ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՃԱՐՏԱՐԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿ)

Աշոտ Յուրիի Շահվերդյան

ՊՈՏԵՆՑԻԱԼՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՆՈՒՐԲ ՏՈՊՈԼՈԳԻԱՅԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ և ԴԻՆԱՄԻԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

Ա.01.01 - «Մաթեմատիկական անալիզ» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2012

....

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ
(ПОЛИТЕХНИК)

ПРИМЕНЕНИЯ ТОНКОЙ ТОПОЛОГИИ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

ШАХВЕРДЯН АШОТ ЮРЬЕВИЧ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – «Математический Анализ»

ЕРЕВАН-2012

Ատենախոսության թեման հաստատված է Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանի գիտական խորհուրդի նիստում

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ֆ.մ.գ.դ. Վ.Յա.Էյդերման
ֆ.մ.գ.դ. Հ.Մ. Հայրապետյան
ֆ.մ.գ.դ. Ս.Լ.Բերբերյան

Առաջատար կազմակերպություն՝

Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Մաթեմատիկայի Ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012թ. մայիսի 3-ին, ժամը 15.00-ին
Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանում գործող Մաթեմատիկայի 053 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե՝ ք.Երևան 0009, փ.Տերյան 105, 12 մասնաշենք:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՊՃՀ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2012թ. ապրիլի 3-ին:

Մաթեմատիկայի 053 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ. Ա.Հ.Բաբայան

****

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета Государственного инженерного университета Армении

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат. наук В. Я. Эйдерман
доктор физ.-мат. наук Г. М. Айрапетян
доктор физ.-мат. наук С. Л. Берберян

Ведущая организация:
Институт Математики Национальной Академии Наук Республики Армения

Защита состоится 3-го мая 2012г. в 15.00 на заседании специализированного совета Математики 053 действующего в Государственном инженерном университете Армении
Адрес: г. Ереван-0009, ул. Теряна-105, корпус 12
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГИУА.

Автореферат разослан 3-го апреля 2012г.

Ученый секретарь Специализированного совета
Математики 053, доктор физ.-мат. наук А. О. Бабаян

1. Общая характеристика работы

1.1. Описание задач и их актуальность. В настоящей диссертации рассматриваются некоторые вопросы теории потенциала и теории исключительных множеств. В анализе теория потенциала возникла из проблем об устранении особенностей для некоторых классов функций и при изучении радиальных пределов. Такими являются теоремы Фату и Лузина и их обобщения полученные Берлингом и Карлесоном. Статья Альфорса и Хейнса о принципе Фрагмена-Линделефа, теорема А. Картана о непрерывности потенциала Ньютона а также теорема Винера в задаче Дирихле явились источником топологических рассмотрений в теории потенциала. Благодаря этим исследованиям возникли понятия сходимости по фильтрам, тонких топологий и границ.

Приведем краткое описание предлагаемой диссертации акцентируя ее актуальность.

Глава 2 диссертации (глава 1 содержит Введение) относится к классической теории потенциала и теории мероморфных функций. Получены оценки для потенциалов Рисса и Грина и для δ-субгармонических функций. Эти оценки справедливы вне некоторых исключительных множеств описываемых в терминах емкости. Формулировки даны в терминах весовых функций, которые отражают рост борелевской меры определяющей заданный потенциал; в субгармоническом случае весовые функции определяются мерой Рисса и неванлинновской характеристикой заданной функции. Исключительные множества удовлетворяют некоторым соотношениям типа критерия Винера. Полученные в этой главе результаты уточняют или дополняют классические теоремы Альфорса и Хейнса, Хеймана, Брело и других. С. Н. Мергелян доказал теорему единственности для ограниченных гармонических в шаре функций. А. Л. Шагинян доказал такую теорему для ограниченных аналитических функции в круге. В обеих теоремах заключение о тождественности функции нулю выводится из предположения о сильном убывании функции на достаточно большом множестве. Мы доказываем такую теорему для δ-субгармонических функций в шаре. Более того нами получены результаты касательно экстремального убывания функций на исключительных множествах.

В главе 3 доказана теорема об асимптотическом росте δ-субгармонических (и субгармонических) в $\mathbb{R}^m$ функций нулевого порядка относительно неванлинновской характеристики $T(r)$ (относительно максимума модуля $B(r)$ на сферах радиусом r, соответственно). Отдельно рассмотрены функции в $\mathbb{R}^2$ с медленно растущей неванлинновской характеристикой. Здесь новым в задачах оценивания роста функций является привлечение различного рода дефектов функции. Другим таким аспектом являются функции сравнения ω вводимые для оценивания 'размера' исключительных множеств и введение ω-тонких множеств обобщающих понятие тонкого множества. Полученные нами в этой главе теоремы обобщают, уточняют, или дополняют результаты Кубота, Гольдберга и Островского, Андерсона, Гольдберга и Еременко, Боаса, Хеймана.

Глава 4 касается применения методов теории потенциала к динамическим сетям и дискретным динамическим системам – здесь об'единены методы абстрактной алгебры, динамических систем, и теории потенциала. Глава состоит из трех разделов;

оба вида расматриваемых нами дискретных емкостей есть дискретные версии классической слабой емкости Фугледе-Шоке (положительная монотонная субаддитивная функция множества в топологическом пространстве). В разделе 4.1 вводится емкость для кластеров и в этих терминах решается задача о моделировании памяти в ротаторных сетях (rotator networks, RN). Полученные результаты относятся к статистической физике и динамическим сетям. В частности, доказана эквивалентность двух хорошо известных гипотез в этой области. Из других работ такого плана отметим статью Кумбеса и Чоу (цитированную в диссертации; отметим здесь же, что в настоящем Автореферате даются ссылки только на работы автора – все библиографические ссылки на работы других авторов следует смотреть непосредственно в диссертации). Раздел 4.2 продолжает изучение ротаторов (именно на их основе конструируются RN-сети из раздела 4.1). Возникающие здесь исключительные множества характеризуются в метрических терминах. Доказано самоподобие отображения вращения окружности и наличие скейлинга в классической тригонометрической системе. Раздел 4.2 относится к области комплексной динамики, соединяющей теорию дискретных динамических систем и теорию функций (например, работы Б. Мандельброта, А. Еременко, Д. Хавинсона, и других). Раздел 4.3 главы 4 касается метода анализа дискретных динамических систем основанном на рассмотрении высшей разностной структуты орбит системы. Вводится минимальная алгебра Ли которая является аксиоматическим базисом для абстрактной версии такого анализа. Рассматриваются динамические системы, случайные переменные и тонкие пределы (соотношения типа критерия Винера в вероятностной теории потенциала). Фактически, здесь разрабатывается новое направление, (аксиоматически) противоположное так называемой идемпотентной математике развиваемой В. Масловым, Г. Литвиновым и другими.

1.2. **Цель работы.** Цель диссертации - получение наиболее точных оценок для роста потенциалов и δ-субгармонических функций и для 'размера' соответствующих исключительных множеств, точное описание исключительных множеств при декомпозиции отображения вращения окружности, изучение методами теории потенциала динамических сетей и систем.

1.3. **Методы исследования.** Применяются методы теории потенциала, теории функций, и эргодической теории. Методы развитые в диссертации позволяют улучшить и дополнить ряд хорошо известных теорем об оценках δ-субгармонических функций и предоставляют новые возможности для дальнейшего описания поведения функций на исключительных (в такого рода оценках) множествах. Другая особенность применяемых методов это то, что они допускают адаптацию теории потенциала к исследованиям в теории дискретных динамических сетей и систем.

1.4. **Научная новизна работы.** Научная новизна диссертации заключается в полученных в диссертации наиболее точных оценках для роста потенциалов и δ- субгармонических функций и для 'размера' соответствующих исключительных множеств. Эти оценки формулируются в емкостных (а не метрических, как в работах других

авторов) терминах и во многих случаях окончательны и неулучшаемы. Другим новым аспектом является применение общих методов теории потенциала к изучению динамических сетей и систем.

1.5. **Практическая и теоретическая ценность.** В диссертации использованы новые методы теоретического исследования в классической теории потенциала касательно получения оценок для потенциалов и субгармонических функций. Предложены новые применения методов теории потенциала в динамических сетях и динамических системах. Полученные в диссертации результаты неоднократно цитировались (применялись) в зарубежной периодической и монографической математической литературе. В прикладном (практическом) отношении результаты диссертации касаются таких областей как computer-science (математическая модель памяти на основе понятия лавины), нейронные сети, mathematical neuroscience (применения разностного анализа).

1.6. **Апробация работы.** Результаты диссертации в разное время докладывались автором на следующих международных конференциях:

International Conference "Fractals" , Budapest, Hungary, 1993

Gordon Conference "Fractals" , Heineker, NH, USA, 1996

Summer School "Dynamics of Branching Systems" , Les Houches, France, 1999

V-th International Congress on Math Modeling, JINR, Dubna, Russia, 2002

International conference: Global analysis of nonlinear PDEs, Yerevan, Armenia, 2005

CIMPA-UNESCO School in recent topics of geometric analysis, Teheran, Iran, 2006

Joint European and National Astronomical Meeting JENAM-2007, Yerevan, Armenia, 2007

International conference on Computer Science and Information Technologies CSIT-2007, Yerevan, Armenia, 2007

International Conference on Memory Modeling ("Ararat-Memory"conference), Yerevan, Armenia, 2010

1.7. **Публикации.** По теме диссертации опубликовано 23 научные статьи.

1.8. **Структура и об'ем диссертации.** Диссертация состоит из Аннотации, Глав 1-4, Заключения, и Списка литературы (149 ссылок). Общий об'ем диссертации 165 страниц.

2. Тонкая топология и оценки для субгармонических функций

2.1. **Оценки для потенциалов Рисса и Грина.** Введем обозначения и определения. Для $x \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ обозначим $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{1/2}$. Комплексная плоскость обозначается $\mathbb{C}$. Для границы $\partial\mathbb{D}^m$ единичного шара $\mathbb{D}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < 1\}$ используем более простое обозначение $\Delta^m = \partial\mathbb{D}^m$. Для $m \geq 2$ и $x, \xi \in \mathbb{D}^m$ обозначается

$$|1 - x\bar{\xi}| = (1 - 2\sum_{i=1}^{m} x_i\xi_i + |x|^2|\xi|^2)^{1/2}, \qquad [x, \xi] = \frac{|x - \xi|}{|1 - x\bar{\xi}|}.$$

Отметим следующие свойства такой скобки: $0 \le [x,\xi] < 1$, $[x,\xi] = [\xi, x]$ и $[x,\xi] = 1$ если $x \in \mathbb{D}^m$ и $\xi \in \Delta^m$. В этом обозначении, функция Грина $\mathbb{D}^m$, $m \ge 2$ может быть записана как

$$g(x,\xi) = \ln \frac{1}{[x,\xi]} \quad (m=2), \qquad g(x,\xi) = \frac{1-[x,\xi]^{m-2}}{|x-\xi|^{m-2}} \quad (m>2)$$

для сравнения, ядро Пуассона для $\mathbb{D}^m$, $m \ge 2$ есть

$$(1) \qquad P_\xi(x) = \frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^m} \qquad (x \in \mathbb{D}^m,\ \xi \in \Delta^m).$$

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \ge 2$ есть компакт и $K = K(x,\xi)$ есть измеримая функция (ядро) определенная на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Мы рассматриваем множество $\mathcal{M}_E$ борелевских мер μ и величину $C(E,K)$ определенную как: $\mathcal{M}_E = \{\mu : supp(\mu) \subseteq E,\ \mu(E) = 1\}$ и

$$C(E;\ K) = (\inf_{\mu \in \mathcal{M}_E} \{\int_E \int_E K(x,\xi) d\mu(x) d\mu(\xi)\})^{-1}.$$

Выбирая ядро K получаем различные емкости; если множество не компактно, мы рассматриваем внешние емкости. Мы интересуемся следующими четырьмя емкостями C_α, C_g, C_2, и C_2':

$$C_\alpha(E) = C(E; |x-\xi|^{\alpha-m}) \ \ (E \subset \mathbb{R}^m, m > 2), \quad C_g(E) = C(E; g(x,\xi)) \ \ (E \subset \mathbb{D}^m, m \ge 2)$$

$$C_2(E) = C(E; \ln \frac{|x|}{|x-\xi|}) \quad (E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \quad C_2'(E) = C(E; \ln \frac{1}{|x-\xi|}) \quad (E \subset \mathbb{R}^2).$$

В определении C_α предполагается что $0 < \alpha < m$. Фактически, C_α зависит также от размерности m – предполагается что каждый раз из контекста ясно в каком из пространств $\mathbb{R}^m$ рассматривается C_α; в частности, C_α для $\alpha = 2$ всегда относится к $\mathbb{R}^m$ с $m \ge 3$, тогда как C_2 относится только к подмножествам $\mathbb{R}^2$. Емкость C_α для $\alpha = 2$ есть классическая Ньютонова емкость; C_g есть Гринова емкость определенная на подмножествах $\mathbb{D}^m$, C_2' есть обычная логарифмическая емкость. Некоторые детали о емкости C_2, которая рассматривается в [7], можно найти в [10]. Например, каждая окружность в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, чья внутреность содержит начало координат $z = 0$ имеет бесконечную C_2-емкость и если $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, то $C_2(E) = 0$ тогда и только тогда если $C_2'(E) = 0$.

Дадим основные определения и сформулируем теоремы. Пусть μ есть мера в $\mathbb{R}^m$ $(m > 2)$; интеграл

$$u_\alpha^\mu(x) = \int_{|\xi|<\infty} |x-\xi|^{\alpha-m} d\mu(\xi) \qquad (x \in \mathbb{R}^m,\ 0 < \alpha < m)$$

называется потенциалом Рисса меры μ. Пусть μ есть мера в $\mathbb{D}^m$ $(m \ge 2)$; интеграл

$$u^\mu(x) = \int_{|\xi|<1} g(x,\xi) d\mu(\xi) \qquad (x \in \mathbb{D}^m)$$

называется потенциалом Грина меры μ.

Следуя Лелон-Ферран и Наим, которые определяют минимальную тонкость посредством некоторого соотношения типа критерия Винера (хотя и используя не емкости

а некоторые другие характеристики множеств), мы определим следующие два вида тонкости непосредственно в терминах соотношений типа критерия Винера.

Определение 1. *Множество $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \ge 2$ называется тонким в ∞ если для некоторого $1 < q < \infty$ и $E_n = E \cap \{x : q^n \le |x| < q^{n+1}\}$ выполнено соотношение*

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(\alpha-m)} C_\alpha(E_n) < \infty.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \ge 2$ называется тонким в точке $\xi \ne \infty$ если для некоторого $0 < q < 1$ и $E_n = E \cap \{x : q^{n+1} \le |x-\xi| < q^n\}$ выполнено соотношение (2). Множество $E \subset \mathbb{D}^m$ $(m \ge 2)$ называется тонким на границе Δ^m шара $\mathbb{D}^m$, если для некоторого $0 < q < 1$ и $E_n = E \cap \{x : q^{n+1} \le 1 - |x| < q^n\}$ выполнено соотношение

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(2-m)} C_g(E_n) < \infty.$$

Соотношение (2) с $\alpha = 2$ и $m \ge 3$ есть критерий Винера для иррегулярности точки в задаче Дирихле (для $m = 2$ этот критерий приводится в следующем параграфе). В определенной мере условие (3) относится к минимальной тонкости; в некоторых случаях, тонкость на границе Δ^m оказывается эквивалентной минимальной тонкости.

Для меры μ в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{D}^m$ мы рассматриваем множество Ω положительных функций ω (весовые функции или функции сравнения), отражающие рост μ на границе носителя S_μ. Класс Ω определяется следующим образом. Пусть $\xi \in \bar{\mathbb{R}}^m$ и μ есть мера в $\mathbb{R}^m$ (или $\mathbb{D}^m$); тогда $\Omega = \Omega_{\xi,\mu}$ (и $\Omega = \Omega_\mu$) есть множество всех монотонных положительных функций ω на $[1, +\infty)$ (на $[0,1)$) которые удовлетворяют таким условиям:

(1) если $\omega \in \Omega_{\xi,\mu}$, $\xi = \infty$, то

$$\int_{|x|>1} \frac{\omega(|x|)}{|x|^{m-\alpha}} d\mu(x) < \infty, \quad r^{\alpha-m}\omega(r) \downarrow, \quad \omega(r) \uparrow \quad r \in (1, +\infty)$$

(2) если $\omega \in \Omega_{\xi,\mu}$, $\xi \ne \infty$, то

$$\int_{|x-\xi|<1} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^{m-\alpha}} d\mu(x) < \infty, \quad r^{\alpha-m}\omega(r) \downarrow, \quad \omega(r) \uparrow \quad r \in (0,1)$$

(3) если $\omega \in \Omega_\mu$, то

$$\int_{|x|<1} \frac{\omega(|x|)}{(1-|x|)^{m-2}} d\mu(x) < \infty, \quad \frac{\omega(r)}{(1-r)^{m-2}} \downarrow, \ \frac{\omega(r)}{(1-r)^{m-1}} \uparrow \quad r \in (0,1).$$

Следуюшая теорема, которая есть один из наших основных результатов, содержит и уточняет некоторые известные теоремы в теории потенциала. Она касается как понятия тонкости в точке, так и тонкости на границе и имеет дело с потенциалами Грина и Рисса для $m \ge 3$. Логарифмический потенциал в $\mathbb{R}^2$ был исследован в [10]. Ниже для меры μ в $\mathbb{R}^m$ обозначается $\mu_0 = \mu(\mathbb{R}^m)$.

Теорема 1. *Пусть u_α^μ есть потенциал Рисса в $\mathbb{R}^m$ $(m > 2)$, $\xi \in \bar{\mathbb{R}}^m$, и $\omega \in \Omega_{\xi,\mu}$; тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\xi = \infty$, то существует тонкое в ∞ множество E такое что

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\notin E}} \omega(|x|)u^{\mu}_{\alpha}(x) = \lambda$$

где $\lambda = 0$ если $\mu_0 = +\infty$ и $\lambda = \mu_0$ если $\mu_0 \neq +\infty$;

(2) если $\xi \neq \infty$, то существует тонкое в ξ множество E такое что

$$\lim_{\substack{x\to\xi \\ x\notin E}} \omega(|x-\xi|)u^{\mu}_{\alpha}(x) = \lambda$$

где $\lambda = 0$ если $u^{\mu}_{\alpha}(\xi) = +\infty$ и $\lambda = u^{\mu}_{\alpha}(\xi)$ если $u^{\mu}_{\alpha}(\xi) \neq +\infty$.

(3) Пусть u^{μ} есть потенциал Грина в $\mathbb{D}^m$ $(m \geq 2)$ и $\omega \in \Omega_{\mu}$; тогда существует тонкое на Δ^m множество E такое что

$$\lim_{\substack{x\to\Delta^m \\ x\notin E}} \omega(|x|)u^{\mu}(x) = 0.$$

Тонкая топология введена А. Картаном в его статье о непрерывности потенциала Ньютона. Предыдущие теоремы могут быть перефомулированы в терминах тонкой топологии. В Теореме 1 пункт (2) следует из (1) в результате преобразования Кельвина. Для $\alpha = 2$ пункт (2) этой теоремы содержит теорему А. Картана о непрерывности потенциала Ньютона в тонкой топологии. Он также содержит теорему Брело, в свою очередь уточняющую теорему Альфорса-Хейнса о PL (Phragmén-Lindelöf) множествах. Теорема 1 улучшает результат Дени-Хеймана, результат Альфорса и Хейнса а также теорему Хеймана; она также дополняет некоторые теоремы Литтльвуда и Цудзи.

Уточнение этих классических результатов даваемое теоремой 1 касается роста потенциалов вне исключительных множеств E (но не 'размера' множества E – в [10] и главе 3 такое уточнение касается как 'размера' исключительного множества, так и роста потенциала или субгармонической функции). Тогда как в классической теории потенциала рассматривается рост потенциала относительно функций $h(r)$,

$$h(r) = r^{2-m} \quad (m \geq 3), \qquad h(r) = \ln 1/r \quad (m = 2) \tag{4}$$

($r > 0$ есть длина радиус-вектора) и относительно ядра Пуассона (1) (для понятия минимальная тонкости в $\mathbb{D}^m$), наши теоремы дают описание роста потенциала относительно весовых функций из классов Ω.

Следующая теорема касается радиальных пределов потенциалов. Ниже $D(x, r) = \{\xi \in \mathbb{R}^m : |x - \xi| < r\}$ есть m-мерный шар и для множества E и точки ξ обозначено:

$$b_{\infty}E = \cap_{0<r<\infty}\{\frac{x}{|x|} : x \in E \cap D^C(0, r)\} \qquad (E \subset \mathbb{R}^m)$$

$$b_{\xi}E = \cap_{0<r<1}\{\xi + \frac{x-\xi}{|x-\xi|} : x \in E \cap D^C(\xi, r)\} \qquad (E \subset \mathbb{R}^m,\ \xi \neq \infty)$$

$$b_{\infty}E = \cap_{0<r<1}\{\frac{x}{|x|} : x \in E \cap D^C(0, r)\} \qquad (E \subset \mathbb{D}^m).$$

Теорема 2. *Если $E \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ тонкое в ∞, то $C_{\alpha}(b_{\infty}E) = 0$; Если $E \subset \mathbb{D}^m$ $(m \geq 2)$ тонкое на Δ^m, то $C_2(b_{\infty}E) = 0$ и $C_2(b_{\xi}E) = 0$ для каждого $\xi \in \Delta^m$.*

Приведем определение минимальной тонкости: множество $E \subset \mathbb{D}^m$ называется минимально тонким в $\mathbb{D}^m$ если существует потенциал Грина в $\mathbb{D}^m$ который мажорирует ядро Пуассона (1) на E. Напротив, тонкость множества на Δ^m, которая определяется посредтвом критерия типа Винера, допускает простое описание в терминах роста потенциалов. Следующая теорема есть аналог одной теоремы Брело:

Теорема 3. *Множество $E \subset \mathbb{D}^m$, чье предельное множество находится на Δ^m, есть тонкое на Δ^m тогда и только тогда если существует нетривиальный потенциал Грина u^{μ} в $\mathbb{D}^m$ для которого выполняется соотношение*

$$\lim_{\substack{x\to\Delta^m \\ x\in E}} (1 - |x|)^{m-1}u^{\mu}(x) > 0. \tag{5}$$

2.2. **Оценки для δ-субгармонических функций.** Функция w называется δ- субгармонической в области из $\mathbb{R}^m$, если она может быть представлена в виде $w = u - v$ где u и v субгармоничны в этой области. Запись $w \in \Delta(\mathbb{R}^m)$ или $w \in \Delta(\mathbb{D}^m)$, $m \geq 2$ означает что w есть δ-субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{D}^m$, соответственно. Чтобы избежать осложнений в записи, мы предполагаем что u и v гармоничны в $x = 0$. Для функции $w = u - v$ которая δ-субгармонична в $\mathbb{D}^m_r = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < r\}$ обозначается

$$N(r, u) = \int_{\mathbb{D}^m_r} g(0, \xi, \mathbb{D}^m_r)d\mu(\xi)$$

где g есть функция Грина для $\mathbb{D}^m_r$ и μ есть мера Рисса для u. Для $w \in \Delta(\mathbb{R}^m)$ или $w \in \Delta(\mathbb{D}^m)$ обозначается:

$$m^+(r, w) = \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int_{\partial\mathbb{D}^m_r} w^+(x)d\sigma(x), \qquad m_+(r, w) = \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int_{\partial\mathbb{D}^m_r} w_+(x)d\sigma(x)$$

$$w^+(x) = max\{w(x), 0\}, \qquad w_+(x) = -\min\{w(x), 0\}$$

где c_m есть поверхностная мера единичной гиперсферы Δ^m, $d\sigma$ есть элемент поверхностной меры на $\partial\mathbb{D}^m_r$. Через $T(r, w)$ обозначается характеристика Неванлинны,

$$T(r, w) = m^+(r, w) + N(r, v) \quad (= m_+(r, w) + N(r, u) + w(0)).$$

Для простоты записи, вместо $T(r, w)$ мы используем $T_w(r) = T(r, w) - w(0)$.

Весовые функции (иногда их называем функциями сравнения) определяются следующим образом. Пусть $w = u - v$ есть δ-субграмоническая в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{D}^m$ и μ есть мера Рисса для u; класс $\Omega_w = \{\omega\}$ определяется как совокупность убывающих функций $\omega > 0$ на $(1, +\infty)$ или $(0, 1)$ (соответственно) которые удовлетворяют таким условиям:

(1) если $w \in \Delta(\mathbb{R}^m)$, то для $\omega \in \Omega_w$

$$\int_{|x|<\infty} \omega(|x|)d\mu(x) < \infty \quad \text{и} \quad \omega(r)T_w(r) = O(1) \quad (r \to \infty)$$

(2) если $w \in \Delta(\mathbb{D}^m)$, то для $\omega \in \Omega_w$

$$\int_{|x|<1} \omega(|x|)d\mu(x) < \infty \quad \text{и} \quad \frac{\omega(r)T_w(r)}{(1-r)^{m-1}} = O(1) \quad (r \to 1).$$

В оценках δ-субгармонических функций мы используем другой тип тонкости множества:

Определение 2. *Множество $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ называется *-тонким в ∞ если для некоторого $q > 1$ и $E_n = E \cap \{x : q^n \leq |x| < q^{n+1}\}$ выполнено соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_2(E_n) < \infty \tag{6}$$

*Множество $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ называется *-тонким в точке $\xi \neq \infty$ если для некоторого $0 < q < 1$ и $E_n = E \cap \{x : q^{n+1} \leq |x - \xi| < q^n\}$ выполнено соотношение (6). Множество $E \subset \mathbb{D}^m$, $m \geq 2$ называется *-тонким на Δ^m если для некоторого $0 < q < 1$ и $E_n = E \cap \{x : q^{n+1} \leq 1 - |x| < q^n\}$ выполнено соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_g(E_n) < \infty \tag{7}$$

После преобразования $x \to (x - \xi)^{-1}$ (где $x, \xi \in \mathbb{R}^2$), которое переводит ∞ в ξ, соотношение (6) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_2'(E_n) < \infty \tag{8}$$

где C_2' есть логарифмическая емкость и $E_n = E \cap \{x : q^{n+1} \leq |x - \xi| < q^n\}$ для некоторого $0 < q < 1$. Для сравнения, для ограниченных областей в $\mathbb{R}^2$ критерий Винера для иррегулярности точки в задаче Дирихле имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_2'(E_n) < \infty \tag{9}$$

где E_n те же, что и в (8).

Следующая теорема предоставляет нам нижние оценки для δ-субгармонических в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{D}^m$ функций. Теорема формулируется посредством весовых функций ω, которые связаны с неванлинновкой характеристикой заданного w. Исключительные множества в этих оценках описываются в терминах *-тонкости. Другие такие теоремы, имеющие дело с *-полутонкими множествами и мероморфными функциями, имеются в [7, 10].

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения:*

*(1) Пусть $m \geq 2$, $w \in \Delta(\mathbb{R}^m)$ и $\omega \in \Omega_w$. Тогда существует *-тонкое в ∞ открытое множество $E \subset \mathbb{R}^m$ такое что*

$$\liminf_{\substack{x \to \infty \\ x \notin E}} \omega(|x|)w(x) > -\infty.$$

*(2) Пусть $m \geq 2$, $w \in \Delta(\mathbb{D}^m)$, и $\omega \in \Omega_w$. Тогда существует *-тонкое на Δ^m открытое множество $E \subset \mathbb{D}^m$ такое что*

$$\liminf_{\substack{x \to \Delta^m \\ x \notin E}} \omega(|x|)w(x) > -\infty.$$

Следующая теорема есть аналог теоремы 2 и касается радиальных пределов δ-субгармонических функций.

Теорема 5. *Если $E \subset \mathbb{R}^m$ $(m > 2)$ есть *-тонкое в ∞, то $\lim_{r \to \infty} C_2(b^r E) = 0$ и если $E \subset \mathbb{D}^m$ $(m \geq 2)$ есть *-тонкое в Δ^m, то $C_2(b_\infty) = 0$.*

Приведем формулировки цитированных выше теоремы единственности Мергеляна и Шагиняна.

Теорема 6. *(С. Н. Мергелян). Пусть $\Omega = \{(x, y, z) : z < 0\}$ есть полупространство в $\mathbb{R}^3$, U есть гармоническая функция в Ω с непрерывной в $\bar{\Omega}$ производной первого порядка и*

$$M(r) = \sup_{x^2 + y^2 < r^2} \{|U(x, y, 0)|, |\frac{\partial_z U(x, y, 0)}{\partial z}|\}.$$

Тогда если для некоторого $\rho > 2$ выполнено $M(r) \leq e^{-1/r^\rho}$, то $U \equiv 0$.

Теорема 7. *(А. Л. Шагинян). Пусть $p(t)$ есть непрерывная функция на $(0, 1)$, $p(t)$ возрастает к $+\infty$ при $t \to 1 - 0$, и пусть Γ есть непрерывная кривая в диске $U = (|z| < 1)$ с концом на границе ∂U. Если F есть ограниченная аналитическая функция в U и*

$$(1 - |z|) \ln |F(z)| \leq -p(|z|), \qquad z \in \Gamma$$

то $F \equiv 0$.

Следующая теорема, которая есть непосредственное следствие теоремы 4, есть 'субгармоническая версия' этих теорем Мергеляна и Шагиняна для ограниченных гармонических и аналитических функций. 'Размер' множества вдоль которого могут убывать нетривиальные аналитические функции с ограниченной неванлинновской характеристикой (функции ограниченного вида) с экстремальной скоростью, здесь оценивается точно. Теорема 8 усиливает цитированную выше теорему А. Л. Шагиняна. Теоремы типа теоремы Шагиняна для некоторых подклассов **N**, рассмотренных М. М. Джрбашяном, были получены В. С. Захаряном где также используются весовые функции. Эти теоремы Шагиняна и Мергеляна изучались и уточнялись в работах Ванга, Готье, В. И. Гаврилова, Рао, Г. М. Айрапетяна, и других.

Теорема 8. *Пусть w есть δ-субгармоническая в $\mathbb{D}^m$, $m \geq 2$, функция, $T_w(r) = O(1)$, и множество $E \subset \mathbb{D}^m$ такое что $C_g(E) = \infty$. Тогда условие*

$$\lim_{\substack{|x| \to 1-0 \\ x \in E}} (1 - |x|)^{m-1} w(x) = -\infty \tag{10}$$

влечет что $w = -\infty$.

Пример ядра Пуассона $w(x) = P_\xi(x)$ из (1), где $x \in \mathbb{D}^m$ и $\xi \in \Delta^m$, показывает (отметим что $T_w(r) \equiv 0$) что скорость убывания (10) есть точная когда E находится в области Штольца с вершиной в ξ. Можно доказать что $C_g(\Delta^m) = \infty$ для каждого $m \geq 2$. Можно также показать что для прозвольного треугольника E из $\mathbb{D}^3$ с вершиной на Δ^3 мы имеем $C_g(E) = \infty$.

2.3. **Оценки для функций аналитических в плоскости и круге.** В этом параграфе мы формулируем две теоремы из [5] касающиеся функций мероморфных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и диске $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Мы имеем целью дополнить диссертации автора. Эти теоремы оценивают мероморфные функции F посредством весовых функций $\omega \in \Omega_{(F)}$ (– это есть Ω_w с $w = \ln|F|$).

Теорема 9. *Пусть F есть нетривиальная функция мероморфная в $\mathbb{D}$ и $\omega \in \Omega_F$. Тогда существует множество $E \subset \mathbb{D}$ с такими свойствами:*

(1) E имеет вид $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, где L_n удовлетворяют соотношениям

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} m_n = 1, \qquad \frac{1-m_n}{1-M_n} \le const < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} C_g(L_n) < \infty$$

(здесь, $m_n = \inf\{|x| : x \in L_n\}$ и $M_n = \sup\{|x| : x \in L_n\}$).

(2) каждое L_n имеет вид $L_n = \bigcup_{i=1}^{p_n} L_{n,i}$ (для некоторых $1 \le p_n < \infty$), где каждое $L_{n,i}$ есть открытое связное множество такое, что для некоторых $z_{n,i} \in L_{n,i}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{p_n} \omega(|z_{n,i}|) < \infty$$

(3) для $z \in \mathbb{D} \setminus E$ функция F оценивается как

$$\liminf_{\substack{|z|\to\infty \\ z\notin E}} \omega(|z|)\ln|F(z)| > -\infty.$$

Следующая теорема касается вопроса о том как можно охарактеризовать убывание нетривиальных мероморфных функций на исключительных множествах E из Теоремы 9. Оценка даваемая теоремой 9 является точной по меньшей мере для функций ограниченного вида. Принято обозначение $||F||_e = \sup\{|F(z)| : z \in e\}$.

Теорема 10. *Пусть F есть нетривиальная функция мероморфная в диске $\mathbb{D}$ и $\omega \in \Omega_F$. Пусть $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ есть множество определенное в Теореме 9, $z_n \in L_n$ произвольны, и $e \subset E$ такое что каждая его порция имеет ненулевую емкость. Тогда выполнено соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_g(e \cap L_n)\omega(|z_n|)\ln(||F||_{e\cap L_n})^{-1} < \infty.$$

Эти результаты могут быть использованы для получения теорем единственности такого типа, когда заключение $F \equiv 0$ выводится из предположения о сильном убывании F на дискретном множестве сходящемся к границе области (статьи Лаврентьева, Хавинсона, Хеймана, Эссена и Эйдермана; в кандидатской диссертации автора теорема единственности Хавинсона выводится из наших оценок).

3. Тонкая топология и субгармонические функции нулевого порядка

3.1. функции нулевого порядка. В этом параграфе формулируется теорема об асимптотическом росте δ-субгармонической (субгармонической) в $\mathbb{R}^m$ функции порядка нуль относительно ее неванлинновской характеристики $T(r)$ (максимального значения $B(r)$ на сферах радиусом r, соответственно). Теорема справедлива при условии выполнения некоторого неравенства между дефектами функции. Отдельно рассматриваются медленно растущие в $\mathbb{R}^2$ функции.

3.1.1. *Формулировка результатов.* Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется полутонким (в ∞) если для некоторого $q > 1$ и $E_n = E \cap \{x : q^n \le |x| < q^{n+1}\}$ выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} q^{n(2-m)} C_m(E_n) = 0.$$

Множество $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ имеет плотность 1, если $p_n \sim n$ где p_n есть количество элементов Λ которые не превосходят n. Множество $e \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *-полутонким если существует такое $\Lambda \subset \mathbb{N}$ плотности 1, что для некоторого $q > 1$ имеет место

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} q^{n(2-m)} C_m(E_n) = 0.$$

Дополнения к полутонким в $\mathbb{R}^m$ множествам составляют некоторый фильтр F_m, дополнения к *-полутонким в $\mathbb{R}^m$ множествам образуют некоторый фильтр F_m^*. Мы рассматриваем δ-субгармонические функции u ($u = v - w$ где v и w гармонические) нулевого порядка, т.е., когда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln T(r)}{\ln r} = 0.$$

Обозначаем (ниже, ν-мера Рисса w, μ-мера Рисса v, δ и Δ есть дефекты в смысле Неванлинны и Валирона, соответственно)

$$\delta = \delta(u) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_\nu(r)}{T(r)}, \quad \Delta = \Delta(u) = 1 - \liminf_{r\to\infty} \frac{N_\nu(r)}{T(r)}$$

$$B(r) = \max\{u(\xi) : |\xi| = r\}, \quad d = d(u) = 1 - \liminf_{r\to\infty} \frac{N_\nu(r)}{B(r)}.$$

Говорим что функция φ есть медленно растущая, если $\varphi(2r) \sim \varphi(r)$ при $r \to +\infty$.

Теорема 11. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Пусть u есть δ-субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция порядка нуль и $\Delta < \delta$. Тогда

$$(12) \qquad \liminf_{F_m^*} \frac{u(x)}{T(|x|)} \ge \delta - \Delta.$$

2. Пусть u есть субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция порядка нуль и $d < 1$. Тогда

$$(13) \qquad \liminf_{F_m^*} \frac{u(x)}{B(|x|)} \ge 1 - d.$$

3. Пусть u есть δ-субгармоническая в $\mathbb{R}^2$ функция и T есть медленно растущая функция. Тогда выполнено соотношение (12) с $m = 2$ и где F_2^* заменено на F_2.

4. Пусть u есть субгармоническая в $\mathbb{R}^2$ функция и B есть медленно растущая функция. Тогда выполнено (13) с $m = 2$ и где F_2^* заменено на F_2.

Следствие 1. *Пусть f есть мероморфная в $\mathbb{R}^2$ функция нулевого порядка и $\delta_f(\infty) > 0$. Тогда выполнено*

$$(14) \qquad \liminf_{F_2^*} \frac{\ln|f(x)|}{T_f(|x|)} \ge \delta_f(\infty)$$

и если T есть медленно растущая, то в (14) вместо F_2^* может быть записано F_2.

Следствие 2. *Пусть f есть целая функция в $\mathbb{R}^2$ и T_f есть медленно растущая. Тогда имеем*
$$\lim_{F_2} \frac{\ln|f(x)|}{\ln M_f(|x|)} = 1.$$

Пусть $\Gamma = \{x(r) : r \geq 0\}$ есть спрямляемая кривая в плоскости $\mathbb{R}^2$; $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{q,\Lambda} = \{x(r) : r \in \bigcup_{n\in\Lambda}[q^n, q^{n+1})\}$ где $q > 1$ и $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ есть множество плотности 1, называем $*$-кривой. Говорим что Γ (или $\hat{\Gamma}$) сходится к лучу $S_\theta = \{re^{i\theta} : r > 0\}$ если для каждого угла P содержащего S_θ существует $\rho > 0$ такое, что $x(r) \in P$ для $r > \rho$.

Следствие 3. *Пусть f есть мероморфная функция в $\mathbb{R}^2$ порядка нуль и для некоторого $a \in \mathbb{R}^2$ имеем $\delta_f(a) > 0$. Тогда для каждого $\theta \in [0, 2\pi]$ существует спрямляемая $*$-дуга $\hat{\Gamma}$ сходящаяся к лучу S_θ и такая что $f(x) \to a$ при $x \to \infty$ и $x \in \hat{\Gamma}$. Если T_f есть медленно растущая, то для каждого $\theta \in [0, 2\pi]$ существует спрямляемая дуга Γ сходящаяся к лучу S_θ такая что $f(x) \to a$ при $x \to \infty$ и $x \in \Gamma$.*

Следствие 3 дополняет теоремы Андерсона, Гольдберга, Еременко, Аракеляна и Тер-Исраеляна о дефектных значениях мероморфных в плоскости функций.

3.2. Рост малых δ-субгармонических функций в комплексной плоскости.

3.2.1. *Введение.* Рассматривается асимптотическое поведение частных
$$\frac{w(x)}{T(|x|)} \quad \text{и} \quad \frac{u(x)}{B(|x|)}$$
где w есть разность двух функций субгармонических в комплексной плоскости $\mathbf{C} = \{|x| < \infty\}$, u субгармонична в $\mathbf{C}$, $T(r)$ есть неванлинновская характеристическая функция для w, и $B(r) = \max_{0\leq\phi\leq 2\pi} u(re^{i\phi})$.

Наши результаты справедливы для функций порядка нуль. Оценки для $u(x)/B(|x|)$ были получены Литтльвудом, Виманом, Хейманом, Валироном, и другими. Основная проблема - это получение наиболее точного описания исключительных множеств, с необходимостью возникающих в такого рода оценках. В метрической формулировке проблемы такого типа для мероморфных функций рассматривались Куботой. Наши статьи [7, 10] развивают оригинальный метод Кубота и содержат улучшение некоторых результатов Хеймана, Литтльвуда, Боаса и других.

В субгармоническом случае описание исключительных множеств имеется в работах Эссена и Эйдермана, Хеймана и Хьюбера и в наших работах [7, 10]. Новым аспектом в этом параграфе являются функции сравнения ω вводимые для оценивания 'размера' исключительных множеств и введение ω-тонких множеств обобщающих понятие тонкого множества. Функции ω зависят от T и B характеризующих рост w и u.

3.2.2. *Некоторые определения.* Мы рассматриваем модифицированную логарифмическую емкость $\gamma(e)$ ($\equiv C_2(e)$), определенную для подмножеств e из $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Далее предполагается, что $w = u - v$ где u и v субгармоничны в $\mathbb{C}$, μ есть мера Рисса для u, ν есть мера Рисса для v и T есть характеристика Неванлинны.

Пусть ω есть положительная монотонная (растущая или убывающая) функция определенная на $(1, \infty)$ и пусть обозначено $a^\dagger = \min\{1, a\}$. Если $q > 1$ есть заданное число, мы рассматриваем множества $e \subset \mathbb{C}_0$ для которых выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(q^n)\gamma^\dagger(e_n) < \infty \quad \text{где} \quad e_n = e \cap \{q^n \leq |x| \leq q^{n+1}\}. \tag{15}$$

Такие e называем ω-тонкими множествами.

3.3. **Основные результаты.** Сформулируем некоторые результаты из раздела 3.2 диссертации. В определенном смысле они обобщают или дополняют цитированные выше известные результаты.

Теорема 12. *Пусть w есть δ-субгармоническая функция и для некоторой монотонной ω выполнено*
$$\int_{|x|<\infty} \frac{\omega(|x|)}{T(|x|)} d\mu(x) < \infty.$$
Тогда для произвольного числа θ из $(0, 1)$ существует ω-тонкое множество e такое что
$$\liminf_{x\to\infty,\ x\notin e} \frac{w(x)}{T(|x|)} \geq \theta\delta(w) - \theta^{-1}\Delta(w).$$

Теорема 13. *Пусть u есть субгармоническая функция и для некоторой монотонной ω выполнено*
$$\int_{|x|<\infty} \frac{\omega(|x|)}{B(|x|)} d\mu(x) < \infty.$$
Тогда для произвольного числа θ из $(0, 1)$ существует ω-тонкое множество $e = e_\theta$ такое что
$$\liminf_{x\to\infty,\ x\notin e} \frac{u(x)}{B(|x|)} \geq 1 - \theta^{-1}d(u).$$

В следующем следствии 4 мы рассматриваем логарифмический потенциал в $\mathbb{C}$,
$$u(x) = u_\mu(x) = \int_{\mathbf{C}} \ln|x - \zeta| d\mu(\zeta).$$

Следствие 4. *Если u ($= u_\mu$) есть логарифмический потенциал и $u_\mu(0) \neq \infty$ то существуют множества $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ такие, что для $x \to \infty$, $x \notin e^{(1)}$ выполнено*
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\gamma(e_n^{(1)}) < \infty \quad \text{и} \quad u(x) = n_\mu(|x|)\ln|x| + o(n_\mu(|x|)\ln|x|)$$
и $e^{(2)}$ есть тонкое в бесконечности, и при $x \to \infty$, $x \notin e^{(2)}$ выполнено
$$u(x) = n_\mu(|x|)\ln|x| + O(1). \tag{16}$$

Следствие 5 и теоремы 12–13 могут быть переформулированы в терминах тонкой топологии или сходимости по фильтрам. В частности, эти результаты содержат аналог теоремы А. Картана о непрерывности потенциала Ньютона в тонкой топологии для

4.1. Дискретные емкости, лавины, и моделирование памяти.

4.1.1. *Введение.* Рассматриваемые нами в этой главе емкости есть дискретные варианты классической слабой емкости Фугледе-Шоке. Фактически мы имеем дело с версией задачи Тьюринга-Смейла об осцилляторных биологических сетях, но где теперь привлечены понятия теории потенциала и теории информации. Формулировка нашей основной теоремы 17 содержит понятие дискретной емкости и формально напоминает некоторые результаты теории потенциала (например, теоремы об устранимых особенностях).

Дадим описание нашей задачи, где предлагается механизм оперирования памяти в некоторых динамических сетях. Мы рассматривем ротаторные сети (rotator networks, RN) введенные в [13, 14, 15] и характеризуемые как ротаторная модель самоорганизованной критичности (self-organized criticality, SOC). Концепция SOC возникла в статистической физике в работах Бака, Танга, и Вайсенфелда и касается теории динамических сетей состоящих из большого числа взаимодействующих пороговых микросистем. Понятие лавины, т.е. события почти одновременного достижения порогов в микросистемах, есть центральное понятие в этой теории.

4.1.2. *Некоторые определения. Емкость для кластеров.*

Пусть X есть конечное множество, $2^X = \{S : S \subseteq X\}$ есть множество его подмножеств. Элементы X называются вершинами; $|S|$ означает количество элементов (мощность) S и предполагается что $|X| \geq 2$. Пусть $\sigma : X \to 2^X$ есть отображение приписывающее каждому $x \in X$ непустое подмножество $\sigma(x) \subseteq X$, $x \notin \sigma(x)$. Эта σ задает топологию или отношение соседства на X: элементы $\sigma(x)$ понимаются как соседи для x. Кластер определяется как конечное об'единение связных множеств.

Определение 3. *Пусть $S \subseteq X$ есть кластер и (S_0, S_1) есть его разбиение на два подмножества S_0 и S_1: $S_0 \cup S_1 = S$, $S_0 \cap S_1 = \emptyset$, $S_0 \neq \emptyset$ такое что каждая связная компонента S содержит по меньшей мере одну вершину из S_0 и для каждой вершины из S_0 все ее соседи которые принадлежат S, находятся в S_1. Такое рзбиение называем раскраской для S (например, вершины из S_0 раскрашены в красный цвет а вершины из S_1 в синий). Обозначим $\mu(S) = \max\{|S_0| : (S_0, S_1)$ есть раскраска $S\}$; раскраска (S_0, S_1) называется максимальной, если $|S_0| = \mu(S)$.*

Для максимальных раскрасок компонента S_0 обладает некоторым 'minimax' свойством – это есть наиболее плотное множество (для каждого $x \in S$ имеется сосед принадлежащий S_0) среди разреженных подмножеств S (S_0 не содержит никаких двух соседних вершин). Мы используем величину $C_K(S)$ где $K \subseteq X$ есть заданный кластер и $S \subseteq X$ произвольно. Т.к. она определяется через μ, чьи 'minimax', субаддитивность, и другие свойства (например, если предположить что в раскрасках S красные вершины положительно заряжены а синие нейтральны, $\mu(S)$ может быть интерпретировано как некое равновесное распределение заряда на S) близки к понятиям теории потенциала, мы называем C_K дискретной емкостью.

Определение 4. *Пусть $K, S \subseteq X$ есть кластеры на X. Величина*

$$C_K(S) = |K \setminus S| - (\mu(K) - \mu(K \cap S)) \tag{17}$$

называется дискретной емкостью для S относительно K.

Замечание 1. *Для произвольных кластеров $K, S \subseteq X$ имеем: (1) $0 \leq C_K(S) \leq |K| - \mu(K)$; (2) если $K \subseteq S$ то $C_K(S) = 0$; (3) если $S \cap K = \emptyset$ то $C_K(S) = |K| - \mu(K)$; (4) если $S \subseteq K$ то оба случая $C_K(S) = 0$ и $C_K(S) > 0$ возможны (нарушение монотонности по включению – это отличает C_K от таких мер как об'емы или классические емкости).*

Сети и лавины.

Динамические сети которые мы рассматриваем состоят из слабо взаимодействующих фазовых ротаторов (phase-shifting rotator, PSR). Такой ротатор есть возмущенный равномерный ротатор, т.е. частица P вращающаяся на C с постоянной угловой скоростью $\omega \neq 0$; предполагается, что скорость частицы остается постоянной при вомущении (возмущение есть δ-толчок) – это отличает PSR от ротатора Чирикова-Тэйлора рассматриваемого в теории детерминированного хаоса. Взаимодействие в сети такое: в момент когда вращающаяся на C частица P пересекает порог ρ, она передает δ-толчок каждому своему соседу; δ-толчок полученный частицей вызывает ее дополнительное мгновенное вращение на угол α (не изменяя направление вращения).

В следующем определении мы отождествляем PSR с его орбитой; ниже, $\mathbb{N}$ есть натуральный ряд, $\mathbb{Z}$ совокупность целых чисел, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ есть мнимая единица, $\mathbf{C} = \{\frac{1}{2\pi}e^{\mathrm{i}\Phi} : 0 \leq \Phi \leq 2\pi\}$ – это окружность единичной длины с ценром в $z = 0$, и $h(t)$ есть функция Хэвисайда: $h = 0$ для $t \leq 0$ и $h = 1$ для других t.

Определение 5. *Пусть α положительное число, $\omega \neq 0$, $t_n > 0$ таковы что $t_{n+1} - t_n > \eta$ для некоторого $\eta > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$, и $k_n \in \mathbb{N}$ ограничена. Пусть для $\omega > 0$ $L(t)$ определена как*

$$L(t) = \omega\, t + \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} k_n h(t - t_n) \tag{18}$$

(если $\omega < 0$, то '+' заменяется на '−') где $t > 0$ есть временная переменная. Отображение

$$R:\ t \to (2\pi)^{-1} \exp(\mathrm{i}\ L(t)) \tag{19}$$

называется фазовым ротатором (PSR) на $\mathbf{C}$. Временные ряды $R^{(in)} = \{t_n : n \geq 1\}$ и $R^{(out)} = \{\tau_n : R(\tau_n) = \rho\}$ определяют вход и выход ротатора R.

Коэффициент α в (18) (постояннная взаимодействия) понимается как интенсивность отдельного δ-толчка, k_n есть кратность δ-толчка в момент t_n. Если $\alpha = 0$ то R в (19) есть комплексный экспоненциал (в физике – гармонический осциллятор).

Дадим формальное определение RN-сети и лавины. На X задана топология (так называемая геопространственная или сетевая топология) – отображение σ назначающее отношение соседства на X. Рассматриваем совокупность ротаторов $\mathcal{R} = \{R_x, \ldots, R_X\}$

где R_i есть PSR на окружности C_i радиусом $r_i > 0$, P_i есть частица вращающаяся на C_i с угловой скоростью ω_i, и ρ_i есть пороговая метка на C_i. Без потери общности мы предполагаем что $X = E_N$ где $E_N = [1, 2, \dots, N]$ есть сегмент первых N членов натурального ряда.

Определение 6. *Совокупность ротаторов $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ заданных на E_N называется ротаторной сетью (rotator network, RN), если R_i обладают общей постоянной взаимодействия α. Говорим что в i-ой вершине из E_N в момент t происходит простое событие, если P_i пересекает порог ρ_i на C_i в течение временного интервала $[t, t+\tau)$. Совокупность всех простых событий случающихся в один и тот же момент называется лавиной.*

4.1.3. *Лавинная память.* Мы рассматриваем RN-сети $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ где (приписанный к x_i) R_i есть PSR на окружности C_i радиусом $r_i > 0$, P_i есть вращающаяся на C_i частица с угловой скоростью ω_i, и $\rho_i \in C_i$ есть пороговая метка. Следующие предположения делают возможным получение аналитических результатов. Линейные скорости $v_1, \dots, v_N$ ($v_i = \omega_i r_i$) частиц P_i предполагаются $\mathbb{Z}$-независимыми (для произвольных $h_i \in \mathbb{Z}$ соотношение $\sum_{i=1}^{N} h_i v_i = 0$ влечет что все h_i есть нули) и α не эквивалентна какому-либо из отношений v_i/v_j (число a эквивалентно b, т.е. $a \sim b$, если $a = \dfrac{h_1 + h_2 b}{h_3 + h_4 b}$ для некоторых $h_1, \dots, h_4 \in \mathbb{Z}$). Мы положим

$$\beta = \frac{\max\{\omega_i : 1 \le i \le N\}}{\min\{\omega_i : 1 \le i \le N\}} - 1, \quad \omega = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \omega_i, \quad \theta = \omega\tau$$

и предполагаем что $\alpha + \beta + \theta$ и α/θ достаточно малы (мы не уточняем верхние грани).

Рассматривается три типа RN: интерактивная RN (IRN), где частица на каждой вершине X взаимодействует со всеми соседними, неинтерактивная RN (NRN), где взаимодействие между частицами отсутствует, и частично интерактивная RN (PRN), где имеются частицы обеих видов. NRN рассматривается как 'чистая память' (где не имеется запоминания). Отметим статью [15] об интерактивных сетях, где в частности доказана эквивалентность двух гипотез – о комбинаторном перечислении кластеров (Делест, Вьенно, и др.) и о распределении лавин в различных моделях самоорганизованной критичности (Бак, Дхар, Деррида, и др.).

Определение 7. *Для сети $\mathcal{R}$ на X пусть $I(\mathcal{R})$ обозначает совокупность всех взаимодействующих вершин на X (например, $\mathcal{R}$ есть IRN если $I(\mathcal{R}) = X$ и есть NRN если $I(\mathcal{R}) = \emptyset$). Для кластера $K \subseteq X$ сеть для которой $I(\mathcal{R}) = K$, обозначается $\mathcal{R}(K)$.*

Для определения лавинной памяти (avalanche memory, AM) $\mathcal{M}_{K,\mathcal{S}}$ кластера K (относительно заданной совокупности кластеров $\mathcal{S}$ на X) рассматриваем следующую задачу распознавания: для заданной NRN-сети построить PRN-сеть, чьи лавины идентифицируют заданный кластер среди кластеров из $\mathcal{S}$. В теории Хопфилда нейронных сетей для этой цели вводится понятие энергии кластера. Вместо энергии мы используем энтропию кластеров. Для включения этого понятия мы базируемся на следующей

теореме утверждающей что лавинный процесс в сети задает нетривиальные вероятности на кластерах (ниже, mes есть мера Лебега):

Теорема 14. *Пусть $\mathcal{R}$ есть RN-сеть на X и $S \subseteq X$ есть кластер. Тогда существует предел*

$$\pi_S = \lim_{T\to\infty} \frac{mes\,(e(S,T))}{T} \qquad \left(\text{и} \quad \lim_{\substack{\theta\to 0\\ \alpha/\theta\to 0}} \pi_S = 0\right) \tag{20}$$

где $e(S,T)$ есть совокупность всех моментов $1 \le t \le T$ в каждый из которых случается некоторая лавина на S ($e(S,T)$ есть об'единение некоторых интервалов).

Далее кластер $K \subset X$ задан и мы рассматриваем сети $\mathcal{R}(K)$ (Определение 7). Мы подчеркиваем зависимость сети от ее параметров, записывая $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha,\theta}$. Для определения задаваемой процессом лавин энтропии кластеров, мы рассматриваем функцию энтропии Шеннона $h(p) = p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)$, $0 < p < 1$. Определим энтропию H кластера S относительно сети $\mathcal{R}_{\alpha,\theta}$ как

$$H(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; S) = h(\pi_S) \tag{21}$$

где π_S есть частота (20) из Теоремы 14. Вместо π_S мы используем относительные вероятности $\pi_S^* = \theta^{-|S|}\pi_S$ (– для достаточно малых θ и α/θ имеем $0 \le \pi_S^* \le 1$), и вместо H в (21) мы используем ее модификацию H^*,

$$H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; S) = h(\pi_S^*). \tag{22}$$

Следующая теорема дает явное выражение емкости C_K через энтропию H^*:

Теорема 15. *Пусть K и S есть кластеры на X. Тогда выполнено соотношение*

$$C_K(S) = \lim_{\substack{\theta\to 0\\ \alpha/\theta\to 0}} \frac{\ln \dfrac{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; K)}{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; S)}}{\ln \dfrac{\alpha}{\theta}} \tag{23}$$

где $\mathcal{R}_{\alpha,\theta} = \mathcal{R}_{\alpha,\theta}(K)$.

Следующая теорема 16 об'ясняет наше определение AM-памяти – это Определение требует чтобы элементы E памяти $\mathcal{M}_{K,\mathcal{S}}$ обладали таким свойством: посредством варьирования параметров сети $\mathcal{R}(K)$ энтропия H^* кластеров E может быть сделана в прозвольное число раз меньше чем энтропия H^* любого другого кластера S из $\mathcal{S}$.

Теорема 16. *Пусть $K \subseteq X$ есть кластер и $\mathcal{R}_{\alpha,\theta} = \mathcal{R}_{\alpha,\theta}(K)$. Для каждого кластера $S \subseteq X$ существует предел*

$$L = \lim_{\substack{\theta\to 0\\ \alpha/\theta\to 0}} \frac{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; K)}{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; S)} \tag{24}$$

и $L = 0$, если $C_K(S) > 0$ и $L > 0$, если $C_K(S) = 0$.

Следующая теорема дает аналитическое описание AM-памяти кластеров K в терминах емкости C_K:

Теорема 17. *Пусть S есть совокупность кластеров на X и $K, E \in S$. Тогда $E \in \mathcal{M}_{K,S}$ тогда и только тогда если*

$$C_K(E) = 0. \tag{25}$$

Так как $C_K(K) = 0$, условие (25) означает ограничение на точность восстановления K посредством лавин.

4.2. Декомпозиция отображения вращения окружности.

4.2.1. *Введение.* В этом разделе главы 4 доказано орбитальное самоподобие отображения вращения окружности и обсуждаются некоторые следствия. Сформулируем задачу. Пусть ω есть иррациональное число, $C = \{z : |z| = r\}$ окружность радиусом $r > 0$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ есть мнимая единица. Пусть

$$T_{\omega,C} : z \to e^{2\pi \mathrm{i}\omega} z, \qquad z \in C \tag{26}$$

есть отображение вращения (с частотой ω) окружности C и $z_n = re^{2\pi\mathrm{i}(\omega n+\varphi)}$, где $n = 1, 2, \ldots$ и φ есть действительное число, есть орбита (последовательные итерации). Пусть $\mu \geq 1$ есть целое и $L_1, \ldots, L_\mu$ есть совокупность попарно не пересекающихся дуг на C. Т.к. ω иррационально, то по теореме Якоби орбита z_n плотна на C и следовательно, для каждого $1 \leq i \leq \mu$ существует бесконечное множество $N_i = \{n_k^{(i)} : k = 1, 2, \ldots\}$ возрастающих индексов $n_k^{(i)}$ таких, что все $z_k^{(i)} = z_{n_k^{(i)}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ находятся на L_i. Мы доказываем что для заданного ω существуют произвольно большие μ и некоторое множество μ дуг L_i так, что после линейного перемасштабирования аргумента каждая i-ая последовательность $z_n^{(i)}$ на C преобразуется в некоторую орбиту отображения вращения с другой частотой θ_i на другой окружности C_i. Т.о., мы доказываем что заданное отображение (26) индуцирует совокупность других таких отображений

$$T_{\theta_i, C_i} : z \to e^{2\pi\mathrm{i}\theta_i} z, \qquad z \in C_i.$$

Мы следовательно утверждаем что отображение вращения есть динамический фрактал – вращение в дискретном времени повторяет свою динамику на меньших фрагментах временной области (возможно с другими параметрами). Параметры, которыми мы интересуемся в этой модели декомпозиции, есть число μ индуцированных отображений, индуцированные частоты θ_i, радиусы r_i, и мера исключительного множества $E = C \setminus \bigcup_{i=1}^{\mu} L_i$.

4.2.2. *Некоторые определения и непрерывная дробь.* Далее $\mathbb{R}$ означает действительную числовую ось, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, и $\mathbb{C}$ означают натуральный ряд, совокупность целых чисел, и комплексную плоскость, соответственно. Для $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ и $\{x\}$ обозначают целую и дробную части числа x, $\{x\} = x - [x]$. Используем обозначение $\Omega = \{0 < x < 1/2 : x$ иррационально$\}$. Лебегова мера множества $e \subset \mathbb{R}$ обозначается $mes(e)$. Если множества e_i попарно не пересекаются, их об'единение обозначается $\sum_i e_i$. Для отображения T (и $n \geq 1$) T^n означает n-ую итерацию T. Итерации $T^n_{\omega,C}$ пропорциональны гармоническому осциллятору (комплексному экспоненциалу), $T^n_{\omega,C} = conste^{2\pi\mathrm{i}(\omega n+\varphi)}$

рассмотренному в дискретные моменты времени $t \in \mathbb{N}$. По этой причине мы называем ω частотой отображения $T_{\omega,C}$.

Определение 8. *Пусть C есть окружность, $T : C \to C$ есть отображение с орбитой $z_n = T^n z$ $(z \in C, n \geq 1$; предполагается $T^0 z \equiv z)$ плотной на C. Для дуги $L \subseteq C$ рассматриваем монотонное отображение $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ определенное как: $\xi(1) = \min\{i \geq 0 : T^i z \in L\}$ и $\xi(k+1) = \min\{i > \xi(k) : T^i z \in L\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Отображение $F : L \to L$ определенное как $Fz = T^{\xi(1)} z$ называется отображением индуцированным T на L и обозначается $T|_L$. Множество $\{\xi(i) : i \geq 1\}$ называется временной областью (time domain, TD), а ξ называется нумерующей функцией.*

В следующих теоремах плотность множества $e \subseteq \mathbb{N}$ есть (где $|.|$ есть мощность множества)

$$dens(e) = \lim_{p\to\infty} p^{-1} |\{k \in e : 1 \leq k \leq p\}|. \tag{27}$$

Модифицированная непрерывная дробь.

Мы используем модифицированную непрерывную дробь – мы рассматриваем отображение $\Psi : [0, 1/2] \to [0, 1/2]$ определенное как: $\Psi(0) = 0$ и $\Psi x = \min(\{1/x\}, 1 - \{1/x\})$ где $x \neq 0$ и для $0 < x < 1/2$ мы рассматриваем разложение

$$x = \frac{1|}{|a_1} + \frac{\varepsilon_1|}{|a_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_{k-1}|}{|a_k} + \cdots \tag{28}$$

где коэффициенты $a_k = a_k(x)$ и $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x)$ определены как

$$a_k = \begin{cases} [1/\Psi^{k-1}], & \{1/\Psi^{k-1}\} \leq 1/2 \\ [1/\Psi^{k-1}] + 1, & \{1/\Psi^{k-1}\} > 1/2 \end{cases}, \quad \varepsilon_k = \begin{cases} 1, & \{1/\Psi^{k-1}\} \leq 1/2 \\ \text{-}1, & \{1/\Psi^{k-1}\} > 1/2 \end{cases}$$

и где Ψ^k $(= \Psi^k x)$ есть k-ая итерация Ψ. Такие дроби были введены Перроном; их эргодические свойства были изучены в [12, 16, 17]. Вместо (28) мы записываем

$$x = [a_1, a_2, \ldots; \rho_1, \rho_2, \ldots] \tag{29}$$

где $\rho_k = 0$ если $\varepsilon_k = -1$ и $\rho_k = 1$ если $\varepsilon_k = 1$.

Мы рассматриваем n-ые частные для разложения (28):

$$\frac{1|}{|a_1} + \frac{\varepsilon_1|}{|a_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n-1}|}{|a_n} = \frac{p_n}{q_n} \qquad (n \geq 1) \tag{30}$$

и для натуральных $a_1, \ldots, a_n$ $(a_i \geq 2)$ и бинарных $\rho_1, \ldots, \rho_n$ $(\rho_i \in \{0, 1\})$ определим так называемый фундаментальный сегмент ранга $n \geq 1$,

$$\Delta = \{\omega \in \Omega : a_i(\omega) = a_i, \rho_i(\omega) = \rho_i;\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{31}$$

Для $\omega \in \Omega$ рассматриваем произведения итераций D_k,

$$D_0 = 1, \qquad D_k = \prod_{m=0}^{k-1} \Psi^m \omega, \qquad D_k^* = \begin{cases} D_{k+1}, & \rho_k = 1 \\ D_k - D_{k+1}, & \rho_k = 0. \end{cases}$$

4.2.3. *Формулировка результатов. Декомпозиция окружности на равные части.*

Следующая теорема 18 (в диссертации дана также более общая версия этой теоремы) утверждает что для заданного $\omega \in \Omega$ и натурального $p \geq 1$ существует число $1 \leq \mu_p < \infty$ такое что каждая орбита отображения вращения $T_{\omega,C}$ окружности C индуцирует μ_p вращений с одинаковыми частотами θ_p на попарно не пересекающихся дугах $L_i \subset C$ одинаковой длины b_p. Получены формулы для числа μ_p индуцированных вращений, их частот θ_p, длин b_p, и меры исключительного множества $E_p = C \setminus \bigcup_{i=1}^{\mu_p} L_i$. Декомпозиция отображения T в совокупность отображений T_i понимается как орбитальная декомпозиция – каждая орбита T состоит из об'единения попарно непересекающихся орбит отображений T_i.

Для $\omega \in \Omega$ рассматриваем натуральные $\mu_i = \mu_i(\omega)$ и $\mu_i^* = \mu_i^*(\omega)$: задаем значения $\mu_1 = [D_0/D_1]$ и $\mu_1^* = 1$ и затем полагаем (где $D_i = D_i(\omega)$, $D_i^* = D_i^*(\omega)$, и $\rho_i = \rho_i(\omega)$):

$$\mu_{i+1} = \mu_i\left[\frac{D_{i-1}}{D_i}\right] + \mu_i^*\left[\frac{D_{i-1}^*}{D_i}\right], \qquad \mu_{i+1}^* = \mu_i + \mu_i^*(1-\rho_i) \qquad (i \geq 1). \tag{32}$$

Теорема 18. *Пусть C есть единичная окружность с центром в $z = 0$, $\omega \in \Omega$, $z \in C$, $z_n = T_{\omega,C}^n z$ $(n \geq 1)$ есть орбита отображения $T_{\omega,C}$, и $\mu_p = \mu_p(\omega)$ и $\mu_p^* = \mu_p^*(\omega)$ построены согласно (32). Тогда для каждого $p \geq 1$ существует разбиение C на μ_p попарно непересекающихся ориентированных дуг L_i $(= L_i^{(p)})$ одинаковых длин b_p и некоторого множество E_p, а также существует разбиение $\mathbb{N}$ на попарно непересекающиеся бесконечные компоненты N_i $(= N_i^{(p)})$ и некоторого множество e_p,*

$$C = \sum_{i=1}^{\mu_p} L_i + E_p, \qquad \mathbb{N} = \sum_{i=1}^{\mu_p} N_i + e_p \tag{33}$$

такое что для каждого $1 \leq i \leq \mu_p$ множество N_i есть TD для $T_{\omega,C}|L_i$, и аргументы $A_{i,n} = arg(z_{\xi_i(n)})$ где ξ_i есть нумерующая функция для N_i имеет вид

$$A_{i,n} = a_i + b_p\{\alpha_i + \beta_p\, n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{34}$$

Здесь a_i и α_i действительные числа, b_p и β_p равны $b_p = D_p(\omega)$, $\beta_p = \Psi^p\omega$ и для плотностей N_i и e_p а также для мер $U_p = C \setminus E_p$ и E_p выполнены соотношения:

$$dens(N_i) = D_p(\omega), \quad mes(U_p) = \mu_p(\omega)D_p(\omega), \quad mes(E_p) = dens(e_p) = \mu_p^*(\omega)D_p^*(\omega).$$

Пусть C есть единичная окружность, $L \subseteq C$ есть дуга (и $|L|$ есть ее длина) и $C_{|L|}$ есть окружность длины $|L|$. В следствии 5 рассматривается линейное перемасштабирование аргумента на C посредством отображения $R_\alpha : z \to \alpha z^{\frac{2\pi}{\alpha}}$ $(0 < \alpha < 2\pi)$ – оно перемасштабирует аргумент точки на C, а $R_{|L|}$ отображает L на $C_{|L|}$.

Следствие 5. *При условиях Теоремы 18 для каждого $z \in C$ существует $z' \in C_{|L|}$ такое, что выполнено соотношение*

$$R_{|L|}(\{T_{\omega,C}^n z : n \geq 1\} \cap L) = \{T_{\theta,C_{|L|}}^n z' : n \geq 1\}$$

где обозначено $L = L_i$ $(1 \leq i \leq \mu_p)$ и $\theta = \beta_p = \Psi^p\omega$.

Можно оценить рост количества μ_p индуцированных окружностей C_i $(= C_{|L_i|})$ из Следствия 5 и их радиусы $r_i = r_p = b_p/2\pi$ для почти всех ω – согласно следующей теореме в обеих случаях зависимость от p экспоненциальна:

Теорема 19. *Существует постоянная $\gamma > 0$ такая что для почти всех $\omega \in \Omega$ выполнены соотношения*

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} \ln \mu_p = \gamma, \qquad \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} \ln r_p = -\gamma.$$

Здесь постоянная γ есть

$$\gamma = \frac{Li_2(\frac{3-\sqrt{5}}{4}) - Li_2(\frac{1-\sqrt{5}}{4})}{\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \qquad (= 1.016\ldots)$$

где Li_2 есть дилогарифм Эйлера,

$$Li_2(x) = \int_0^x \frac{1}{t} \ln \frac{1}{1-t} dt \qquad (= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}).$$

Следствие 6. *Для исключительных множеств E_p и e_p из теоремы 18 имеем: для почти всех $\omega \in \Omega$ выполнено*

$$\lim_{p\to\infty} mes(E_p) = 0, \qquad \lim_{p\to\infty} dens(e_p) = 0. \tag{35}$$

Следующая теорема предоставляет нам другой тип метрических оценок для меры и плотности исключительних множеств E_p и e_p из теоремы 18.

Теорема 20. *При условиях теоремы 18 для почти всех $\omega \in \Omega$ и произвольного $\varepsilon > 0$ для исключительных множеств E_p и e_p выполнены следующие соотношения*

$$mes(E_p) \approx \frac{\{1/\Psi^p\omega\}}{a_p}, \quad \lim_{p\to\infty} mes(\{\omega : k_p a_p mes(E_p) \leq \varepsilon\}) = \nu([0,\varepsilon]) \tag{36}$$

$$dens(e_p) \approx \frac{\{1/\Psi^p\omega\}}{a_p}, \quad \lim_{p\to\infty} dens(\{\omega : k_p a_p dens(e_p) \leq \varepsilon\}) = \nu([0,\varepsilon]) \tag{37}$$

где $1/2 \leq k_p \leq 2$ есть некоторые коэффициенты.

Тригонометрическая система и разложение Фурье.

Следующее следствие 7 устанавливает поточечную масштабную инвариантность классической тригонометрической системы $\{e^{2\pi i t k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ на единичной окружности. Это есть переформулировка теоремы 18 и следствия 5 для случая системы

$$S(\omega) = \{e^{2\pi i\omega k} : k \in \mathbb{Z}\} \tag{38}$$

которая есть тригонометрическая система, рассмотренная в момент ω (ниже, $M_\alpha : z \to z^{\frac{2\pi}{\alpha}}$ для $0 < \alpha < 2\pi$).

Следствие 7. *Пусть $\omega \in [0,1]$ иррационально, $S(\omega)$ есть система (38), μ_p построена согласно (32), и $\vartheta_p(\omega) = \beta_p$ есть коэффициент в (34). Тогда для каждого $p \geq 1$*

существует разбиение единичной окружности C на μ_p попарно не пересекающихся дуг $L_i = L_i^{(p)}$ одинаковой длины D_p и одинаковой ориентации $\delta_p(\omega)$ и множество E_p,

$$C = \sum_{i=1}^{\mu_p} L_i + E_p$$

такое, что для некоторых $0 \le \varphi_i \le 2\pi$ выполнены соотношения

$$M_\alpha(S(\omega) \cap L_i) = e^{\mathrm{i}\varphi_i} S(\vartheta_p(\omega)) \qquad (1 \le i \le \mu_p) \tag{39}$$

где $\alpha = 1/D_p$ и исключительное множество E_p удовлетворяет (35), (36) и (37).

Следующая теорема 21 касается разложения Фурье и утверждает что заданный сигнал может быть сдвинут во времени если исключить редкое множество его высших гармоник. Пусть $F(\omega)$ есть 1-периодическая на $(-\infty, +\infty)$ функция и

$$F(\omega) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi \mathrm{i} \omega k} \qquad (a_{-k} = \bar{a}_k) \tag{40}$$

есть ее разложение Фурье. Мы обозначим через $a_k = a_k(F)$ коэффициенты Фурье и через $P_F = \{a_k(F) : k \in \mathbb{Z}\}$ спектр мощности F. Назовем множество $\{k \in \mathbb{N} : a_k(F) \neq 0\}$ носителем F, обозначим его $supp(F)$, и рассмотрим его плотность (как в (27)). Рассматриваем функции F для которых каждый под-ряд разложения в (40)

$$F_\xi(\omega) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{\xi(k)} e^{2\pi \mathrm{i} \omega \xi(k)} \tag{41}$$

сходится; здесь $\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ есть (произвольное) отображение определенное следующим образом: сначала рассматриваем монотонное отображение $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и затем полагаем $\xi(-k) = -\xi(k)$. Например, если $\int_0^{2\pi} |F(\omega)|^2 d\omega < \infty$, то ряды (41) сходится. Теорема 21 утверждает что каждая периодическая функция F (сигнал) для которой ряды (41) сходятся, может быть представлена (локально, в малой окрестности заданного ω) как сдвинутая по фазе аппроксимация к F плюс некоторая 'исключительная' функция, носитель которой может иметь сколь угодно малую плотность.

Теорема 21. *Пусть $F(\omega)$ есть 1-периодическая функция заданная на $(-\infty, +\infty)$ для которой ряды (41) сходятся. Тогда для каждого иррационального $\omega \in [0, 1]$ и заданного $p \ge 1$ существует открытый сегмент Δ содержащий ω и некоторые функции F_p и f_p определенные на $[0, 1]$ такие, что для почти всех $\theta \in \Delta$ функция F может быть представлена в виде*

$$F(\theta) = F_p(\vartheta_p(\theta)) + f_p(\theta)$$

где F_p и f_p таковы что $P_F = P_{F_p} \cup P_{f_p}$ и $|a_k(F)| = |a_k(F_p)|$ для каждого $k \in supp(F_p)$, и плотность множества $e_p = supp\,(f_p)$ удовлетворяет соотношениям (35) и (37).

4.3. Минимальная алгебра Ли, тонкие пределы, и динамические системы

4.3.1. *Введение.* Этот раздел главы 4 касается предложенного в [18, 19, 20, 21, 23] разностного анализа который есть метод анализа временных рядов и орбит дискретных динамических систем. Такой анализ базируется на рассмотрении высших абсолютных разностей взятых от последовательных членов орбиты. Разностный метод мотивирован тем что некоторые естественные системы (наример, visual cortex) обрабатывают информацию содержащуюся именно в разностной структуре заданного сигнала.

В параграфе 4.3.2 дается краткое описание разностного анализа и вводится минимальная абстрактная алгебра Ли, в рамках которой разностный анализ получает дальнейшее развитие. Параграф 4.3.3 касается топологического аспекта предложенной алгебры – следуя классической теории потенциала мы вводим некое условие типа критерия Винера в вероятностной теории потенциала и на этой основе рассматриваем тонкие пределы. В параграфах 4.3.4 и 4.3.5 рассматриваются применения предложенной алгебры к случайным переменным и отображениям Бернулли.

4.3.2. *Разностный анализ и минимальная алгебра Ли.* Мы дадим краткое описание разностного анализа и предлагаемой минимальной алгебры. Мы особо отмечаем что разностные орбиты многих систем сводятся к простейшему виду бинарных последовательностей.

Разностный анализ.

В разностном анализе мы разбиваем заданную орбиту на две компоненты которые затем рассматриваются независимо. S-компонента отражает чередование в монотонности (возрастание-убывание) высших разностей заданной орбиты, тогда как H-компонента состоит из этих разностей. На каждом шаге (который ассоциируется с порядком m разностей) такого разбиения, начальная орбита может быть полностью восстановлена по первым m членам и S- и H-компонентам.

Дадим формальные определения. Пусть

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \qquad (0 \le x_n \le 1)$$

есть бесконечная числовая последовательность – это может быть некий временной ряд или орбита дискретной динамической системы. Мы рассматриваем абсолютные разности m-го порядка: $H_n^{(0)} = x_n$, $H_n^{(m+1)} = |H_{n+1}^{(m)} - H_n^{(m)}|$ $(m \ge 0, n \ge 1)$ и определяем m-ую разностную последовательность $H^{(m)} = (H_n^{(m)})_{n=1}^\infty$; также, полагаем

$$S_m = (\delta_1^{(m)}, \delta_2^{(m)}, \ldots, \delta_n^{(m)}, \ldots), \quad \text{где} \quad \delta_n^{(m)} = \begin{cases} 1, & H_{n+1}^{(m)} \ge H_n^{(m)} \\ 0, & H_{n+1}^{(m)} < H_n^{(m)}. \end{cases}$$

S_m и $H^{(m)}$ называются (m-ой) S- и H-компонентами X (обозначаем также $H^{(m)} = H_X^{(m)}$). Вместо S_m можно рассматривать числовую последовательность $(\nu_m)_{m=1}^\infty$, $0 \le \nu_m \le 1$ где $\nu_m = 0.\delta_1^{(m)}\delta_2^{(m)}\ldots$. Таким образом каждому временному ряду (орбите) X мы ставим в соответствие два других – его S- и H-компоненты. S-компонента заданного ряда $X = (x_n)_{n=1}^\infty$ состоит из бинарных последовательностей S_n. Можно показать что для произвольного ограниченного X его H-компонента также содержит сколь угодно длинные бинарные последовательности. Т.е., изучение данного ряда во многом сводится к рассмотрению минимального случая бинарных последовательностей.

Минимальная алгебра Ли.

Бинарная операция взятия абсолютной разности двух бинарных переменных $\xi \oplus \eta = |\xi - \eta|$ удовлетворяет соотношению $\xi \oplus \xi = 0$; обобщая этот факт, мы рассматриваем абстрактные группы и минимальные алгебры Ли. Пусть X есть абстрактное множество на котором задана бинрная алгебраическая операция которую обозначаем $[x, y]$. Предполагается, что эта операция удовлетворяет соотношениям:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z], \quad [x,y] = [y,x], \quad [x,0] = x, \quad [x,x] = 0 \tag{42}$$

т.е., мы имеем абстрактную коммутативную группу G на X. Для бинарных $\alpha \in \{0,1\}$ и $x \in X$ определим умножение: $\alpha x = 0$ если $\alpha = 0$ и $\alpha x = x$ если $\alpha = 1$. В силу последнего соотношения в (42), которое есть одно из основных соотношений общих алгебр Ли, группы (42) с таким бинарным умножением мы называем минимальными алгебрами Ли. Распространим бинарную скобку $[x_1, x_2]$ на n-арную версию $[x_1, \ldots, x_n]$: если для некоторого $n \geq 3$ скобка $[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ определена, то мы полагаем

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], [x_2, \ldots, x_n]].$$

Это n-арное соотношение может быть выражено посредством бинарной версии $\mathcal{P}$ треугольника Паскаля биномиальных коэффициентов,

$$\mathcal{P} = <\alpha_{i,k}>_{i,k} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n; \ k = 0, 1, \ldots, \infty)$$

где $\alpha_{i,k} \in \{0,1\}$ и k-ая строка ($k \geq 1$) $\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{k,k}$ треугольника $\mathcal{P}$ определяется рекуррентно, $\alpha_{0,k} = \alpha_{k,k} = 1$ и $\alpha_{i,k} = |\alpha_{i-1,k-1} - \alpha_{i,k-1}|$ $(1 \leq i \leq k-1)$.

Предполагаем что на X задан функционал $\mu : X \to \mathbb{R}$ такой что $\mu([x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i} \mu(x_i)$ и посредством μ задаем топологию на X, а именно, $x_n \to x$ (x_n сходится к x при $n \to \infty$) если $\mu(x_n) \to \mu(x)$. Т.о., G есть топологическая группа.

4.3.3. *Случайные независимые бинарные процессы.* В этом параграфе рассматривается минимальная алгебра состоящая из попарно независимых бинарных случайных переменных $\xi \in \{0,1\}$. Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ есть дискретный независимый (переменные ξ_n попарно независимы) процесс где ξ_n принимают бинарные значения 0 и 1 с положительными вероятностями. Для бинарных случайных переменных $\xi, \eta \in X$ мы рассматриваем случайную переменную $\xi \oplus \eta$, чье распределение вероятностей совпадает с распределением разности $|\xi - \eta|$. Переменные $\xi_n^{(k)} = \xi_{n+1}^{(k-1)} \oplus \xi_n^{(k-1)}$ (где $k \geq 1$ и $\xi_n^{(0)} = \xi_n$) также принимают бинарные значения с положительными вероятностями и следовательно можно рассматривать случайный разностный процесс $\boldsymbol{\xi}^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}, \ldots)$. Мы зададим вероятности в виде $P(\xi = \lambda) = \frac{1}{2}(1 \pm \pi)$ где $\lambda \in \{0,1\}$ и $\pi \in (0,1)$ (используем обозначение $\pi = \pi(\xi)$). Тогда $\mu(\xi) = -\ln \pi(\xi)$ есть функционал рассмотренного типа:

Теорема 22. *Для $n, k \geq 1$ выполнены соотношения*

$$\xi_n^{(k)} = [\xi_n, \ldots, \xi_{n+k}], \quad \ln \pi([\xi_n, \ldots, \xi_{n+k}]) = \sum_{0 \leq i \leq k} \alpha_{i,k} \ln \pi(\xi_{n+i})$$

4.3.4. *Тонкие пределы в минимальных алгебрах.* Мы интересуемся топологическим аспектом предложенной алгебры – мы рассматриваем бесконечные последовательности и их пределы. В теории потенциала критерий Винера применяется для исследования пределов потенциалов (например, теорема А. Картана о тонкой непрерывности потенциала Ньютона). Следуя этому, мы определяем условие типа критерия Винера и рассматриваем соответствующий предельный переход. С целью определения предельного процесса, мы назначаем некоторые тонкие подмножества ($\mathfrak{F}$-множества) натурального ряда $\mathbb{N}$ и рассматриваем соответствующие тонкие пределы ($\mathfrak{F}$-lim). Мы используем терминологию теории потенциала (тонкие множества и пределы) в силу формального сходства соотношения (44) с критерием Винера в вероятностной теории потенциала.

Рассматриваем бинарные коды чисел $k \in \mathbb{N}$ – это есть вектор $(s_0, s_1, \ldots, s_{p-1})$ с бинарными компонентами $s_i \in \{0,1\}$ для которого $k = \sum_{i=0}^{p} s_i 2^i$ и $s_p = 1$. Пусть $w(k) = \sum_{i=0}^{p-1} s_i$ есть число единиц (вес) кода k. Для $e \subset \mathbb{N}$ определяем

$$\mathcal{C}(e) = \sum_{k \in e} w(k) \tag{43}$$

и называем $\mathcal{C}(e)$ емкостью e. Для $E \subseteq \mathbb{N}$ обозначим $E_n = E \cap \{k \in \mathbb{N} : 2^n \leq k < 2^{n+1}\}$.

Определение 9. *Множество $E \subset \mathbb{N}$ называем тонким множеством ($\mathfrak{F}$-множество) если выполнено соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathcal{C}(E_n) < \infty \tag{44}$$

Бесконечную последовательность $x_n \in X$ нзываем $\mathfrak{F}$-сходящейся к x,

$$\mathfrak{F}\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \ \textit{если имеется } \mathfrak{F}\textit{-множество } E \textit{ такое что } \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \in \mathbb{N}\setminus E}} \mu(x_n) = \mu(x). \tag{45}$$

Емкость $\mathcal{C}$ есть аддитивная функция множества на подмножествах $[2^n, 2^{n+1})$ и $\mathcal{C}([2^n, 2^{n+1})) = 2^n$. Рассматриваем множества $B_n(s) = \{2^n \leq k < 2^{n+1} : w(k) \leq s\}$ где $0 \leq s \leq n$. Т.к. для некоторых случаев $\mathcal{C}(B_n(s)) \leq const.\mathcal{C}(\partial B_n(s))$ (если n велико и s мало), что есть характеристическое свойство классических емкостей, мы называем $\mathcal{C}$ емкостью. Из (43) следует что емкость $\mathcal{C}$ связана с несколькими понятиями теории информации. А именно, идентифицируем число $k \in [2^n, 2^{n+1})$ с вершиной $(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$ (бинарный код k) n-мерного куба $[0,1]^n$. Если $(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$ и $(s'_0, s'_1, \ldots, s'_{n-1})$ есть коды k и k', то расстояние Хэмминга между k and k' есть количество таких i для которых $s_i \neq s'_i$. Согласно (43) емкость $\mathcal{C}$ для $B_n(s)$ равна сумме биномиальных коэффициентов: $\sigma(n,s) = \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}$. Мощность шара $B_n(s)$ (об'ем Хэмминга) также равна $\sigma(n,s)$; эта σ совпадает также с другими величинами в теории кодирования упомянутыми в следующем Замечании. В следующей формулировке $V_H(e)$ есть об'ем Хэмминга e, b_H есть граница Хэмминга в теории кодирования ($b_H(n,s)$ есть верхняя граница для размера бинарного кода длины n исправляющего s ошибок), и

$H(x) = x\log_2 x + (1-x)\log_2(1-x)$ есть функция энтропии Шэннона (предполагается что в (46) $s/n < 1/2$).

Замечание 2. *Множество $B_n(s)$ есть шар радиуса s в метрике Хэмминга (шар Хэмминга) с центром 2^n и выполнены соотношения*

$$(46) \qquad \mathcal{C}(B_n(s)) = V_H(B_n(s)) = 2^n(b_H(n,s))^{-1} = 2^{nH(s/n)+o(n)}$$

В частности, множество $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(s_n)$ есть $\mathfrak{F}$-множество тогда и только тогда если

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_H(n,s_n))^{-1} < \infty.$$

Можно показать что существуют $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(s_n)$ где s_n сходится к ∞ такие что E есть $\mathfrak{F}$-множество. Следовательно, каждое такое E с ограниченными сверху s_n есть $\mathfrak{F}$-множество. Т.о. имеется сходство с метрическими задачами о покрытиях шарами классических тонких множеств (см., например, [9]). В этой связи сформулируем другой результат метрического характера, Теорему 21, полученную в [18, 21]. Для $x \in [0,1]$ рассмотрим бесконечное разложения в двоичную дробь $x = 0.x_1, x_2, \ldots$ и пусть для $k \geq 2$ E_k есть множество таких $x \in [0,1]$ для которых каждый сегмент $x_i, \ldots, x_{i+k}$ этого разложения содержит оба бинарных символа 0 и 1. Справедлива также q-адическая версия этой теоремы [18, 21].

Теорема 23. *Для каждого $k \geq 2$ размерность Хаусдорфа $D(E_k)$ множества E_k удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\sum_{n=1}^{k} 2^{-nD(E_k)} = 1.$$

Определение 10. *Пусть $G = G(X,[,],\mu)$ задано, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_n \in X$ есть бесконечная последовательность, $x_n^{(k)} = [x_n, \ldots, x_{n+k}]$, и x_n^{∞} есть $\mathfrak{F}$-предел последовательности $x_n^{(k)}$ при $k \to \infty$. Последовательность $\boldsymbol{x}^{\infty} = (x_1^{\infty}, x_2^{\infty}, \ldots)$ называется предельной разностной последовательностью для $\boldsymbol{x}$.*

Теорема 24. *Если ξ есть одинаково распределенный бинарный процесс (испытания Бернулли), то ξ^{∞} есть симметричный одинаково распределенный процесс.*

Следующая теорема имеет топологический характер – в применениях она касается консервативных систем а также об'ясняет возникновение Канторовой структуры в аттракторах диссипативных систем (в качестве примера см. Теорему 27):

Теорема 25. *Пусть $x_n \in X$ есть бесконечная последовательность и $z_n = [x_1, \ldots, x_n]$. Если $\mu(x_n) = const.$ то ω-предельное множество последовательности $\mu(z_n)$ есть счетное замкнутое множество. Если $\mu(x_n)$ монотонно сходится к нулю, то ω-предельное множество для $\mu(z_n)$ есть нетривиальное совершенное множество.*

4.3.5. *Применения к динамическим системам.* В предыдущем параграфе мы имели дело с алгеброй случайных переменных. Здесь рассматриваются два других примера минимальной алгебры Ли. Мы определим преобразование разностного сдвига и рассмотрим отображения Бернулли.

Отображение разностного сдвига.

Пусть $X = [0,1]$ и операция '$\dagger$' определена следующим образом: если $a = 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ и $b = 0.\delta_1\delta_2\ldots$ (бинарные разложения), то $a\dagger b = 0.\varepsilon_1 \oplus \delta_1, \varepsilon_2 \oplus \delta_2 \ldots$. Эта 'экзотическая' арифметика распространяется для $a, b \in \mathbb{R}$, например, имеем $4\dagger 3 = 7$, $5\dagger 1 = 4$, $5\dagger 3 = 6$, $6\dagger 3 = 5$, $6\dagger 5 = 3$. Т.о. определяется коммутативная группа $(\mathbb{R}, \dagger)$ с арифметикой '$\dagger$' которая не изоморфна стандартной аддитивной группе $(\mathbb{R}, +)$ системы действительных чисел. В следующей Теореме 26 рассматривается именно такая группа $G = ([0,1], \dagger)$.

Определение 11. *Пусть $T: X \to X$ есть отображение. Отображение $\hat{T}: X \to X$ определенное как $\hat{T}x = [x, Tx]$ называем сопряженным к T. Отображение T называем коммутативным, если $T\hat{T} = \hat{T}T$.*

Мы рассматриваем сдвиг Бернулли B и отображение M, оба заданы на сегменте $[0,1]$. В бинарной записи они задаются как

$$(47) \quad B: \ 0.\omega_1\omega_2\ldots \to 0.\omega_2\omega_3\ldots, \qquad M: \ 0.\omega_1\omega_2\ldots \to 0.(\omega_1 \oplus \omega_2)(\omega_2 \oplus \omega_3)\ldots.$$

График отображения M есть фрактальная буква "M"(см. [18, 21]).

Теорема 26. *Выполнены соотношения $\hat{B} = M$, $\hat{M} = B$, $BM = MB$ (и следовательно, оба отображения B и M взаимно-сопряжены и коммутативны).*

Следствие 8. *Для $x \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$(48) \qquad [x, Bx, \ldots, B^n x] = M^n x, \qquad [x, Mx, \ldots, M^n x] = B^n x$$

Используя (48) и применяя эргодическую теорему Биркгофа к отображениям B и M, получаем сходимость средних для разностных серий $H^{(m)}$ обоих отображений:

Следствие 9. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для п.в. $x \in [0,1]$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + H_B(x) + H_B^{(2)}(x) + \cdots + H_B^{(n)}(x)}{n} = C$$

и это соотношение остается в силе если B заменить на M.

Топологическая энтропия $h(T)$ отображения $T: [0,1] \to [0,1]$ характеризует способность T преобразовывать заданный сегмент в совокупность меньших сегментов (мы не приводим строгого определения). Из наших теорем и одной леммы Боуена следует:

Следствие 10. *Топологическая энтропия сдвига M положительна, $h(M) > 0$.*

Отображения Бернулли.

Мы обозначаем $\Omega = [0,1]$, $X = 2^{\Omega}$ и для $A, B \in X$ определим скобку $[A, B] = A \vartriangle B$ где $\vartriangle$ означает симметрическую разность: $A \vartriangle B = (A \setminus B)\bigcup(B \setminus A)$. Эта скобка удовлетворяет соотношениям (42) и следовательно, определяется минимальная алгебра Ли G на X. Пусть $\mathfrak{m}$ есть положительная борелевская мера на Ω. Отображение $T:[0,1]\to[0,1]$ называется отображением Бернулли если для каждого измеримого $A\subseteq[0,1]$ выполнено соотношение $\mathfrak{m}(A\cap TA)=\mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(TA)$. Ниже, для отображения T и $A\subseteq\Omega$ множество $E_A(T)$ означает ω-предельное множество последовательности $\mathfrak{m}(T^nA)$ и A_T^∞ означает следующий тонкий предел

$$A_T^\infty=\mathfrak{F}\text{-}\lim_{k\to\infty}[A,\ TA,\ \ldots,\ T^nA].$$

Теорема 27. *Пусть T есть отображение Бернулли на $(\Omega,\mathfrak{m})$ и $A\subseteq\Omega$ есть множество положительной меры, $\mathfrak{m}(A)>0$. Если для каждого $n\geq 1$ $\mathfrak{m}(T^nA)=\mathfrak{m}(A)$ то $E_A(T)$ есть дискретное счетное замкнутое множество на сегменте $[0,1]$ и $\mathfrak{m}(A_T^\infty)=1$. Если $\mathfrak{m}(T^nA)$ монотонно убывает к нулю, то $E_A(T)$ есть нетривиальное совершенное множество на $[0,1]$ и $\mathfrak{m}(A_T^\infty)=0$.*

5. Заключительные выводы

В данной диссертации рассмотрены некоторые проблемы классической теории потенциала, теории функций, и теории дискретных динамических систем при изучении которых с необходимостью возникают исключительные множества. В теории потенциала эти множества называются тонкими множествами и составляют тонкую топологию. Такие множества, которые часто характеризуются условиями типа критерия Винера в задаче Дирихле, возникают в различных оценках субгармонических и мероморфных функций. Полученные в главах 2 и 3 диссертации оценки улучшают или дополняют ряд классических и хорошо известных результатов. В главе 4 рассмотрены применения методов теории потенциала в случаях когда малые исключительные множества возникают при изучении динамических сетей и дискретных динамических систем. Исключительные множества характеризуются посредством дискретных емкостей и условием типа критерия Винера в вероятностной теории потенциала.

Глава 2 диссертации (глава 1 содержит Введение) относится к классической теории потенциала и теории мероморфных функций. Получены оценки для потенциалов Рисса и Грина и для δ- субгармонических функций. Эти оценки справедливы вне некоторых исключительных множеств описываемых в терминах емкости. Формулировки даны в терминах весовых функций которые отражают рост борелевской меры определяющей заданный потенциал; для субгармонического случая весовые функции относятся к мерам Рисса и неванлинновской характеристике заданной функции. Исключительные множества удовлетворяют некоторым соотношениям типа критерия Винера. Мы доказываем субгармоническую версию теорем единственности Мергеляна и Шагиняна. Более того, нами получены результаты касательно экстремального убывания функций на исключительных множествах.

В главе 3 доказана теорема об асимптотическом росте δ-субгармонических (и субгармонических) в $\mathbb{R}^m$ функций нулевого порядка относительно неванлинновской характеристики $T(r)$ (относительно максимума модуля $B(r)$ на сферах радиусом r, соответственно). Теорема справедлива при условии выполнения некоторых неравенств между дефектами функции. Отдельно рассматриваются функции в $\mathbb{R}^2$ с медленно растущей неванлинновской характеристикой. В этой главе к получению оценок роста функций привлечены различного рода дефекты функции, что устанавливает связи таких оценок с теорией распределения значений функций. Введены функции сравнения ω для оценивания 'размера' исключительных множеств и рассмотрены ω-тонкие множества, обобщающие понятие тонкого множества.

Глава 4 состоит из трех (сравнительно самостоятельных) разделов и касается применения методов теории потенциала к динамическим сетям и дискретным динамическим системам. Оба вида расматриваемых в этой главе дискретных емкостей есть дискретные аналоги классической слабой емкости Фугледе-Шоке. В разделе 4.1 вводится дискретная емкость для кластеров и в этих терминах решается задача о моделировании памяти в ротаторных сетях. Рассматриваются исключительные множества и используя методы теории потенциала определяется и изучается математическую модель памяти в сетях состоящих из возмущенных гармонических осцилляторов. Кроме введения и изучения памяти лавинного типа, методами использованными в этой главе доказана эквивалентность двух различных гипотез в статистической физике. Раздел 4.2 продолжает изучение ротаторов (именно на их основе конструируются изучаемые в разделе 4.1 сети). Рассмотрена задача об орбитальной декомпозиции преобразования вращения окружности и соответствующие исключительные множества точно оценены (метрические оценки). Основные результаты главы устанавливают орбитальное самоподобие преобразования вращения окружности и наличие скейлинга в тригонометрической системе. Раздел 4.3 касается метода анализа дискретных динамических систем основанном на рассмотрении высшей разностной структуры орбит системы. Дается описание разностного анализа. Показывается что и здесь условия типа критерия Винера вместе с минимальной алгеброй Ли являются наиболее подходящим средством для построения аксиоматического базиса для абстрактной версии разностного анализа дискретных динамических систем. Введены тонкие множества и в этих терминах изучены отображения сдвига Бернулли, разностного сдвига, и их аттракторов.

Методы развитые в настоящей диссертации позволяют улучшить и дополнить ряд хорошо известных результатов об оценках субгармонических функций и предоставляют новые возможности для дальнейшего описания поведения функций на исключительных (в такого рода оценках) множествах. Другой особенностью применяемых методов является то что они допускают адаптацию общих методов теории потенциала к исследованиям в теории дискретных динамических сетей и систем.

Список литературы

1. А. Ю. Шахвердян, Гиперболическая емкость и убывание функций мероморфных в круге, *Доклады Акад. Наук Арм. ССР*, **66**, 2 (1978) 76-79.
2. А. Ю. Шахвердян, Гармонические функции непрерывные на особом множестве емкости нуль, Акад. Наук Арм. ССР, Известия, серия Математика, **13**, 2 (1978) 100-106
3. А. Ю. Шахвердян, Убывание ограниченных функций аналитических в круге, Акад. Наук Арм. ССР, Известия, серия Математика, **14**, 3 (1979) 157-167
4. А. Ю. Шахвердян, Гиперболическая емкость и скорость убывания функций мероморфных в круге, *Доклады Акад. Наук Арм. ССР*, **68**, 2 (1979) 88-94.

5. А. Ю. Шахвердян, К теоремам А. Л. Шагиняна о предельном убывании мероморфных функций, *Доклады Акад. Наук Арм. ССР*, **70**, 5 (1980) 266-273.
6. А. Ю. Шахвердян, Условия типа критеря Винера и оценки для потенциалов и субгармонических функций, *Доклады Акад Наук Арм. ССР*, **76**, 1 (1983) 3-7
7. А. Ю. Шахвердян, Об асимптотическом росте δ-субгармонических функций порядка нуль, *Сибирский Матем. Журнал*, **28**, 2 (1987) 201-210
8. A. Yu. Shahverdian and N. Z. Akopov, Numerical determination of fractal and entropy characteristics of the seismic process on the territory of Armenia, Fractals, **1**, 1 (1993) 594-600
9. A. Yu. Shahverdian, Fine topology and estimates for potentials and subharmonic functions, *Computational Methods and Function Theory*, **11**, 1 (2011) 71-121
10. A. Yu. Shahverdian, M. Essén, and G. S. Hovannesian, Fine topology and estimates for subharmonic functions in complex plane, *New Zealand J. Math.*, **29**, 1 (2000) 73-90.
11. A. Yu. Shahverdian and G. S. Hovannesian, The higher difference structure of independent binary random processes, Mathematics in Higher School, Yerevan, SEUA, **7**, 3 (2011) 16–21
12. A. Yu. Shahverdian, A decomposition of quasi-oscillators, *Asian-European J. Math.*, **2**, 4 (2009) 681-705
13. A. Yu. Shahverdian, *Lattice animals and self-organized criticality*, Fractals. **5**, 2 (1997) 199–213
14. A. Yu. Shahverdian, A. V. Apkarian, *Avalanches, connectivity, and pulse-coupled rotators*, in: Proc. Intern. Conf. CSIT 2007, Yerevan (2007) 325-328.
15. A. Yu. Shahverdian and A. V. Apkarian, *Avalanches in networks of weakly coupled phase-shifting rotators*, Comm. Math. Sci., **6**, 1 (2008) 217-234
16. A. Yu. Shahverdian, *A decomposition of the rotation of circle*, Results in Mathematics, **61**, 1 (2012) 243-277
17. А. Ю. Шахвердян, Граничное поведение бильярдной траектории в n-мерном кубе, *Успехи Матем. Наук*, **47**, 5 (1992) 195-196
18. A. Yu. Shahverdian, The finite-difference method for one-dimensional nonlinear systems, *Fractals*, **8**, 1 (2001) 49-65
19. A. Yu. Shahverdian and A. V. Apkarian, On irregular behaviour of neural spike trains, *Fractals*, **7**, 1 (1999) 93-103
20. A. Yu. Shahverdian and A. V. Apkarian, Difference analysis for stochastic system, in: *Proc. V-th International Congress on Math Modeling, Dubna, Russia* (2002) 1-7
21. A. Yu. Shahverdian and A. V. Apkarian, A difference characteristic for irregular systems, Comm Nonlin Sci and Comput Sim., **12**, 1 (2007) 233-242
22. A. Yu. Shahverdian, Avalanches and memory in rotator networks, Rep. Armenian Natl. Acad. Sci., **111**, 3 (2011) 240–249.
23. A. Yu. Shahverdian, Minimal Lie algebra, fine limits, and dynamical systems, Rep. Armenian Natl. Acad. Sci., **112**, 2 (2012) 158–168.

CONCLUSIONS

In this dissertation some problems of theory of subharmonic functions (potential theory) and discrete dynamical systems, where some exceptional sets are necessarily involved, are considered. In potential theory the exceptional sets are called thin or fine sets and constitute the so-called fine topology. Such sets, defined by means of Wiener's criterion type conditions, appear in estimates for subharmonic functions obtained in Chapters 2 and 3. In Chapter 4 different situations, where some small exceptional sets arise in studying the dynamical networks and discrete dynamical systems, are considered.

The Chapters 2 and 3 relate to classical potential theory and theory of meromorphic functions. Some estimates for Riesz and Green potentials and δ-subharmonic functions, are proved. The estimates hold outside some small exceptional sets described in terms of capacity. The formulations involve some weight functions which reflect the growth of the Borel measure defining a given potential; for subharmonic case the weight functions concern

the Riesz measure and Nevanlinna characteristic of a given δ-subharmonic function. The exceptional sets satisfy some relations which are similar to the Wiener criterion in the Dirichlet problem. Some results on decrease of meromorphic functions on small sets, which are classified to exceptional ones in such estimates, are presented. The results obtained improve or complement some classical theorems related to notions of thinness and fine topology. The Chapter 3 considers zero order functions δ-subharmonic (and subharmonic) in $\mathbb{R}^m$ – some theorems on their asymptotic growth with respect to Nevanlinna characteristic $T(r)$ (and maximal value $B(r)$ on the spheres of radius r, for subharmonic case), are proved. The formulations involve different kinds of deficiencies of δ-subharmonic functions.

The Chapter 4 of dissertation extends the field of applications of general methods of potential theory. We use the methods of potential theory to define and study a mathematical model of memory in networks of perturbed harmonic oscillators. Some discrete capacities, which are discrete versions of the Fuglede-Choquet abstract weak capacities (weights), are considered. In Section 4.1, a dynamical memory in some dynamical networks (rotator networks) is proposed and studied. In discrete capacity terms the cluster identification task by means of avalanches happening in a given network, is considered. The Section 4.2 concerns dynamics-related properties of the circle rotation map (the networks considered in Section 4.1 consist of perturbed uniform rotators). A self-similarity of orbits of the circle rotation map as well as a pointwise self-similarity (scaling) of classical trigonometric system are established. In addition, a decomposition of quasi-oscillators is considered. The exceptional sets appeared in these statements are described in metrical terms. The Section 4.3 concerns the difference analysis, which is a new method for analyzing discrete dynamical systems. An abstract minimal Lie algebra, which is an axiomatic basis for such analysis, is introduced and thin (fine) limits defined by means of a Wiener criterion type relation, are considered. Some results on fine attractors are presented.

The methods developed in this dissertation allow us to improve and complement a series of well-known results on estimation of δ-subharmonic functions and provide us with a possibility to describe their behavior also on exceptional sets. These methods also allow us to extend the area of applications of general methods of potential theory to studying the dynamical networks and systems.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Տվյալ ատենախոսությունում դիտարկվում են պոտենցիալի տեսության և դինամիկ համակարգերի այնպիսի խնդիրներ, որոնցում պարտադիր առաջանում են որոշակի բացառիկ բազմություններ: Դրանք կոչվում են նուրբ բազմություններ և կազմում են այսպես կոչված նուրբ տոպոլոգիա: Նուրբ բազմությունները սահմանվում են Վիների հայտանիշի տիպի պայմանի միջոցով և ատենախոսության 2րդ և 3րդ գլուխներում օգտագործվում են սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների գնահատականներ ստանալու համար: Գլուխ 4-ում դիտարկվում են խնդիրներ, երբ բացառիկ բազմությունները առաջանում են դիսկրետ դինամիկ համակարգերի հետազոտություններում:

Ատենախոսության 2-րդ և 3-րդ գլուխները վերաբերում են դասական պոտենցիալի և մերոմորֆ ֆունկցիաների տեսությանը: Ստացված են գնահատականներ Ռիսսի և Գրինի պոտենցիալների և սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար: Գնահատականները ճիշտ են ունեն փոքր բացառիկ բազմություններից դուրս, որոնք նկարագրվում են ունակության տերմիններով: Ձևակերպումները օգտագործում են կշռային ֆունկցիաների դասեր, որոնք նկարագրում են պոտենցիալը սահմանող Բորելի չափի աճը: Սուբհարմոնիկի դեպքում կշռային ֆունկցիաները որոշվում են տվյալ սուբհարմոնիկ ֆունկցիաի Ռիսսի չափի և Նևանլիննաի խարակտերիստիկաի միջոցով: Բացառիկ բազմությունները նկարագրվում են Դիրիխլեի խնդրում Վիների պայմանի տիպի առնչությամբ: Բերված են նաև այս բացառիկ բազմությունների վրա ֆունկցիայի նվազումը ճիշտ նկարագրող արդյունքներ: Ստացված արդյունքները ուժեղացնում կամ լրացնում են նուրբ տոպոլոգիային վերաբերվող դասական թեորեմներ: Գլուխ 3-ում դիտարկվում է զրո կարգի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ աճը Նևանլիննայի խարակտերիստիկ ֆունկցիայի նկատմամբ: Թեորեմների ձևակերպումը տրված է ֆունկցիաների տարբեր տեսակի դեֆեկտների միջոցով:

Ատենախոսության գլուխ 4-ը ընդլայնում է պոտենցիալի տեսության կիրառությունների շրջանակը: Այստեղ ապացուցված է, որ որոշ կիրառական խնդիրներում հենց այդպիսի բացառիկ բազմությունները կարող են ունենալ առաջնային նշանակություն. մենք օգտագործում ենք պոտենցիալի տեսության մեթոդները օսցիլատորների ցանցերում հիշողության մաթեմատիկական մոդել սահմանելու և ուսումնասիրելու համար: Այս գլխում դիտարկվող խնդիրներում կիրառվում են Ֆուգլեդե-Շոկեի աբստրակտ ունակության տարբերակներ: Առաջարկվում է դինամիկ ցանցերում հիշողության մեխանիզմ: Դիսկրետ ունակության տերմիններով դիտարկվում է դինամիկ ցանցերում կլաստերների իդենտիֆիկացիայի խնդիր հոսքերի հասկացության միջոցով: Դիտարկվում է շրջանագծի արտապատկերման տրոհման խնդիրը: Ապացուցվում է այս արտապատկերման և դասական եռանկյունաչափական համակարգի ինքնանմանությունը: Բացառիկ բազմությունները այստեղ նկարագրվում են մետրիկական տերմիններով: Քննարկվում է տարբերությունների անալիզը, որը դիսկրետ դինամիկ համակարգերի հետազոտության նոր մեթոդ է: Սահմանվում և ուսումնասիրվում է Լի-ի աբստրակտ մինիմալ հանրահաշիվ, որը աքսիոմատիկ հիմք է այսպիսի անալիզի համար: Դիտարկվում են նուրբ սահմաններ և Վիների հայտանիշի տիպի պայմաններ: Ապացուցված են նուրբ ատրակտորներին վերաբերվող արդյունքներ:

Ատենախոսությունում մշակված մեթոդները թույլ են տալիս ուժեղացնել և լրացնել սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների գնահատականներին վերաբերվող մի շարք հայտնի արդյունքներ և հնարավորություն են տալիս նկարագրել ֆունկցիաների վարքը նաև բացառիկ բազմությունների վրա: Այս մեթոդները նաև թույլ են տալիս ընդլայնել պոտենցիալի տեսության կիրառությունների շրջանակը դինամիկ ցանցերի և համակարգերի հետազոտության համար:

А. Шахбазян