է:

Բազմաչափ բազմանդամային միջարկումով հիմնավորապես սկսել են զբաղվել շատ ավելի ուշ՝ 20-րդ դարի երկրորդ կեսում: Ըստ էության մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման առաջին կարևոր արդյունքները ստացել են Բերզոլարին, Ռադոնը, ինչպես նաև Չանգը և Յաուն: Ի տարբերություն միաչափ դեպքի, բազմաչափ բազմանդամային միջարկման ոլորտում կան բազմաթիվ չլուծված հիմնական խնդիրներ: Մասնավորապես լուծված չէ դեռևս 1982 թ.-ին Գասքայի և Մաեզթուի կողմից առաջադրված վարկածը, ինչպես նաև բաց է երկրաչափական բնութագիրն ունեցող բազմությունների նկարագրման հարցը, որոնք քննարկվում են ատենախոսության մեջ:
Ներկայումս մի քանի փոփոխականներով միջարկման ուղղությունը հանդիսանում է նաև հանրահաշվական երկրաչափության արդիական բաժիններից մեկը:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը և խնդիրները. Աշխատանքում տրված է $R^d, d \geq 3$ տարածությունում միջարկման համար ճշգրիտ բազմություն հանդիսացող 1-ցանցերի նկարագրությունը և կառուցման եղանակը, ինչպես նաև սահմանված է k-մաքսիմալի գաղափարը, տրված են վերջինիս նկարագրությունն ու կիրառությունները: Հերքված է բազմաչափ բազմանդամային միջարկման համար Գասքա-Մաեզթուի ընդհանրացված վարկածը մաքսիմալ հիպերհարթության գոյության վերաբերյալ: GC_n բազմությունների մաքսիմալ ուղիղների քանակի վերաբերյալ առաջ է քաշված նոր վարկած և ապացուցված է որոշ մասնավոր դեպքերում:

Հետազոտման օբյեկտը. Աշխատանքում հետազոտված են մի քանի փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, միջարկման ճշգրիտ ցանցեր, մաքսիմալ k-հարթություններ և հիպերհարթություններ:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են միաչափ և բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են նաև որոշ մեթոդներ տարածական երկրաչափությունից և գծային հանրահաշվից:

Գիտական նորությունը. Տրվել է 1-ցանցերի ամբողջական նկարագրությունը, ինչպես նաև k-մաքսիմալի գաղափարի սահմանումն ու նկարագրությունը: Հերքվել է Գասքա-Մաեզթուի վարկածի՝ $d \geq 3$ չափողականությունների դեպքում Կ. դե Բուրի ընդհանրացումը: Առաջ է քաշվել նոր

© National Library of Armenia

վարկած՝ մաքսիմալ ուղիների քանակի վերաբերյալ R^d, $d \geq 3$ տարածությունների համար:

Կիրառական նշանակությունը. Աշխատանքում ստացված արդյունքները հիմնականում վերաբերում են բազմաչափ միջարկման ամենակիրառելի դեպքին՝ երբ ֆունդամենտալ բազմանդամներն ունեն ամենապարզ՝ գծային արտադրիչների արտադրյալով ներկայացվող տեսք:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

- Մաքսիմալ k-հարթության սահմանումը, նկարագրությունն ու հիմնական հատկությունները:
- Բազմաչափ բազմանդամային միջարկման համար ճշգրիտ բազմություն հանդիսացող 1-ցանցերի նկարագրությունը և կառուցման մեթոդը:
- Բազմաչափ բազմանդամային միջարկման համար մաքսիմալ հիպերհարթության գոյության վերաբերյալ Գասքա-Մաեզթուի վարկածի՝ Կ. դե Բուրի կողմից ընդհանրացման հերքումը:
- Երկրաչափական բնութագրին բավարարող սխեմաներում մաքսիմալ ուղիների քանակի վերաբերյալ նոր վարկածի ձևակերպումը և ապացույցը որոշ մասնավոր դեպքերում R^d, $d \geq 3$ տարածության համար:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են.

- ԵՊՀ Մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի գիտական սեմինարներում
- ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի սեմինարներում
- ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտի Իրական անալիզի բաժնի ընդլայնված նիստում:

Հրապարակումները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են չորս գիտական հոդվածներում [1, 2, 3, 4]:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլխից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 45 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 85 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Միաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը հանգույցների կամայական բազմության համար ունի միակ լուծում: Այն կարելի է ներկայացնել Լագրանժի կամ Նյուտոնի բանաձևերով: Բազմաչափ դեպքում խնդիրն էապես բարդանում է: Այս դեպքում առաջ է գալիս միջարկման խնդրի լուծելիության հարցը, որը կախված է ինչպես հանգույցների քանակից, այնպես էլ նրանց փոխադարձ դասավորվածությունից:

Պարագրաֆ 1.1-ում ներկայացված է մի փոփոխականի բազմանդամների համար Լագրանժի դասական միջարկման խնդիրը: Այդ խնդրի լուծում հանդիսացող միջարկիչ բազմանդամի համար ներկայացված են Լագրանժի և Նյուտոնի բանաձևերը: Բերված է նաև Հերմիթի միջարկման խնդիրը: Վերջինս Լագրանժի միջարկման խնդրի ընդհանրացումն է պատիկ հանգույցների դեպքում:

Պարագրաֆ 1.2-ում դիտարկվում է Լագրանժի բազմաչափ միջարկման խնդիրը: Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$\bar{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d,$$

որտեղ

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in R^d, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in Z_+^d:$$

$\prod_n^d = \prod_n(R^d)$-ով նշանակենք n-ից փոքր կամ հավասար գումարային աստիճան ունեցող d փոփոխականի բազմանդամների տարածությունը՝

$$\prod_n^d = \left\{ p(\bar{x}) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \cdot \bar{x}^\alpha : \quad a_\alpha \in R, \quad \bar{x} \in R^d \right\},$$

որի չափողականությունը՝

$$N := \dim \prod_n^d = \binom{n+d}{d}:$$

Միջարկման հանգույցների բազմությունը նշանակենք՝

$$X = \left\{ \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)} \right\} \subset R^d:$$

Ընդհանուր դեպքում դիտարկում ենք հետևյալ՝

Լագրանժի բազմաչափ միջարկման խնդիրը.

Տրված է $X = \left\{ \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)} \right\} \subset R^d$ *հանգույցների բազմությունը և կամայական* $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ *իրական արժեքների բազմություն: Գտնել (միակ)* $p \in \prod_n^d$ *բազմանդամ այնպիսին, որ*

$$p(\bar{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s: \tag{1}$$

Որոնելի $p \in \prod_n^d$ բազմանդամը կանվանենք միջարկիչ բազմանդամ, իսկ (1) պայմանները՝ միջարկման պայմաններ:

Սահմանում 1.2.1*. $\left(\prod_n^d, X\right)$ *միջարկման խնդիրը կանվանենք ճշգրիտ, եթե ցանկացած* $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ *արժեքների բազմության համար գոյություն ունի միակ* $p \in \prod_n^d$ *բազմանդամ, որը բավարարում է* (1) *պայմաններին:*

* Սահմանումների, պնդումների, լեմմաների, հետևանքների և թեորեմների համարակալումները համապատասխանեցված են ատենախոսության տեքստին

© National Library of Armenia

Այդ դեպքում միջարկման հանգույցների X բազմությունը կանվանենք նաև $\prod_n^d$ – ճշգրիտ:

Նկատենք, որ միջարկման պայմանները իրենցից ներկայացնում են N անհայտներով S գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ՝

$$p(\bar{x}^{(k)}) = \sum_{|\alpha|\le n} a_\alpha \cdot (\bar{x}^{(k)})^\alpha = c_k, \quad k = 1,2,\ldots,s, \tag{2}$$

որտեղ անհայտները a_α-ներն են:

Միջարկման խնդրի ճշգրտությունն այս իմաստով նշանակում է, որ (2) հանրահաշվական հավասարումների համակարգը ունի միակ լուծում ցանկացած աջակողմյան $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ արժեքների բազմության դեպքում: Այստեղից ստացվում է ճշգրտության անհրաժեշտ պայմանը՝

$$s = N: \tag{3}$$

Դա նշանակում է, որ համակարգում անհայտների և հավասարումների քանակները հավասար են: Այսուհետ միշտ կենթադրենք, որ այս պայմանը տեղի ունի:

(3) պայմանը ներկայացնում է միջարկման համար միաչափ և բազմաչափ դեպքերի միջև եղած առաջին էական տարբերությունը, այն է.

- **Ճշգրիտ բազմաչափ միջարկման հանգույցների քանակը որոշակի տեսքի թիվ է:**

Նշենք Լագրանժի միաչափ և բազմաչափ միջարկումների ևս մեկ էական տարբերություն.

- **Նույնիսկ (3) պայմանի առկայությամբ կան ճշգրիտ և ոչ ճշգրիտ բազմաչափ միջարկման խնդիրներ:**

Այնուհետև (2) համակարգից հետևում է՝

Պնդում 1.2.1.(ա) $\left(\prod_n^d, X\right)$ *միջարկման խնդիրը՝ միջարկման*

$$X = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(N)}\} \subset R^d, \quad N = \binom{n+d}{d}$$

հանգույցներով, կլինի ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$p \in \prod_n^d \quad \text{և} \quad p(\bar{x}^{(j)}) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,N \quad \Rightarrow \quad p = 0,$$

այլ կերպ ասած՝

Պնդում 1.2.1.(բ) $\left(\prod_n^d, X\right)$ *միջարկման խնդիրը՝ միջարկման*

$$X = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(N)}\} \subset R^d, \quad N = \binom{n+d}{d}$$

հանգույցներով, կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի այսպես կոչված զրոյացնող բազմանդամ՝

$$\exists p^0 \in \prod_n^d, \quad p^0 \ne 0, \quad \text{այնպիսին, որ} \quad p^0(\bar{x}^{(j)}) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,N:$$

Ամեն մի $p \in \prod_n^d$, $\deg p = n \ge 1$ (ոչ զրո) բազմանդամի համապատասխանեցնենք $p(\bar{x}) = 0$ հավասարումով տրվող $\le n$-րդ կարգի *հանրահաշվական հիպերմակերևույթը:* Այժմ *Պնդում 1.2.1(բ)*-ից ստացվում է.

- **Բազմաչափ միջարկման ճշգրտության երկրաչափական մեկնաբանությունը՝**

Պնդում 1.2.2. $\left(\prod_n^d, X\right)$ *միջարկման խնդիրը կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի* $\le n$*-րդ կարգի հանրահաշվական հիպերմակերևույթ, որն անցնում է* X *բազմության բոլոր* N *հանգույցներով:*

Այս մեկնաբանության տեսանկյունից հետաքրքիր է նշել, որ՝

- *Ցանկացած* $s < N$ *հանգույցների համար գոյություն ունի* $\le n$*-րդ կարգի հիպերմակերևույթ, որն անցնում է այդ բոլոր հանգույցներով:*

Սահմանում 1.2.2. $p \in \prod_n^d$ *բազմանդամը կանվանենք* $A := \bar{x}^{(k)} \in X$ *հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ, եթե*

$$p \in \prod_n^d, \quad p(\bar{x}^{(j)}) = \delta_{jk}, \quad 1 \le j \le N: \tag{4}$$

որտեղ δ_{jk}-ն Կրոնեկերի նշանն է:

Նկատենք, որ *Սահմանում 1.2.2*-ից հետևում է՝

Պնդում 1.2.3. *Որպեսզի* $\left(\prod_n^d, X\right)$ *միջարկման խնդիրը լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունենան:*

Հետագայում պայմանավորվենք h-ով նշանակել և հիպերհարթությունը, և հիպերհարթության $h(\bar{x}) = 0$ հավասարման մեջ մասնակցող $h \in \prod_1^d$ բազմանդամը:

Պարագրաֆ 1.3-ում նկարագրվում են ճշգրիտ բազմությունների կառուցման եղանակներ:

Բերվում է ճշգրիտ բազմությունների կառուցման մինչ այժմ հայտնի, թերևս, ամենաընդհանուր եղանակը՝ Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիան:

Միաչափ միջարկման դեպքում ֆունդամենտալ բազմանդամները ներկայացվում են գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով՝

$$p_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0,\ldots,n:$$

Սակայն բազմաչափ դեպքում այսպիսի արտադրիչների վերլուծություն միշտ չէ, որ տեղի ունի: Մասնավորապես, սա տեղի ունի այն դեպքում, երբ X բազմության հանգույցները բավարարում են Չանգի և Յաոյի կողմից ներմուծված GC պայմանին:

© National Library of Armenia

Սահմանում 1.3.3.1. *R^d-ում k $(k<d)$ չափանի գծային ենթատարածության տեղաշարժը կանվանենք k չափանի հարթություն կամ կրճատ՝ k-հարթություն:*

Օրինակ՝ R^d-ում կետը, ուղիղը և հիպերհարթությունը 0, 1 և $d-1$ հարթություններ են համապատասխանաբար: Պայմանավորվենք (-1)-հարթություն համարել դատարկ բազմությունը:

Պայմանավորվենք k-հարթությունը նշանակել $h\{k\}$ սիմվոլով: Այն դեպքում, երբ $k=d-1$, կօգտագործենք նաև $h:=h\{d-1\}$ նշանակումը

Սահմանում 1.3.3.2. *Դիցուք $h\{k\}$-ն որևէ k-հարթություն է R^d-ում: Կասենք, որ հանգույցների $X\subset h\{k\}$ բազմությունը բավարարում է GC_n երկրաչափական բնութագրին, կամ կարճ ասած՝ GC_n-բազմություն է, եթե*

1. $\#X=N(n,k)=\binom{n+k}{k}$
2. *Ցանկացած $A\in X$ հանգույցի համար գոյություն ունի (ամենաշատը) n $(k-1)$-հարթություն՝ $h_1^A\{k-1\},h_2^A\{k-1\},\dots,h_n^A\{k-1\}$, այնպիսիք, որ՝*

$$X\setminus\{A\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}h_i^A\{k-1\},\quad \text{բայց}\quad A\notin\bigcup_{i=1}^{n}h_i^A\{k-1\}:$$

Այս դեպքում կասենք, որ $A\in X$ հանգույցը օգտագործում է $h_i^A\{k-1\}$, $(i=1,2,\dots,n)$ $(k-1)$-հարթությունները:

Մասնավորապես, եթե $k=d$ $(h\{k\}=R^d)$, կասենք որ $X\subset R^d$ բազմությունը GC_n բազմություն է, եթե $\#X=N(n,d)$ և կամայական $A\in X$ հանգույցի համար գոյություն ունի (ամենաշատը) n հիպերհարթություն՝ $h_1^A,h_2^A,\dots,h_n^A$ որոնց միավորումը պարունակում է X բազմության բոլոր հանգույցները, բացի A-ից:

Նկատենք, որ վերը նշված սահմանումը համարժեք է այն պայմանին, որ ցանկացած $A\in X$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը գոյություն ունի և ներկայացվում է գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով՝

$$p_A^*=h_1^A\cdot h_2^A\cdots h_n^A,$$

որտեղ $h_1^A,h_2^A,\dots,h_n^A$-երը $A\in X$ հանգույցի կողմից օգտագործվող հիպերհարթություններն են:

Պնդում 1.2.3-ից հետևում է, որ ցանկացած GC_n-բազմություն հանդիսանում է $\prod_n^d-$ ճշգրիտ:

Սահմանում 1.3.3.3. *Կասենք, որ $h_1,h_2,\dots,h_q$, $q>d$ հիպերհարթությունները R^d-ում գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, եթե նրանցից ցանկացած d հատի հատումը մեկ կետ է, իսկ կամայական $d+1$ հատի հատումը դատարկ է:*

Այնուհետև բերվում են GC_n պայմանին բավարարող հանգույցների ճշգրիտ բազմությունների օրինակներ, այդ թվում՝ *Չանգ-Յաոյի* կամ *բնական ցանցը*, *Նյուտոնի* կամ *գլխավոր ցանցը* և *Նյուտոնի ընդհանրացված ցանցը*:

Պարագրաֆ 2.1-ում մենք տալիս ենք GC_n պայմանին բավարարող բազմությունների համար մաքսիմալ k-հարթության սահմանումը և հիմնական հատկությունները՝ ընդհանրացնելով մաքսիմալ հիպերհարթության գաղափարը:

Պնդում 2.1.1. *Դիցուք X-ը $\prod_n^d$-ով միջարկման համար ճշգրիտ բազմություն է: Այդ դեպքում գոյություն չունի հիպերհարթություն, որն անցնում է X-ի՝ $M>\dim\prod_n^{d-1}$ հանգույցներով:*

Սահմանում 2.1.1. *Կասենք, որ h հիպերհարթությունը հանդիսանում է մաքսիմալ հիպերհարթություն $\prod_n^d$-ով միջարկման համար ճշգրիտ X բազմության համար, եթե այն անցնում է X-ի $\dim\prod_n^{d-1}$ հանգույցով:*

Հաջորդ սահմանումով մենք ընդհանրացնում ենք մաքսիմալ հիպերհարթության գաղափարը:

Սահմանում 2.1.2. *(Տես՝ [1]) Կասենք, որ $h\{k\}$ k-հարթությունը հանդիսանում է մաքսիմալ k-հարթություն $\prod_n^d$-ով միջարկման համար ճշգրիտ X բազմության համար, եթե այն անցնում է X-ի $\dim\prod_n^k=\binom{n+k}{k}$ հանգույցով:*

Սահմանում 2.1.3. *(Տես՝ [1]) Ենթադրենք՝ հանգույցների X բազմությունն ընկած է $h\{k\}$ k-հարթություն մեջ: Կասենք, որ X-ը բավարարում է $\widetilde{GC}_n$ պայմանին, եթե այն բավարարում է Սահմանում 1.3.3.2-ի երկրորդ պայմանին, այն է՝ կամայական $A\in X$ հանգույցի համար գոյություն ունի առնվազն n հատ $(k-1)$-հարթություն, որոնք պարունակում են X-ի բոլոր հանգույցները, բացի A-ից:*

Լեմմա 2.1.1. *(Տես՝ [1]) Դիցուք X-ը GC_n-բազմություն է, իսկ $h\{k\}$-ն՝ k-հարթություն R^d-ում: Այդ դեպքում, եթե $X\cap h\{k\}$ բազմությունը դատարկ չէ, ապա այն $\widetilde{GC}_n$ բազմություն է $h\{k\}$-ում: Մասնավորապես՝ $\#(X\cap h\{k\})\le N(n,k)$:*

© National Library of Armenia

Հետևանք 2.1.1. *Դիցուք X -ը GC_n -բազմություն է, իսկ $h\{k\}$ -ն՝ մաքսիմալ k -հարթություն R^d -ում: Այդ դեպքում, եթե $X \cap h\{k\}$ բազմությունը դատարկ չէ, ապա այն GC_n բազմություն է $h\{k\}$ -ում:*

Հաջորդ թեորեմով նկարագրվում են GC_n-բազմություն մաքսիմալ k-հարթությունները:

Թեորեմ 2.1.1. *(Տես՝ [1]) $h\{k\}$ -ն հանդիսանում է մաքսիմալ k -հարթություն X GC_n -բազմության համար, այն և միայն այն դեպքում, երբ կամայական $x \in X \setminus h\{k\}$ հանգույց օգտագործում է $h\{k\}$ -ն պարունակող հիպերհարթություն:*

Թեորեմ 2.1.2. *Դիցուք h -ը մաքսիմալ հիպերհարթություն է X GC_n -բազմության համար R^d -ում: Այդ դեպքում հանգույցների $X \setminus h$ բազմությունը հանդիսանում է GC_{n-1} -բազմություն R^d -ում: Ավելին՝ եթե h' -ը X -ի մեկ այլ մաքսիմալ հիպերհարթություն է, ապա այն մաքսիմալ է նաև $X \setminus h$ -ի համար:*

Թեորեմ 2.1.3. *(Տես՝ [1]) Դիցուք X -ը GC_n -բազմություն է R^d -ում: Եթե $h\{k\}$ -ն մաքսիմալ k -հարթություն է X -ի համար, իսկ h' -ը՝ $h\{k\}$ -ն չպարունակող մաքսիմալ հիպերհարթություն, ապա $h' \cap h\{k\}$ -ն մաքսիմալ $(k-1)$ -հարթություն է X -ի համար:*

Հաջորդ պնդումը մեզ հնարավորություն է ընձեռում ընդհանուր դրության մեջ գտնվող հիպերհարթությունների գաղափարը սահմանել ավելի ընդհանուր:

Պնդում 2.1.3. *Հիպերհարթությունների $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_l\}, l \geq d$ բազմությունը գտնվում է ընդհանուր դրության մեջ, այն և միայն այն դեպքում, երբ H -ից կամայական k հատ հիպերհարթության հատումը $(d-k)$ -հարթություն է:*

Բերենք վերոհիշյալ սահմանումը:

Սահմանում 2.1.4. *Կասենք, որ հիպերհարթությունների H բազմությունը գտնվում է ընդհանուր դրության մեջ, եթե նրանցից կամայական k հատի հատումը $(d-k)$ -հարթություն է $(k = 1, 2, \ldots, d+1)$:*

Թեորեմ 2.1.3-ից և Պնդում 2.1.3-ից որպես հետևանք ստանում ենք Կ. դե Բորի հետևյալ արդյունքը (տես՝ [5]):

Հետևանք 2.1.4 *(Կ. դե Բոր) R^d -ում X GC_n -բազմության բոլոր մաքսիմալ հիպերհարթությունները գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ և կամայական k հատի հատումը մաքսիմալ $(d-k)$ -հարթություն է:*

Դիտարկենք մուլտիինդեքսների հետևյալ բազմությունը.

$$I_r^s = \{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) : 1 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_r \leq s\}:$$

$$\# I_r^s = \binom{s}{r}:$$

Ենթադրենք՝ հիպերհարթությունների $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_s\}$ բազմությունը գտնվում է ընդհանուր դրության մեջ: Նշանակենք՝

$$F_H^k = \{h_\alpha\{k\} := \bigcap_{i \in \alpha} h_i \mid \alpha \in I_{d-k}^s\}:$$

Կամայական $h_\alpha\{k\}$ k-հարթության համար $\alpha \in I_{d-k}^s$ մուլտիինդեքսն որոշվում է միարժեքորեն:

Այսպիսով՝ F_H^0 -ը հիպերհարթությունների հատման կետերի բազմությունն է: Մասնավորապես, եթե $n+d$ հիպերհարթությունների $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_{n+d}\}$ բազմությունն ընդհանուր դրության մեջ է: Այդ դեպքում F_H^0 բազմությունը կանվանենք բնական կամ Չանգ-Յաոյի ցանց:

Հայտնի է, որ բնական ցանցը, ամենաշատ՝ $n+d$ մաքսիմալ հիպերհարթություններ ունեցող GC_n բազմությունն է:

Սահմանում 2.2.2. *Դիցուք $X \subset R^d$ -ն GC_n -բազմություն է: Կասենք, որ X -ն ունի r դեֆեկտ, կամ X -ը r -ցանց է, եթե X -ի մաքսիմալ հիպերհարթությունների քանակը հավասար է $n+d-r$:*

Այսպիսով՝ բնական ցանցը բնութագրվում է, որպես 0-ցանց:

Պարագրաֆ 2.3 –ում մենք տալիս ենք 1-ցանցերի նկարագրությունը R^d -ում: R^2-ում համապատասխան նկարագրությունը տրվել է Քարնիսերի և Գասպաի կողմից [6]-ում:

Թեորեմ 2.3.1. *(Տես՝ [1]) Դիցուք հիպերհարթությունների $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_{n+d-1}\}$ բազմությունն ընդհանուր դրության մեջ է, և $F_H^1 = \{l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots, l_{\alpha_m}\}$ -ն այդ հիպերհարթությունների բոլոր հատման գծերի բազմությունն է, որտեղ $\alpha_i \in I_{d-1}^{n+d-1}$ և $m = \binom{n+d-1}{d-1}$:*

Ենթադրենք հանգույցների $X' := \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ բազմությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

ա) x_i հանգույցը պատկանում է l_{α_i} ուղղին.

© National Library of Armenia

բ) Գոյություն չունի հիպերհարթություն R^d-ում, որը պարունակում է X'-ի բոլոր հանգույցները:

Այդ դեպքում

$$X = X' \cup F_H^0 \qquad (1)$$

*բազմությունը 1-ցանց է R^d-ում և հակառակը՝ կամայական $X \subset R^d$ 1-ցանց կարելի է ստանալ նկարագրված ձևով, այսինքն՝ գոյություն ունի հիպերհարթությունների H բազմություն, որը համընկնում է X-ի մաքսիմալ հիպերհարթությունների բազմության հետ, և գոյություն ունի հանգույցների X' բազմություն, ա) և բ) պայմաններին բավարարող, այնպես, որ տեղի ունի (1)-ը: F_H^0 բազմության հանգույցները կանվանենք **սև** հանգույցներ, X'-ի հանգույցները՝ **սպիտակ**:*

Գլուխ 3-ում քննարկվում են GC_n-բազմությունների վերաբերյալ հայտնի վարկածները, ինչպես նաև առաջ է քաշվում նոր վարկած:

1982թ.-ին Գասքան և Մաեզթուն առաջ են քաշել մի վարկած, որը հայտնի է GM-վարկած անունով:

GM-վարկած *(Գասքա-Մաեզթու) Եթե X-ը GC_n-բազմություն է R^2-ում, ապա գոյություն ունի ուղիղ, որն անցնում է X-ի $n+1$ հանգույցներով:*

Կ. դե Բորը [5]-ում տվել է այս վարկածի ընդհանրացումը R^d տարածության համար, որտեղ $d \geq 3$:

GM_d-վարկած *(Կ. դե Բոր) Եթե X-ը GC_n-բազմություն է R^d-ում, ապա գոյություն ունի հիպերհարթություն, որն անցնում է X-ի $\dim \prod_n^{d-1} = N(n, d-1) = \binom{n+d-1}{d-1}$ հանգույցներով:*

Այս վարկածն ըստ էության նշանակում է, որ կամայական GC_n-բազմություն միևնույն ժամանակ հանդիսանում է նաև Բերզոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիա: Նշենք, որ GM-վարկածն ապացուցված է միայն $n \leq 4$ դեպքում:

Հաջորդիվ՝ *պարագրաֆ 3.2*-ում ապացուցվում է GM_d-վարկածը $d = 3, n = 2$ դեպքում:

Թեորեմ 3.2.1. *(Տես՝ [4]) GM_d-վարկածը տեղի ունի $\prod_2^3$ տարածությունում:*

Պարագրաֆ 3.3-ում քննարկվում է Կ. դե Բորի կողմից առաջ քաշված մեկ այլ՝ CG-վարկածը, որը Կարնիսեր-Գասքաի հետևյալ թեորեմի բնական ընդհանրացումն է.

Թեորեմ 3.2.1. *(Կարնիսեր-Գասքա) Եթե կամայական GC_n-բազմություն R^2-ում ունի մաքսիմալ ուղիղ, ապա այն ունի առնվազն 3 մաքսիմալ ուղիղ:*

CG_d-վարկած *(Կ. դե Բոր) R^d-ում կամայական GC_n-բազմություն ունի առնվազն $d+1$ մաքսիմալ հիպերհարթություն:*

Նույն աշխատությունում Կ. դե Բորը բերում է հակաօրինակ՝ GC_2-բազմություն R^3-ում, որն ունի ընդամենը 3 մաքսիմալ հիպերհարթություն, դրանով իսկ հերքելով CG_d-վարկածը: Հակաօրինակի կառուցումը նա սկսում է վերցնելով 1-ցանց R^3-ում: Այնուհետև նա նվազեցնում է մաքսիմալ հարթություններից մեկին պատկանող հանգույցների քանակը մեկով՝ հեռացնելով նրանից մի սպիտակ հանգույց, այդպիսով՝ դարձնելով հիպերհարթությունը ոչ մաքսիմալ:

Օգտագործելով սպիտակ հանգույցը տեղաշարժելու միտքը մենք հերքում ենք ոչ միայն CG_d-վարկածը, այլ նաև GM_d-վարկածը: Նշված արդյունքին հասնում ենք հետևյալ կերպ. նախ՝ *պարագրաֆ 3.3.1*-ում մենք կառուցում ենք CG_d-վարկածը հերքող հակաօրինակ, ավելի ընդհանուր՝ R^d տարածությունում: Հակաօրինակը ստացվում է մաքսիմալ 2-հարթություններից մեկի սպիտակ հանգույցներից մեկը դեպի մյուս երկու սպիտակ հանգույցները միացնող ուղիղը տեղաշարժելով: Այնուհետև *պարագրաֆ 3.3.1*-ում մենք կառուցում ենք GC_2-բազմության օրինակ R^4-ում, որն ունի ընդամենը 3 մաքսիմալ հիպերհարթություն: Այս դեպքում մենք նվազեցնում ենք մաքսիմալ հիպերհարթությունների քանակը 2-ով՝ կատարելով սպիտակ հանգույցների տեղաշարժ երկու տարբեր մաքսիմալ 2-հարթություններում, որոնք որոշակի իմաստով անկախ են:

Սահմանում 3.3.1. *Կասենք, որ վեց հանգույցներն R^2-ում ունեն Δ_2-ստրուկտուրա երեք ընդհանուր դրության մեջ գտնվող ուղիղներով, եթե հանգույցներից երեքը հանդիսանում են այդ ուղիղներով կազմված եռանկյան գագաթները և կոչվում են սև հանգույցներ, իսկ մնացած երեքը մեկական ընկած են ուղիղների վրա և կոչվում են սպիտակ հանգույցներ:*

Սահմանում 3.4.1. *Ենթադրենք՝ A-ն որևէ Δ_2-ստրուկտուրայի սև հանգույց է: Կասենք, որ մենք կատարում ենք տեղաշարժ A հանգույցի **նկատմամբ** նշված Δ_2-ստրուկտուրայում, եթե մյուս երկու սև հանգույցները միացնող ուղղի վրա գտնվող սպիտակ հանգույցը տեղաշարժում ենք մնացած երկու սպիտակ հանգույցները միացնող ուղղի վրա:*

Դիցուք X-ը 1-ցանց է R^6-ում: Համաձայն *Թեորեմ 2.3.1*-ի, դա նշանակում է, որ ունենք 7 սև և 21 սպիտակ հանգույց՝ մեկական տեղակայված յուրաքանչյուր 2 սև հանգույցը միացնող ուղղի վրա: Նշենք, որ յուրաքանչյուր սև հանգույց օգտագործում է միայն մեկ մաքսիմալ հիպերհարթություն, որն անցնում է մնացած 6 սև հանգույցներով: Ըստ *Սահմանում 3.4.1*-ի, կատարելով տեղաշարժ որևէ սև հանգույցի նկատմամբ X-ի

© National Library of Armenia

որոշակի մաքսիմալ 2-հարթության մեջ (Δ_2-ստրուկտուրայում), մենք այդ հանգույցի օգտագործած մաքսիմալ հիպերհարթությունը դարձնում ենք ոչ մաքսիմալ:

Սահմանում 3.4.2. *Կասենք, որ երկու Δ_2-ստրուկտուրա անկախ են միմյանցից, եթե նրանք ունեն ոչ ավելի քան մեկ հատ ընդհանուր հանգույց:*

Նկատենք, որ երկու անկախ Δ_2-ստրուկտուրայի ընդհանուր հանգույցը կարող է լինել միայն սև:

Այնուհետև X բազմության մեջ նշում ենք 7 հատ զույգ առ զույգ անկախ Δ_2-ստրուկտուրա և կատարում տեղաշարժ նրանցից յուրաքանչյուրում, այնպես որ տեղաշարժ կատարված լինի յուրաքանչյուր սև հանգույցի նկատմամբ: Ստացված բազմությունը նշանակենք $\widetilde{X}$:

Պնդում 3.4.1. *(տես՝ [3]) $\widetilde{X}$-ը GC_2-բազմություն է:*

Նշենք, որ համաձայն կառուցման, բոլոր 7 մաքսիմալ հիպերհարթություններն էլ այլևս մաքսիմալ չեն, սակայն բացառված չէ, տեղաշարժերի հետևանքով նոր մաքսիմալ հիպերհարթություններ կառաջանան:

Պնդում 3.4.2. *(տես՝ [3]) H հիպերհարթությունը մաքսիմալ է $\widetilde{X}$ բազմության համար, այն և միայն այն դեպքում, եթե պարունակում է բոլոր սպիտակ հանգույց ները:*

Պնդում 3.4.3. *(տես՝ [3]) Գոյություն ունի այնպիսի երկրորդ աստիճանի X_0 1-ցանց R^6-ում, որ $\widetilde{X_0}$ բազմությունը չունի մաքսիմալ հիպերհարթություն: Ավելին՝ X_0-ն կարելի է ստանալ կամայական 1-ցանցից, տեղաշարժելով որոշակի սպիտակ հանգույց հատման գծի երկայնքով:*

Ինչպես տեսանք, GM_d-վարկածն ընդհանուր դեպքում տեղի չունի, սակայն մյուս կողմից կարող ենք տեսնել, որ բերված հակաօրինակներում սպիտակ հանգույցների նշված տեղաշարժերը չեն փոխում մաքսիմալ ուղիների (1-հարթությունների) քանակը: Թվում է, թե Հ. Հակոբյանի հետ համատեղ առաջ քաշած հետևյալ վարկածը տեղի ունի, որը հիմնվում է *Թեորեմ 3.3.1*-ի վրա:

Վարկած 3.4.1. *(տես՝ [2]) Յանկացած GC_n-բազմություն R^d-ում ունի առնվազն $\binom{d+1}{d-1}$ մաքսիմալ ուղիղ:*

Թեորեմ 3.3.1-ից ստանում ենք, որ $d=2$ դեպքում *Վարկած 3.4.1*-ը համընկնում է GM-վարկածի հետ: Հեշտ է տեսնել, որ R^d-ում GC_1-բազմությունների համար այն տեղի ունի: Իրոք, ունենք $d+1$ սև հանգույց, որոնցից կամայական երեքը մեկ ուղղի վրա չեն և կամայական երկուսը կազմում են մաքսիմալ ուղիղ:

Թեորեմ 3.4.2. *(տես՝ [2]) Վարկած 3.4.1-ը տեղի ունի GC_2-բազմությունների համար R^3-ում:*

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ԵՐԶԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՊԱՐԱԿՎԱԾ ԱՇԽԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

[1] А. Апозян, Гипотезы о GC_n Множествах, Известия НАН Армении. Математика, 46(2), 13-26, 2011.

[2] A. Apozyan, GC_n Sets in R^d With $n+d-1$ Maximal Hyperplanes, East Journal on Approximations, 16(3), 235-246, 2010.

[3] A. Apozyan, On Rejection of GM_d Conjecture, Reports of the NAS of Armenia, 111(2), 107-113, 2011.

[4] A. Apozyan, G. Avagyan and G. Ktryan, On the Gasca-Maeztu Conjecture in R^3, East Journal on Approximations, volume 16(1), 25-33, 2010.

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[5] C. de Boor, Multivariate polynomial interpolation: Conjectures concerning GC-sets, Numer. Alg., 45, 113-125, 2007.

[6] J. M. Carnicer and M. Gasca, On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation, Curve and Surface Design: Saint-Malo 2002, 11-30, 2003.

© National Library of Armenia

ABSTRACT

Armen Apozyan

ON MULTIVARIATE POLYNOMIAL INTERPOLATION, GC_n SETS AND GASCA-MAEZTU CONJECTURE

The interpolation is one of the most important sections of the theory of approximation, numerical analysis and computing mathematics. The term interpolation was introduced by English mathematician John Wallis in 1655.

The first fundamental results of univariate polynomial interpolation were obtained by Lagrange and Newton. These results give two different comprehensive solutions of the problem. But in case of multivariate interpolation the situation is much more complicated. In this case not all interpolation problems are unisolvent, i.e., poised. The poisedness of the problem depends not only on the number of interpolation knots as in the univariate case but also on the geometric distribution of knots.

The first important results of multivariate interpolation were obtained by Berzolari, Radon as well as Chung and Yao.

The polynomial interpolation is an important tool in solving of many univariate problems, in particular, in tabular integration, in approximate solutions of the systems of nonlinear equations or differential equations. In the respective multivariate problems first was applied the tensor product multivariate interpolation. Despite the simplicity, this method has a significant shortcoming. Namely, the polynomial space and the set of knots of the tensor product interpolation are not invariant with respect to the linear transformation. In view of this circumstance, in solving of the mentioned problems one needs to use an interpolation which is essentially multivariate, i.e., interpolation with total degree polynomial spaces.

In the thesis we study poised multivariate polynomial interpolations, where fundamental polynomials are products of linear factors. This condition is called geometric characterization of Chung and Yao. The sets of interpolation knots satisfying the geometric characterization are called GC_n sets. Of course, GC_n sets are poised for interpolation with space of multivariate polynomials of total degree not exceeding n. In the thesis we present some basic constructions of GC_n sets. In particular, we consider the natural lattice of Chung and Yao, which can be characterized by the fact that it is the only construction with $n+d$ maximal hyperplanes. Note that there is no GC_n set with more than $n+d$ maximal hyperplanes. We introduce and investigate the concept of maximal k-flat. Then we characterize GC_n sets in R^d with $n+d-1$ maximal hyperplanes.

All the examples of known GC_n sets are special cases of the construction of Berzolari and Radon. In 1982 Gasca and Maeztu proposed a conjecture, called GM-conjecture, according to which every planar GC_n set is special case of Berzolari-Radon construction. Note that the GM-conjecture is proved only in the case of $n \le 4$.

C. de Boor proposed the GM_d-conjecture, which is a generalization of GM-conjecture for R^d, $d \ge 3$. According to GM_d-conjecture, every GC_n set in R^d has a maximal hyperplane.

In [A. Apozyan, G. Avagyan and G. Ktryan, On the Gasca-Maeztu Conjecture in R^3, East Journal on Approximations, volume 16(1), 25-33, 2010] we prove that GM_d-conjecture holds for polynomials of degree not exceeding 2 in R^3.

C. de Boor also proposed the CG_d-conjecture according to which every GC_n set in R^d has at least $d+1$ maximal hyperplanes. Then he constructs a GC_2 set in R^3 with just three maximal planes, from such set with 4 maximal planes, by a movement of a knot, thus rejecting the CG_d-conjecture.

In the thesis by using the idea of movement of knots we reject the GM_d-conjecture. Namely, we construct an example of a GC_2 set in R^6 without maximal hyperplanes.

Finally, we introduce a conjecture concerning the number of maximal lines (1-flats) of GC_n sets. According to this conjecture each such set has at least $\binom{d+1}{d-1}$ maximal lines. This conjecture in R^2 coincides with GM-conjecture. We also prove this conjecture for polynomials of degree not exceeding 2 in R^3.

The following main results are obtained in the thesis:

- The definition, basic properties and description of maximal k-flats.
- The characterization and construction of 1-lattices.
- The rejection of the generalized Gasca-Maeztu conjecture proposed by C. de Boor on existence of maximal hyperplane of GC_n set.
- Proposition of a conjecture on number of maximal lines of GC_n sets in R^d and its verification in several cases.

© National Library of Armenia

РЕЗЮМЕ

Армен Тигранович Апозян

О МНОГОМЕРНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛАЦИИ, GC_n МНОЖЕСТВАХ И ГИПОТЕЗЕ ГАСКА-МАЕЗТУ

Интерполяция одна из самых важных разделов теории приближений, численного анализа и вычислительной математики. Термин "интерполация" введена английским математиком Уоллисом в 1655 году.

Первые фундаментальные результаты одномерной полиномиальной интерполяции получили Лагранж и Ньютон. Эти результаты дают две разные комплексные решения задачи интерполяции. Но в случае многомерной интерполяции ситуация гораздо более сложная. Дело в том, что не все задачи многомерной интерполяции имеют единственные решения, т.е., корректны. Корректность проблемы зависит не только от числа узлов интеролляции, но и от их гетометрического распределения.

Первые основные результаты многомерной интерполяции были получены Берзолари, Радоном, Чангом и Яо.

Многомерная интерполяция является важным инструментом в решениях многих одномерных задач, в частности в численном интегрировании, приближенных решениях систем нелинейных уравнений и дифференциальных уравнений. В соответствующих многомерных задачах изначально применялось тензорное произведение одномерных интерполяций. Несмотря на несложность, этот метод имеет существенный недостаток. Именно, пространство многочленов и множество узлов этой интерполяции не инвариантны относительно линейных преобразований. В связи с этим обстоятельством возникает необходимость при решении указанных задач применять интерполяцию с пространством многочленов суммарной степени.

В работе мы изучаем корректные многомерные интерполяции, где фундаментальные многочлены являются произведениями линейных множителей. Это условие называется геометрической характеристикой Чанга и Яо. Множества узлов удовлетворяющие геометрической характеристики называются GC_n множествами. GC_n множества являются корректными для интерполяции с пространством многочленов суммарной степени не выше n. Мы приводим некоторые основные методы построения GC_n множеств. В частности, мы рассматриваем натуральную сеть Чанга и Яо, которая может быть характеризована как конструкция с $n+d$ максимальными гиперплоскостями. Отметим, что GC_n множество не может иметь более чем $n+d$ максимальных гиперплоскостей. Мы вводим и изучаем понятие максималной k-плоскости GC_n множеств. Далее, мы даем полную характеристику GC_n множеств в R^d с $n+d-1$ максимальными гиперплоскостями.

Все изветные примеры GC_n множеств являются частными случаями конструкции Берзолари и Радона. В всязи с этим обстоятельством в 1982 году Гаска и Маезту предложили гипотезу, называемую GM-гипотезой, согласно которой каждое GC_n множество в двумерном пространстве является частным случаем конструкции Берзолари-Радона. GM-гипотеза доказана только в случае $n \le 4$.

К. де Бор предложил GM_d-гипотезу, которая является обобщением GM-гипотезы для R^d, согласно которой, каждое GC_n множество в R^d имеет максимальную гиперплоскость.

В работе [A. Apozyan, G. Avagyan and G. Ktryan, On the Gasca-Maeztu Conjecture in R^3, East Journal on Approximations, volume 16(1), 25-33, 2010] мы доказываем, что GM_d-гипотеза имеет место для многочленов степени не превышающих 2 в R^3.

К. де Бор предложил еще одну: CG_d-гипотезу, согласно которой, каждое GC_n множество в R^d имеет по меньшей мере $d+1$ максимальных гиперплоскостей. Далее, он приводит пример GC_2 множества в R^3 с тремя максимальными плоскостями, тем самым опровергая CG_d-гипотезу. В построении этого примера он перемещает один из узлов GC_2 множества с четырьмя максимальными плоскостями.

Используя идею перемещения узлов, в диссертационной работе мы оправергаем GM_d-гипотезу. Точнее, мы приводим пример GC_2 множества в R^6 без максимальных гиперплоскостей.

Наконец, мы предлогаем одну гипотезу о числе максимальных прямых (1-плоскостей) GC_n множеств, согласно которой каждое такое множество имеет по меньшей мере $\binom{d+1}{d-1}$ максимальных прямых. В R^2 эта гипотеза совпадает с GM-гипотезой. Мы доказываем ее правдивость для многочленов степени не превышающих 2 в R^3.

Следующие основные результаты получены в диссертационной работе:

- Определение, основные свойства и описание максимальных k-плоскостей.
- Характеристика и построение 1-сетей.
- Опровержение обобщенной гипотезы Гаска-Маезту предложенный К. де Буром о существовании максимальной гиперплоскости GC_n множества.
- Предложение гипотезы о числе максимальных прямых GC_n множеств в R^d и доказательство ее правдивости в некоторых случаях.

© National Library of Armenia

© National Library of Armenia

05.02.2013

© National Library of Armenia

© National Library of Armenia