

**ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ  
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ**

**ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ**

**ՕՉԱՆՑԱՆ ՕՎՍԱՆՆԱ ՀԱՄԼԵՏԻ**

**ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻՆԱԼԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ ԲԱԶՄԱԶՍՓ  
ԴԻՄԿՐԵՏ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄ**

**ՄԵՂՍԱԳԻՐ**

Ե.13.01 - «Կառավարում, կառավարման համակարգեր և դրանց տարրերը»  
մասնագիտությամբ տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի զիտական  
աստիճանի հայցման ատենախոսության

**Երևան 2016**

---

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ**

**ОГАНЯН ОВСАННА ГАМЛЕТОВНА**

**РАЗРАБОТКА МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук по  
специальности 05.13.01 – “Управление, системы управления и их элементы”

**Ереван 2016**

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ տ.գ.դ. Օ.Ն. Գասպարյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ տ.գ.դ. Ս.Հ. Սիմոնյան  
տ.գ.դ. Ս.Շ. Բալասանյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Ատենախոսության պաշտպանությունը տեղի կունենա 2016թ. սեպտեմբերի 2-ին, ժամը 14<sup>00</sup> -ին Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի «Կառավարման, ավտոմատացման և էլեկտրոնիկայի» 032 մասնագիտական խորհրդի նիստում (հասցեն՝ 0009, Երևան, Տերյան 105, 17 մասնաշենք):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀԱՊՀ –ի գրադարանում:  
Սեղմագիրն առաքված է 2016թ. հուլիսի 21-ին:

032 Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար, տ.գ.դ.  Ա.Գ. Ավետիսյան

---

Тема диссертации утверждена Ученым советом Национального политехнического университета Армении

Научный руководитель: д.т.н. О.Н. Гаспарян

Официальные оппоненты: д.т.н. С.О. Симонян  
д.т.н. С. Ш. Баласанян

Ведущая организация: Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита диссертации состоится 2-го сентября 2016 г. в 14<sup>00</sup> ч. на заседании Специализированного совета ВАК 032 - “Управления, автоматизации и электроники”, действующего при Национальном политехническом университете Армении (НПУА) (адрес: 0009, г. Ереван, ул. Теряна 105, корпус 17).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НПУА.

Автореферат разослан 21-го июля 2016 г.

Ученый секретарь  
Специализированного совета 032  А.Г. Аветисян  
д.т.н.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Диссертационная работа посвящена вопросам распространения классических частотных и корневых методов исследования линейных дискретных систем регулирования с одним входом и одним выходом (одномерных систем) на случай дискретных многосвязных (многомерных) систем автоматического регулирования (МСАР), т.е. систем с несколькими входами и выходами и взаимными связями между отдельными каналами. Примерами многомерных объектов регулирования являются роботы-манипуляторы, химические и другие технологические процессы, гиостабилизированные платформы, многороторные беспилотные летательные аппараты и др.

Методам исследования дискретных систем автоматического регулирования с одним входом и выходом посвящена обширная литература. В настоящее время к наиболее распространенным классическим методам относятся методы  $z$ -преобразования и билинейного преобразования, которые основаны на рассмотрении системы с импульсными элементами в дискретные моменты времени, т.е. на замене дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы, разностными уравнениями. В то же время относительно мало внимания уделено методам исследования дискретных МСАР с учетом их структурных особенностей. Все это предопределяет актуальность темы диссертационной работы, в которой основные классические методы исследования обычных дискретных систем распространяются на случай квадратных дискретных МСАР различных типов, где под квадратными МСАР понимаются системы с одинаковым числом входов и выходов. Основным математическим аппаратом при этом является метод характеристических передаточных функций (ХПФ), который дает возможность поставить в соответствие  $N$ -мерной (т.е. имеющей  $N$  входов и  $N$  выходов) линейной МСАР совокупность  $N$  одномерных характеристических систем, действующих вдоль  $N$  линейно независимых направлений (осей канонического базиса) в комплексном пространстве входных и выходных векторных воздействий. Это позволяет свести исследование исходной взаимосвязанной МСАР к исследованию  $N$  независимых одномерных характеристических систем. Укажем, что метод ХПФ ранее применялся только по отношению к непрерывным МСАР, и в диссертационной работе этот метод впервые распространяется на дискретные МСАР, представленные с помощью  $z$ -преобразования и билинейного преобразования ( $\varpi$ -преобразования).

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является распространение на базе метода ХПФ частотных и корневых методов исследования одномерных дискретных систем на квадратные дискретные МСАР основных структурных классов, описанных в научно-технической литературе (общего вида, однотипных, циркулянтных и антициркулянтных, простых симметричных и т.д.).

Для достижения намеченной цели в работе были поставлены следующие задачи:

1. Распространение метода ХПФ на случай дискретных МСАР различных структурных типов и, в частности, вывод канонических представлений дискретных МСАР общего вида, а также однотипных, циркулянтных, антициркулянтных и простых симметричных МСАР.

2. Исследование общих свойств частотных характеристик (диаграмм Найквиста, Никольса и Боде) основных типов дискретных МСАР, представленных с помощью  $z$ -преобразования и билинейного преобразования ( $w$ -преобразования).

3. Исследование общих свойств и особенностей корневых годографов дискретных МСАР основных типов на комплексных плоскостях  $z$  и  $w$ , в том числе дополнительных корневых годографов МСАР с правильными (нестрого рациональными) ХПФ.

4. Разработка на основе языка программирования MATLAB алгоритмов и численных методов построения частотных характеристик и корневых годографов дискретных МСАР, заданных в областях  $z$  и  $w$ .

**Методы исследования.** При решении поставленных в диссертации задач были использованы основные положения классической теории автоматического управления, теории матриц и функционального анализа, метод характеристических передаточных функций, численные методы линейной алгебры, а также методы и средства современных информационных технологий.

**Научная новизна работы заключается в следующем:**

1. Дано распространение метода ХПФ на случай дискретных МСАР основных структурных классов (МСАР общего вида, однопольных, циркулянтных, антициркулянтных и простых симметричных МСАР). Это позволило свести анализ устойчивости  $N$ -мерных взаимосвязанных дискретных МСАР к анализу устойчивости  $N$  независимых одномерных характеристических систем.

2. Предложены новые методы построения и исследованы общие свойства корневых годографов дискретных МСАР на плоскостях  $z$  и  $w$ . Рассмотрены особенности построения корневых годографов однопольных, антициркулянтных и циркулянтных дискретных МСАР, включая простые симметричные системы. Показано, что центры асимптот корневых годографов однопольных и простых симметричных дискретных МСАР на плоскости  $z$  всегда расположены на действительной оси, а для остальных типов МСАР эти центры могут быть также комплексно-сопряженными.

3. Дано распространение на многомерный случай классического понятия показателя колебательности одномерных дискретных систем как величины резонансного пика мажоранты обобщенных амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) замкнутых дискретных МСАР по выходу и ошибке.

4. Разработаны процедуры исследования устойчивости и определения показателей колебательности дискретных МСАР основных структурных классов при помощи диаграмм Найквиста, Боде и Никольса.

**Практическая ценность работы** заключается в том, что полученные в ней теоретические результаты доведены до уровня алгоритмической и программной реализации на основе языка программирования MATLAB, что дает возможность автоматизировать процедуру проектирования и выбора коррекции исходя из заданных показателей качества дискретных МСАР.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Канонические представления основных классов дискретных МСАР произвольной размерности  $N$ , передаточные матрицы которых заданы при помощи  $z$ -преобразования и билинейного преобразования.

2. Методы определения показателя колебательности и анализа устойчивости дискретных МСАР общего вида при помощи частотных диаграмм Найквиста, Боде и Никольса. Особенности исследования устойчивости однотипных, циркулянтных и антициркулянтных дискретных МСАР.

3. Общие свойства и правила построения корневых годографов дискретных МСАР общего вида на плоскостях  $z$  и  $w$ , т.е. при описании МСАР с использованием билинейного преобразования. Свойства и особенности траекторий корней специальных классов дискретных МСАР, а именно - однотипных, циркулянтных и антициркулянтных МСАР, включая простые симметричные системы.

4. Пакет программ на языке MATLAB для численного исследования качества и устойчивости основных классов дискретных МСАР.

**Апробация результатов работы.** Основные научные и практические результаты диссертации докладывались на:

- ежегодной научно конференции ГИУА (Ереван, 2012г.);
- научных семинарах кафедры "Системы управления" факультета кибернетики НПУА (Ереван, 2015г.);
- XXII Международной научно-практической конференции "Приоритетные научные направления: от теории к практике" (Новосибирск, Россия, 05.02.2016г).

**Публикации.** Основные положения диссертации опубликованы в восьми научных работах, список которых представлен в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, основных выводов, списка использованной литературы, включающего 126 наименований, приложения. Общий объем работы составляет 150 страниц, включая 76 рисунка. Диссертация написана на армянском языке.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, представлены научная новизна и практическое значение работы, а также основные положения, выносимые на защиту.

**В главе 1** кратко представлены классические методы исследования дискретных систем регулирования с одним входом и выходом, где передаточная функция приведенной линейной части  $W(s)$  (рис. 1) равна произведению передаточной функции  $W_{plant}(s)$  непрерывного объекта регулирования и экстраполятора нулевого порядка  $W_H(s)$  с передаточной функцией

$$w_H(s) = \frac{1 - \exp(-sT_S)}{s}, \quad (1)$$

где  $T_S$  - период прерывания идеального импульсного элемента (ключа)  $S$ .

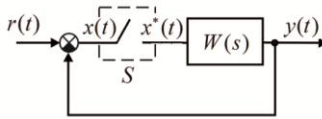


Рис. 1. Дискретная система с приведенной линейной частью  $W(s)$

Обычное преобразование Лапласа  $Y(s)$  непрерывного сигнала  $y(t)$  на выходе замкнутой дискретной системы на рис. 1 дается выражением

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} W(s + jk\omega_S)} \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} R(s + jk\omega_S), \quad (2)$$

где угловая частота прерывания равна  $\omega_S = 2\pi/T_S$ , а устойчивость определяется распределением корней характеристического уравнения

$$1 + W^*(s) = 0,$$

где

$$W^*(s) = (1/T_S) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} W(s + jk\omega_S) = 0. \quad (3)$$

Это уравнение имеет на комплексной плоскости  $s$  бесконечное число корней, которые повторяются с периодом  $j\omega_S$  вдоль мнимой оси. Ввиду громоздкости и сложности применения уравнений (2) и (3) на практике при исследовании дискретных систем в настоящее время используются методы  $z$ -преобразования и билинейного ( $\varpi$ -) преобразования.  $Z$ -преобразование связывает переменные  $z$  и  $s$  при помощи выражения

$$z = \exp(sT_S). \quad (4)$$

Это выражение однозначно отображает мнимую ось  $s = j\omega$  плоскости  $s$  в окружность единичного радиуса на плоскости  $z$ , причем основная полоса левой полуплоскости плоскости  $s$  отображается внутрь данной окружности (рис. 2а,б).

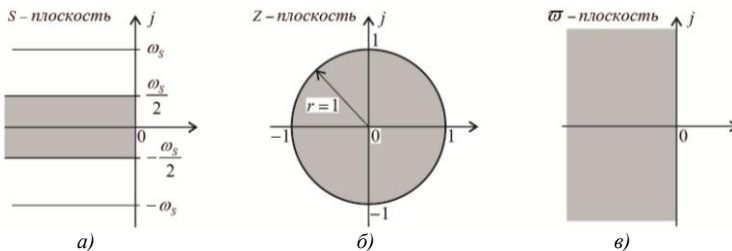


Рис. 2. Отображения комплексных плоскостей  $s$  (а),  $z$  (б) и  $\varpi$  (в)

При использовании  $z$ -преобразования трансцендентная передаточная функция  $W^*(s)$  в (3) переходит в рациональную передаточную функцию  $W(z)$ , и для устойчивости импульсной (дискретной) системы необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения

$$1 + W(z) = 0 \quad (5)$$

лежали на плоскости  $z$  внутри окружности единичного радиуса.

Прямое и обратное билинейные преобразования даются выражениями

$$z = \frac{1 + (T_s / 2)\varpi}{1 - (T_s / 2)\varpi} \quad \text{и} \quad \varpi = \frac{2(1 - z^{-1})}{T_s(1 + z^{-1})}. \quad (6)$$

Первое из них отображает внутреннюю часть единичной окружности на плоскости  $z$  в левую полуплоскость плоскости  $\varpi = u + jv$ , а саму единичную окружность – в мнимую ось плоскости  $\varpi$ . Рациональная передаточная функция  $W(z)$  при этом переходит в рациональную передаточную функцию  $W(\varpi)$ , имеющую одинаковое число полюсов и нулей. Для устойчивости замкнутых дискретных систем, заданных в области  $\varpi$ , необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения

$$1 + W(\varpi) = 0 \quad (7)$$

были расположены в левой полуплоскости плоскости  $\varpi$ .

К передаточным функциям  $W(\varpi)$  применим, в отличие от  $W(z)$ , классический метод логарифмических частотных характеристик, в том числе и асимптотических характеристик.

Рассматриваются также вопросы определения показателя колебательности дискретных систем, приводится соответствующая модификация критерия устойчивости Найквиста  $z$ .

Изложенные в главе 1 методы исследования распространяются в главах 3-5 на дискретные МСАР произвольной размерности.

**Глава 2** посвящена описанию основ метода ХПФ применительно к линейным непрерывным МСАР различных структурных классов.

Рассмотрим  $N$ -мерную непрерывную МСАР, матричная структурная схема которой представлена на рис. 3, где  $\varphi(s)$ ,  $f(s)$ ,  $\varepsilon(s)$  - преобразования Лапласа  $N$ -мерных векторов входа, выхода и ошибки, которые будем считать элементами  $N$ -мерного комплексного пространства  $C^N$ ;  $W(s)$  - квадратная передаточная матрица разомкнутой системы размера  $N \times N$  с дробно-рациональными элементами  $w_{kr}(s)$ .

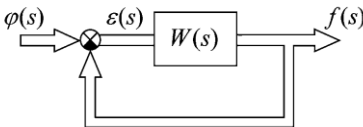


Рис. 3. Непрерывная МСАР общего вида

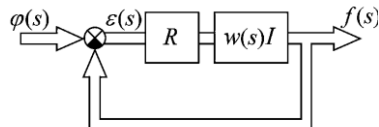


Рис. 4. Непрерывная МОСАР

Векторы выхода  $f(s)$  и ошибки  $\varepsilon(s)$ , где  $\varepsilon(s) = \varphi(s) - f(s)$ , связаны с входным вектором  $\varphi(s)$  следующими уравнениями в операторной форме:

$$f(s) = \Phi(s)\varphi(s), \quad \varepsilon(s) = \Phi_\varepsilon(s)\varphi(s), \quad (8)$$

где

$$\Phi(s) = [I + W(s)]^{-1}W(s), \quad \Phi_\varepsilon(s) = [I + W(s)]^{-1} \quad (9)$$

- передаточные матрицы замкнутой непрерывной МСАР соответственно по выходу и ошибке;  $I$  - единичная матрица.

Поскольку передаточная матрица  $W(s)$  разомкнутой МСАР на рис. 3 имеет в качестве элементов скалярные передаточные функции  $w_{k\ell}(s)$  комплексной переменной  $s$ , то её собственные значения  $q_i(s)$ , т.е. корни уравнения

$$\det[qI - W(s)] = 0, \quad (10)$$

также являются функциями переменной  $s$ . Эти комплексные функции  $q_i(s)$  называются характеристическими передаточными функциями разомкнутой МСАР. Если принять для простоты все ХПФ  $q_i(s)$  различными, то собственные векторы  $c_i(s)$  [ $|c_i(s)|=1$ ] матрицы  $W(s)$  будут линейно независимыми, и из них можно образовать базис  $N$ -мерного комплексного пространства  $C^N$ . Данный базис называется каноническим базисом разомкнутой непрерывной МСАР. Составив из собственных векторов  $c_i(s)$  модальную матрицу  $C(s) = [c_1(s) \ c_2(s) \ \dots \ c_N(s)]$ , при помощи преобразования подобия можно представить передаточную матрицу разомкнутой непрерывной МСАР  $W(s)$  в следующем виде:

$$W(s) = C(s) \text{diag}\{q_i(s)\}C^{-1}(s), \quad (11)$$

где  $\text{diag}\{q_i(s)\}$  - диагональная матрица с элементами  $q_i(s)$  на главной диагонали.

Передаточная матрица  $W(s)$  разомкнутой МСАР может быть представлена также в виде спектрального разложения, т.е. в виде суммы  $N$  диад:

$$W(s) = \sum_{i=1}^N c_i(s) > q_i(s) < c_i^+(s), \quad (12)$$

где через  $c_i^+(s)$  обозначены оси двойственного базиса.

Подставив представление передаточной матрицы  $W(s)$  разомкнутой МСАР при помощи преобразования подобия (11) в передаточные матрицы замкнутой непрерывной МСАР по выходу  $\Phi(s)$  и ошибке  $\Phi_\varepsilon(s)$  (9), получим

$$\Phi(s) = C(s) \text{diag} \left\{ \frac{q_i(s)}{1 + q_i(s)} \right\} C^{-1}(s), \quad \Phi_\varepsilon(s) = C(s) \text{diag} \left\{ \frac{1}{1 + q_i(s)} \right\} C^{-1}(s). \quad (13)$$

Рассмотрение выражений (13) позволяет сделать важный вывод, что модальная матрица  $C(s)$  и, следовательно, канонический базис замкнутой МСАР совпадают с модальной матрицей и каноническим базисом разомкнутой системы.

Для устойчивости замкнутой МСАР на рис. 3 необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения

$$\det[I + W(s)] = 0 \quad (14)$$

лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости корней. Пользуясь каноническим представлением передаточной матрицы разомкнутой МСАР  $W(s)$  при помощи преобразования подобия (11), уравнение (14) можно привести к следующему виду:

$$\det \left[ C(s) \text{diag} \{ 1 + q_i(s) \} C^{-1}(s) \right] = \prod_{i=1}^N [1 + q_i(s)] = 0, \quad (15)$$

откуда видно, что характеристическое уравнение замкнутой  $N$ -мерной МСАР распадается на  $N$  соответствующих уравнений характеристических систем:

$$1 + q_i(s) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Поэтому для устойчивости непрерывной МСАР требуется, чтобы были устойчивыми все замкнутые характеристические системы. Если хотя бы одна из характеристических систем находится на границе устойчивости или неустойчива, то соответствующее уравнение в (16) будет иметь корни на мнимой оси или в правой полуплоскости, и в силу (15), точно такие же корни будет иметь и замкнутая МСАР. Отсюда следует, что метод ХПФ дает возможность заменить исследование устойчивости  $N$ -мерной непрерывной МСАР исследованием устойчивости её  $N$  одномерных характеристических систем, или, иными словами, сводит  $N$ -мерную задачу к совокупности  $N$  одномерных задач.

Для анализа устойчивости характеристических систем на практике наиболее удобным является обобщенный критерий Найквиста, согласно которому для устойчивости замкнутой МСАР необходимо и достаточно (если разомкнутая МСАР устойчива), чтобы годографы  $q_i(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  не охватывали критическую точку  $(-1, j0)$ .

В различных технических приложениях широко распространены однотипные МСАР (МОСАР). В МОСАР отдельные каналы имеют одинаковые передаточные функции, а взаимные связи между каналами являются жесткими и характеризуются вещественной числовой матрицей. Матричная структурная схема непрерывной МОСАР показана на рис. 4, где  $w(s)$  - передаточная функция идентичных каналов, а  $R$  -  $N \times N$  числовая матрица жестких взаимных связей.

Передаточная матрица  $W(s)$  разомкнутой непрерывной МОСАР (рис. 4):

$$W(s) = w(s)R \quad (17)$$

совпадает с точностью до комплексного скалярного множителя  $w(s)$  с числовой матрицей взаимных связей  $R$ . Если обозначить через  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) собственные значения матрицы  $R$ , которые будем полагать различными, а через  $C$  - модальную матрицу, составленную из линейно независимых собственных векторов  $c_i$  матрицы  $R$ , то канонические представления передаточной матрицы разомкнутой МОСАР при помощи преобразования подобия и диадных обозначений будут выглядеть следующим образом:

$$W(s) = C \text{diag} \{ \lambda_i w(s) \} C^{-1} = \sum_{i=1}^N c_i > \lambda_i w(s) < c_i^+, \quad (18)$$

где  $c_i^+$  - векторы, двойственные к  $c_i$ .

Как следует из (18), канонический базис непрерывной МОСАР полностью определяется числовой матрицей взаимных связей  $R$  и не зависит от вида передаточной функции  $w(s)$  отдельных каналов. Далее, все ХПФ

$$q_i(s) = \lambda_i w(s) \quad (19)$$

совпадают с точностью до постоянных коэффициентов  $\lambda_i$  с передаточной функцией  $w(s)$ . Эти свойства дают возможность максимально приблизить методы исследования непрерывных МОСАР к традиционным методам исследования обычных систем регулирования с одним входом и выходом. При этом возможны две формулировки обобщенного критерия Найквиста, приводящие к различным графическим построениям. Первая из них, по существу, совпадает с приведенной выше для МСАР общего вида. В соответствии со второй формулировкой общие уравнения (16) переписываются с учетом (19) в виде

$$w(s) = -1/\lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (20)$$

При этом на комплексной плоскости строится одна амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) передаточной функции  $w(j\omega)$  и откладывается  $N$  критических точек  $-1/\lambda_i$ . Тогда для устойчивости замкнутой МОСАР необходимо и достаточно, чтобы годограф  $w(j\omega)$  не охватывал ни одну из  $N$  точек  $-1/\lambda_i$ .

Особый класс многомерных систем составляют так называемые нормальные МСАР, передаточная матрица  $W(s)$  которых является нормальной, т.е. коммутирует со своей сопряженной. Принципиальная особенность нормальных непрерывных МСАР заключается в ортогональности их канонического базиса. Кроме того, двойственный базис нормальных МСАР также является ортогональным и тождественно совпадает с каноническим.

Среди нормальных МСАР особое место занимают циркулянтные, антициркулянтные и простые симметричные МСАР.

В циркулянтных МСАР (ЦМСАР) каждая последующая строка передаточных матриц повторяет предыдущую при сдвиге всех элементов (кроме  $N$ -го) на одно место вправо:  $N$ -й элемент предыдущей строки при этом становится первым элементом следующей. Для матрицы  $W(s)$  это выглядит так:

$$W(s) = \begin{pmatrix} w_0(s) & w_1(s) & w_2(s) & \dots & w_{N-1}(s) \\ w_{N-1}(s) & w_0(s) & w_1(s) & \dots & w_{N-2}(s) \\ w_{N-2}(s) & w_{N-1}(s) & w_0(s) & \dots & w_{N-3}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1(s) & w_2(s) & w_3(s) & \dots & w_0(s) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Эта матрица может быть записана в виде следующего матричного полинома:

$$W(s) = w_0(s)I + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(s)U^k, \quad (22)$$

где  $I$  - единичная матрица, а

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

есть ортогональная матрица перестановок.

В антициркулянтных МСАР (АМСАР) каждая последующая строка передаточных матриц повторяет предыдущую при сдвиге всех элементов (кроме  $N$ -го) на одно место вправо, но  $N$ -й элемент предыдущей строки при этом становится первым элементом следующей строки со знаком “минус”. Передаточная матрица  $W(s)$  АМСАР также может быть записана в форме матричного полинома (22), где матрицу перестановок  $U$  (23) следует заменить на матрицу перестановок с изменением знака последнего элемента  $U_-$ :

$$U_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Важным свойством непрерывных ЦМСАР и АМСАР является то, что их ХПФ  $q_i(s)$  могут быть записаны в аналитической форме при любом числе каналов  $N$ .

Частным случаем ЦМСАР являются простые симметричные МСАР, передаточные функции всех перекрестных связей которых совпадают между собой, т.е.  $w_k(s) = w_1(s)$  ( $k = 2, \dots, N-1$ ). Существенной чертой простых симметричных МСАР является наличие только двух различных ХПФ, имеющих вид

$$q_1(s) = w_0(s) + (N-1)w_1(s) \quad \text{и} \quad q_2(s) = q_3(s) = \dots = q_N(s) = w_0(s) - w_1(s). \quad (25)$$

**В главе 3** метод ХПФ распространяется на случай линейных дискретных МСАР общего вида. Матричная структурная схема дискретной МСАР общего вида с  $N$  входами и  $N$  выходами представлена на рис. 5, где  $r(t), y(t), e(t)$  - соответственно  $N$ - мерные векторы входа, выхода и ошибки;  $W_p(s)$  -  $N \times N$  передаточная матрица непрерывного объекта регулирования с элементами  $w_{kr}^p(s)$ , являющимися дробно-рациональными функциями комплексной переменной  $s$ ;  $S$  -  $N$ -мерный импульсный элемент с периодом прерывания  $T_s$ , описывающий  $N$  синхронных и синфазных идеальных ключей в отдельных каналах МСАР;  $I$  - единичная матрица размера;  $w_H(s)$  - передаточная функция идентичных экстраполяторов нулевого порядка в отдельных каналах МСАР, имеющая вид (1).

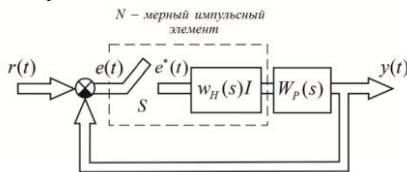


Рис. 5. Дискретная МСАР общего вида с  $N$  входами и  $N$  выходами

Если отнести экстраполяторы нулевого порядка к непрерывной части МСАР и использовать  $z$ -преобразование, то матричная структурная схема дискретной МСАР на рис. 5 приводится к виду на рис. 6, где  $W(z)$  - дискретная передаточная матрица приведенной непрерывной части.

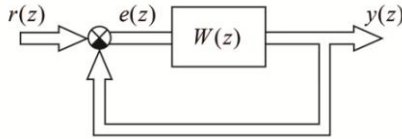


Рис. 6. Структурная схема дискретной МСАР общего вида в области  $z$

Дискретная МСАР на рис. 6 описывается следующими уравнениями:

$$y(z) = \Phi(z)r(z), \quad e(z) = \Phi_e(z)r(z), \quad (26)$$

где

$$\Phi(z) = [I + W(z)]^{-1}W(z), \quad \Phi_e(z) = [I + W(z)]^{-1} \quad (27)$$

- передаточные матрицы замкнутой дискретной МСАР по выходу и ошибке.

При сделанных выше предположениях о синхронности и синфазности импульсных элементов в отдельных каналах вводится понятие ХПФ  $q_i(z)$  дискретных МСАР общего вида в области  $z$ , которые формально определяются как корни уравнения

$$\det[qI - W(z)] = 0. \quad (28)$$

Если принять все ХПФ  $q_i(z)$  различными, то соответствующие собственные векторы  $c_i(z)$  матрицы  $W(z)$  будут линейно независимыми и образуют базис  $N$ -мерного комплексного пространства  $C^N$ . Данный базис назван каноническим базисом разомкнутой дискретной МСАР. Составив из векторов  $c_i(z)$  модальную матрицу  $C(z) = [c_1(z) \ c_2(z) \ \dots \ c_N(z)]$ , при помощи преобразования подобия и диадных обозначений можно представить передаточную матрицу  $W(z)$  разомкнутой дискретной МСАР в следующем виде:

$$W(z) = C(z) \text{diag}\{q_i(z)\}C^{-1}(z) = \sum_{i=1}^N c_i(z) > q_i(z) < c_i^+(z). \quad (29)$$

Подставив это выражение в передаточные матрицы замкнутой дискретной МСАР  $\Phi(z)$  и  $\Phi_e(z)$  (27), получим

$$\Phi(z) = C(z) \text{diag}\{\Phi_i(z)\}C^{-1}(z) = \sum_{i=1}^N c_i(z) > \Phi_i(z) < c_i^+(z), \quad (30)$$

$$\Phi_e(z) = C(z) \text{diag}\{\Phi_{ei}(z)\}C^{-1}(z) = \sum_{i=1}^N c_i(z) > \Phi_{ei}(z) < c_i^+(z), \quad (31)$$

где ХПФ замкнутой дискретной МСАР:

$$\Phi_i(z) = \frac{q_i(z)}{1 + q_i(z)}, \quad \Phi_{ei}(z) = \frac{1}{1 + q_i(z)} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (32)$$

связаны с ХПФ разомкнутой дискретной МСАР  $q_i(z)$  теми же зависимостями, что и обычные  $z$ -передаточные функции замкнутых и разомкнутых дискретных систем регулирования с одним входом и выходом. Геометрическая трактовка внутренней структуры дискретной МСАР общего вида для случая представления матриц  $W(z)$  и  $\Phi(z)$  при помощи преобразования подобия иллюстрируется на рис. 7.

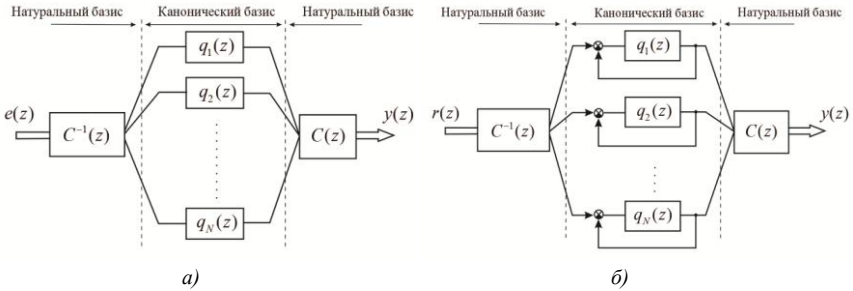


Рис. 7. Канонические представления дискретной МСАР при помощи преобразования подобия: а - разомкнутая МСАР, б - замкнутая МСАР

Пользуясь каноническим представлением передаточной матрицы  $W(z)$  при помощи преобразования подобия (29), характеристическое уравнение замкнутой МСАР можно привести к следующему виду:

$$\det [I + W(z)] = \prod_{i=1}^N [1 + q_i(z)] = 0. \quad (33)$$

Из выражения (33) видно, что характеристическое уравнение  $N$ -мерной дискретной МСАР распадается на  $N$  соответствующих уравнений одномерных характеристических систем:

$$1 + q_i(z) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (34)$$

Поэтому для устойчивости дискретной МСАР на рис. 6 необходимо и достаточно, чтобы были устойчивыми все замкнутые характеристические системы.

Рассмотрены вопросы анализа устойчивости дискретных МСАР при помощи критерия Найквиста, а также дано распространение понятия показателя колебательности непрерывных МСАР на дискретный случай.

Показателем колебательности дискретной МСАР по вектору ошибки названа точная верхняя грань модуля вектора  $e_o$  на сфере единичного радиуса  $U_r$  в пространстве  $S^N$  входных гармонических воздействий при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\omega_s / 2$ . В математической форме это выражается следующим образом:

$$M_e = \sup_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}} \{ \sup_{|r_o|=1} |\Phi_e[\exp(j\omega T_s)] r_o| \} = \sup_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}} \|\Phi_e[\exp(j\omega T_s)]\|. \quad (35)$$

Введено также понятие показателей колебательности  $M_{ei}$  одномерных характеристических систем как величины резонансного пика обобщенных АЧХ в направлениях  $N$  осей канонического базиса дискретной МСАР, т.е.

$$M_{ei} = \sup_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_k}{2}} |\Phi_{ei}[\exp(j\omega T_s)]| = \sup_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_k}{2}} \frac{1}{|1 + q_i[\exp(j\omega T_s)]|} \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (36)$$

Показано, что эти величины можно найти непосредственно по годографам Найквиста  $q_i(z) = q_i[\exp(j\omega T_s)]$  разомкнутых характеристических систем.

Сформулированы основные правила поведения траекторий корней (корневых годографов) дискретных МСАР общего вида на плоскости  $z$ .

Рассмотрены вопросы исследования дискретных МСАР общего вида при помощи билинейного преобразования (в области  $\varpi$ ). Показано, что ХПФ  $q_i(\varpi)$  дискретных МСАР в области  $\varpi$  всегда имеют (для каждого  $i$ ) одинаковое число нулей и полюсов, независимо от вида элементов  $w_{jk}(z)$  передаточной матрицы  $W(z)$ . Изучены свойства корневых годографов МСАР на плоскости  $\varpi$  и показано, что эти годографы не имеют ветвей, стремящихся к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ , однако при определенных условиях траектории корней могут уходить в бесконечность и возвращаться из нее при некотором конечном значении коэффициента усиления  $k$ .

**Глава 4** посвящена применению метода ХПФ при исследовании дискретных МОСАР, т.е. многомерных дискретных систем с одинаковыми передаточными функциями отдельных каналов и жесткими взаимными связями (рис. 8).

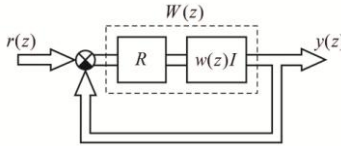


Рис. 8. Структурная схема дискретной МОСАР в области  $z$

В разделе 4.1 рассмотрены вопросы канонического описания и анализа устойчивости дискретных МОСАР в области  $z$ . Показано, что канонический базис дискретных МОСАР не зависит от вида передаточной функции  $w(z)$  отдельных каналов и полностью определяется числовой матрицей взаимных связей  $R$ , а ХПФ равны  $q_i(z) = \lambda_i w(z)$ , где  $\lambda_i$  - собственные значения матрицы  $R$ . Канонические представления передаточных матриц разомкнутых и замкнутых МОСАР при этом принимают вид

$$W(z) = C \text{diag} \{ \lambda_i w(z) \} C^{-1} = \sum_{i=1}^N c_i > \lambda_i w(z) < c_i^+, \quad (37)$$

$$\Phi(z) = C \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_i w(z)}{1 + \lambda_i w(z)} \right\} C^{-1} = \sum_{i=1}^N c_i > \frac{\lambda_i w(z)}{1 + \lambda_i w(z)} < c_i^+ \quad (38)$$

$$\Phi_e(z) = C \text{diag} \left\{ \frac{1}{1 + \lambda_i w(z)} \right\} C^{-1} = \sum_{i=1}^N c_i > \frac{1}{1 + \lambda_i w(z)} < c_i^+, \quad (39)$$

где  $C$  - постоянная модальная матрица, составленная из собственных векторов  $c_i$  матрицы взаимных связей  $R$ .

Даны прямая и инверсная формулировки критерия Найквиста для дискретных МОСАР и описаны соответствующие процедуры определения показателей колебательности характеристических систем. Эти процедуры иллюстрируются графиками расчета трехмерной дискретной МОСАР на рис. 9.

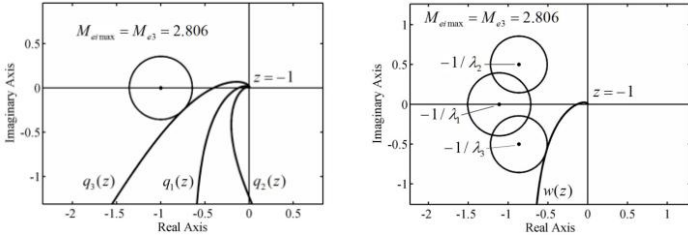


Рис. 9. Определение максимального показателя колебательности характеристических трехмерной дискретной МОСАР при помощи годографов Найквиста

Исследованы основные свойства корневых годографов дискретных МОСАР на плоскости  $z$ . В качестве примера на рис. 10 показаны корневые годографы системы, частотные характеристики которой даны на рис. 9.

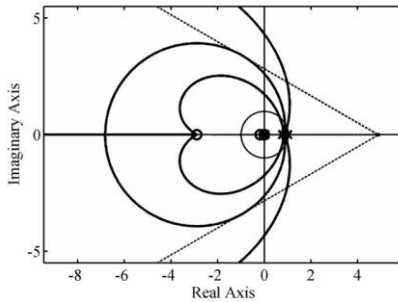


Рис. 10. Корневые годографы трехмерной дискретной МОСАР на плоскости  $z$ .

В разделе 4.2 рассмотрены вопросы исследования устойчивости дискретных МОСАР при использовании  $\varpi$ -преобразования. Показано, что передаточная функция  $w(\varpi)$  и ХПФ  $q_i(\varpi) = \lambda_i w(\varpi)$  в области  $\varpi$  являются правильными передаточными функциями, т.е. имеют одинаковое число полюсов и нулей. Сформулированы общие правила поведения корневых годографов на плоскости  $\varpi$ . Показано, что при наличии вещественных  $\lambda_i$  корневые годографы на плоскости  $\varpi$  могут проходить через бесконечность при конечном значении общего коэффициента усиления  $k$ . При этом на плоскости  $\varpi$  отсутствуют траектории корней, стремящиеся к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ .

**Глава 5** посвящена исследованию дискретных нормальных МОСАР, т.е. дискретных систем, передаточные матрицы которых коммутируют со своими сопряженными матрицами, т.е.

$$W(z)W^*(z) = W^*(z)W(z), \quad \Phi(z)\Phi^*(z) = \Phi^*(z)\Phi(z). \quad (40)$$

Важными особенностями дискретных нормальных МСАР являются ортогональность их канонического базиса и совпадение двойственного базиса с каноническим. В разделе 5.2 дано каноническое представление в области  $z$  широко распространенных на практике циркулянтных и антициркулянтных МСАР, а также простых симметричных МСАР в предположении о синхронности импульсных элементов в отдельных каналах. Получены аналитические выражения для ХПФ  $q_i(z)$  указанных типов МСАР. Например, для ЦМСАР  $q_i(z)$  имеют вид

$$q_i(z) = w_0(z) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k(z) \exp\left\{j \frac{2\pi(i-1)k}{N}\right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (41)$$

где  $w_i(z)$  - элементы первой строки циркулянтной матрицы  $W(z)$ .

Показано, что показатель колебательности нормальных дискретных МСАР, определяемый по величине резонансного пика мажоранты обобщенных АЧХ замкнутой МСАР, равен максимальному из показателей колебательности характеристических систем, т.е.

$$M_e = \sup_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}} \|\Phi_e[\exp(j\omega T_s)]\| = \max_i \left( \sup_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}} \frac{1}{|1 + q_i[\exp(j\omega T_s)]|} \right) = M_{ei \max}. \quad (42)$$

Рассмотрены свойства корневых годографов дискретных ЦМСАР и АМСАР на плоскости  $z$  и получены выражения для центров и наклонов асимптот траекторий корней. Показано, что центры асимптот могут быть как действительными числами, так и попарно комплексно-сопряженными. Раздел 5.3 посвящен вопросам исследования дискретных ЦМСАР и АМСАР на основе билинейного преобразования. Выведены аналитические выражения для ХПФ  $q_i(\varpi)$ . Показано, что эти ХПФ имеют при любом  $i$  одинаковое число полюсов и нулей, т.е. описываются нестрогим рациональными передаточными функциями, которые можно записать в виде

$$q_i(\varpi) = \frac{M_i(\varpi)}{D(\varpi)} = \frac{K_i^\Sigma \prod_{j=1}^{n_s} (\varpi - z_j^i)}{\prod_{j=1}^{n_s} (\varpi - p_j)}. \quad (43)$$

Если ввести общее обозначение  $\beta_i$  для собственных значений матриц  $U$  (23) и  $U_-$  (24), то в общем случае комплексные коэффициенты  $K_i^\Sigma$  в (43) примут вид

$$K_i^\Sigma = K_0^\Sigma + \sum_{k=1}^{N-1} \beta_i^k K_k^\Sigma \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (44)$$

Рассмотрены свойства корневых годографов дискретных ЦМСАР и АМСАР на плоскости  $\varpi$  и выявлены условия, при которых некоторые траектории корней проходят через бесконечность при конечном значении коэффициента усиления  $k$ . Получена формула для вычисления значения  $k$  для корней в бесконечности. На рис. 11 в качестве примера показаны корневые годографы на плоскости  $\varpi$  трехмерной дискретной ЦМСАР с передаточной матрицей в области  $z$  вида

$$W(z) = \begin{pmatrix} \frac{0.632}{z - 0.368} & \frac{0.323(z - 0.402)}{(z - 0.607)(z - 0.018)} & \frac{0.112(z - 0.485)}{(z - 0.018)(z - 0.002)} \\ \frac{0.112(z - 0.485)}{(z - 0.018)(z - 0.002)} & \frac{0.632}{z - 0.368} & \frac{0.323(z - 0.402)}{(z - 0.607)(z - 0.018)} \\ \frac{0.323(z - 0.402)}{(z - 0.607)(z - 0.018)} & \frac{0.112(z - 0.485)}{(z - 0.018)(z - 0.002)} & \frac{0.632}{z - 0.368} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

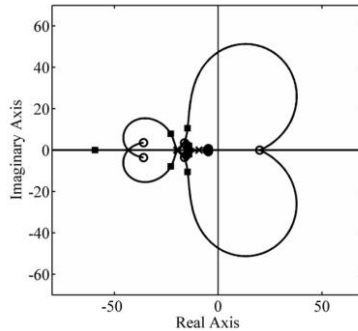


Рис. 11. Корневые годографы на плоскости  $\varpi$  ЦМСАР с передаточной матрицей  $W(z)$  (45)

Все теоретические результаты, представленные в главах 3-5, иллюстрируются численными примерами расчетов дискретных МСАР при помощи разработанного пакета прикладных программ на языке MATLAB.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПО ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЕ

Диссертационная работа посвящена вопросам распространения классических методов исследования дискретных систем регулирования с одним входом и одним выходом на случай дискретных многомерных систем автоматического регулирования (МСАР) основных структурных классов, описанных в научно-технической литературе. В работе получены следующие научные результаты:

1. На основе метода характеристических передаточных функций (ХПФ) получены канонические описания дискретных МСАР общего вида в предположении о синхронности и синфазности работы импульсных элементов в отдельных каналах. Показано, что при использовании билинейного преобразования ( $\varpi$ -преобразования) ХПФ  $q_i(\varpi)$  имеют при любом  $i$  одинаковое число полюсов и нулей, независимо от числа нулей и полюсов ХПФ  $q_i(z)$  в области  $z$  [5].

2. Установлено, что применение метода ХПФ позволяет свести анализ устойчивости дискретных МСАР  $N$ -го порядка к анализу устойчивости  $N$  одномерных характеристических систем на основе классических методов теории регулирования. Рассмотрены частотные методы исследования устойчивости

дискретных МСАР и дано распространение классического понятия показателя колебательности непрерывных МСАР на дискретный случай [5].

3. Рассмотрены особенности канонических представлений дискретных однопольных МСАР (МОСАР), т.е. многомерных дискретных систем с одинаковыми передаточными функциями отдельных каналов и жесткими взаимными связями, описываемыми некоторой числовой матрицей. Даны прямая и инверсная формулировки критерия Найквиста и указаны особенности анализа устойчивости дискретных МОСАР при помощи частотных диаграмм Найквиста, Боде и Никольса [4].

4. Получены канонические представления в областях  $z$  и  $\varpi$  дискретных нормальных МСАР, к которым относятся дискретные циркулянтные и антициркулянтные МСАР (ЦМСАР и АМСАР). Выявлено, что их канонические базы являются ортогональными и не зависят от  $z$ . Получены аналитические выражения для ХПФ  $q_i(z)$  и  $q_i(\varpi)$  указанных классов МСАР и показано, что все ХПФ  $q_i(\varpi)$  описываются нестрого рациональными передаточными функциями с комплексными коэффициентами. Установлено, что показатель колебательности дискретных нормальных МСАР, определяемый по величине резонансного пика обобщенных АЧХ замкнутых МСАР, равен максимальному значению показателей колебательности одномерных характеристических систем [1, 2, 3, 8].

5. Исследованы свойства корневых годографов на плоскостях  $z$  и  $\varpi$  основных классов дискретных МСАР. Показано, что дискретные ЦМСАР и АМСАР могут иметь комплексно-сопряженные центры асимптот траекторий корней на плоскости  $z$ . Получены аналитические выражения для центров асимптот и их наклонов. Установлено, что корневые годографы дискретных МСАР на плоскости  $\varpi$  не имеют ветвей, стремящихся к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ . Кроме того, при определенных условиях траектории корней на плоскости  $\varpi$  всех типов дискретных МСАР могут проходить через бесконечность, т.е. уходить в бесконечность и возвращаться из нее при некотором конечном значении коэффициента усиления  $k$  [2, 4, 6, 7].

6. На основе языка программирования MATLAB разработан пакет прикладных программ для численного построения частотных характеристик и корневых годографов в областях  $z$  и  $\varpi$  основных классов дискретных МСАР с учетом их структурных особенностей. Все теоретические положения диссертации иллюстрируются примерами расчетов конкретных систем. Разработанный пакет программ может быть использован при исследовании и проектировании дискретных МСАР, а также в учебном процессе НПУА для преподавания основ современной теории автоматического регулирования.

#### **Основное содержание диссертации опубликовано в следующих статьях:**

1. Օհանյան Օ.Հ. Դիսկրետ հասարակ սիմետրիկ համակարգերի կայունության վերլուծությունը // ՀՊՀՀ Լրաբեր 80. - Երևան, 2013. - Մաս 1.- էջ 208-213:

2. Օհանյան Օ.Հ., Գասպարյան Օ.Ն. Դիսկրետ պարզ սիմետրիկ ավտոմատ կարգավորման համակարգերի արմատային հետազոտությունները // ՀԱՊՀ Լրաբեր,- Երևան, 2016. - Մաս 1.- էջ 195-199:
3. Гаспарян О.Н., Варданян Н.А., Уликян А.Т., Оганян О.Г. Проектирование регуляторов для простых симметричных систем автоматического регулирования // Информационные технологии и управление: ISSN 1829-071x: Сборник научных трудов. – Ереван, 2011. - Том 5. - С. 8-16.
4. Гаспарян О.Н., Оганян О.Г. Исследование дискретных одностепенных систем регулирования на основе билинейного преобразования // Вестник НПУА. Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2015.- № 2.- С.21-31.
5. Гаспарян О.Н., Оганян О.Г. Исследование многомерных дискретных систем регулирования методом характеристических передаточных функций // Сборник материалов XXII Международной научно-практической конференции «Приоритетные научные направления: от теории к практике // 5 февраля 2016 г. - Новосибирск, 2016.- С. 132-141.
6. Гаспарян О.Н., Оганян О.Г. Корневые годографы дискретных циркулянтных систем регулирования // Известия. НАН РА и НПУА: ISSN 0002-306 X: Серия технических. – 2016. - Том LXIX, № 1. С. 61-69.
7. Оганян О.Г. Корневые годографы дискретных симметричных систем автоматического регулирования // Perspektywi czneopracowania są nauką i technikami – 2026, 07 – 15 listopada 2015 roku.- Прага, 2015.- Vol. 12.,- С. 30-33.
8. Уликян А.Т., Оганян О.Г. Проектирование простых симметричных систем автоматического регулирования // Материалы за XI Международна Научна Практична Конференция «Ключови Въпросив Съвременната Наука - 2015», 17 - 25 април 2015 г. Том 19. - С. 75-78.

## ԱՄՓՈՓՈԳԻՐ

Ատենախոսության նպատակն է բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների (ԲՓՖ) մեթոդի հիման վրա, միաշափ դիսկրետ համակարգերի հաճախականային և արմատային հետազոտման մեթոդների տարածումը գիտատեխնիկական գրականությունում նկարագրված դիսկրետ բազմաշափ ավտոմատ կառավարման համակարգերի (ԲԱԿՀ) հիմնական կառուցվածքային դասերի (ընդհանուր տեսքի, միատիպ, ցիրկուլյանտ, հակացիրկուլյանտ, պարզ սիմետրիկ և այլն) վրա:

1. Բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների (ԲՓՖ) մեթոդի հիման վրա ստացվել են ընդհանուր տեսքի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կանոնական ներկայացումները, ենթադրելով, որ առանձին կապուլիններում իմպուլսային տարրերն աշխատում են սինքրոն և սինֆազ: Ցույց է տրված, որ երկգծային ձևափոխության օգտագործման դեպքում ( $\varpi$ -ձևափոխության)  $q_i(\varpi)$  ԲՓՖ-

ները կամայական  $i$ -երի դեպքում ունեն միևնույն թվով բևեռներ և զրոներ, անկախ  $z$  տիրույթում  $q_i(z)$  ԲՓՖ-ի զրոների և բևեռների թվից [5]:

2. Ցույց է տրված, որ ԲՓՖ-երի մեթոդի կիրառումը թույլ է տալիս  $N$ -չափանի դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծությունը բերել  $N$  հատ միաչափ բնութագրիչ համակարգերի կայունության վերլուծության՝ կառավարման դիսկրետ համակարգերի տեսության դասական մեթոդների հիման վրա: Դիտարկված են դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կայունության հետազոտման հաճախականային մեթոդները և տրված է անընդհատ ԲԱԿՀ-երի տատանականության ցուցանիշի դասական հասկացության տարածումը դիսկրետ դեպքի վրա [5]:

3. Դիտարկված են դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի, այսինքն առանձին կապուլդիներում միևնույն փոխանցման ֆունկցիաներով և կոշտ փոխադարձ կապերով, որոնք նկարագրվում են թվային մատրիցով, բազմաչափ դիսկրետ համակարգերի կանոնական ներկայացումների հատկությունները: Տրված են Նայքվիստի չափանիշի ուղիղ և հակադարձ ձևակերպումները և նշված են Նայքվիստի, Բոդեի և Նիկոլսի հաճախականային դիագրամների միջոցով դիսկրետ միատիպ ԲԱԿՀ-երի կայունության վերլուծության առանձնահատկությունները [4]:

4. Ստացված են  $z$  և  $\varpi$  տիրույթներում դիսկրետ նորմալ, այդ թվում ցիրկուլյանտ (ՑԲԱԿՀ) և հակացիրկուլյանտ (ՀԲԱԿՀ) ԲԱԿՀ-երը, կանոնական ներկայացումները: Ցույց է տրված, որ ՑԲԱԿՀ-երի և ՀԲԱԿՀ-երի կանոնական բազիսներն օրթոգոնալ են և կախված չեն  $z$ -ից: Ստացված են նշված դասերի դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-ների  $q_i(z)$  և  $q_i(\varpi)$  ԲՓՖ-երի համար անալիտիկ արտահայտություններ: Ցույց է տրված, որ  $q_i(\varpi)$  ԲՓՖ-երը նկարագրվում են կոմպլեքս գործակիցներով ոչ խիստ փոխանցման ֆունկցիաներով: Ցույց է տրված, որ դիսկրետ նորմալ ԲԱԿՀ-երի տատանողականության ցուցանիշը, որը որոշվում է փակ ԲԱԿՀ-երի ընդհանրացված ԱՀԲ-երի ռեզոնանսային արժեքի առավելագույն մեծությամբ, հավասար է միաչափ բնութագրիչ համակարգերի տատանողականության ցուցանիշների առավելագույն արժեքին [1, 2, 3, 8]:

5. Հետազոտված են  $z$  և  $\varpi$  հարթությունների վրա դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հիմնական դասերի արմատային հետազոտների հատկությունները: Ցույց է տրված, որ դիսկրետ ՑԲԱԿՀ-երը և ՀԲԱԿՀ-երը կարող են ունենալ  $z$  հարթության վրա արմատային հետազոտների ասիմպտոտների կոմպլեքս-համալուծ կենտրոններ: Ստացված են ասիմպտոտների կենտրոնների և դրանց թեքությունների համար անալիտիկ արտահայտություններ:

Ցույց է տրված, որ  $\varpi$  հարթության վրա նշված համակարգերի արմատային հետազոտները չունեն անսահմանության ձգտող ճյուղեր, երբ  $k \rightarrow \infty$ : Բացի դրանից, որոշակի պայմանների դեպքում, բոլոր տեսակի ԲԱԿՀ-երի արմատային հետազոտները  $\varpi$  հարթության վրա կարող են անցնել

անսահմանությունով և վերադառնալ  $k$  ուժեղացման գործակցի որոշակի վերջավոր արժեքի դեպքում [2, 4, 6, 7]:

6. MATLAB ծրագրավորման լեզվի հիման վրա մշակվել է կիրառական ծրագրերի փաթեթ, որը հնարավորություն է տալիս հաշվարկել և կառուցել դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հիմնական դասերի արմատային հետազոծերը և հաճախականային բնութագրերը  $z$  և  $\varpi$  տիրույթներում՝ հաշվի առնելով դրանց կառուցվածքային առանձնահատկությունները: Ատենախոսության բոլոր տեսական դրույթները պարզաբանվում են դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի կոնկրետ հաշվարկային օրինակներով: Մշակված ծրագրային փաթեթը կարող է օգտագործվել դիսկրետ ԲԱԿՀ-երի հետազոտման և նախագծման համար, ինչպես նաև ավտոմատ կառավարման ժամանակակից տեսության դասավանդման ժամանակ:

**OVSANNA HAMLET OHANYAN**

**DEVELOPMENT OF MULTIVARIABLE DISCRETE CONTROL SYSTEMS BY  
THE METHOD OF CHARACTERISTICS TRANSFER FUNCTIONS**

**SUMMARY**

The thesis is devoted to the extension of the classical methods of investigation of discrete control systems with one input and one output to the case of discrete multi-input multi-output (MIMO) control systems of the main structural classes, described in the scientific and technical literature. The principal scientific results obtained in the thesis are the following:

1. The canonical descriptions of the general-type discrete MIMO control systems on the basis of the characteristic transfer functions (CTFs) method are obtained, on the assumption of synchronous and co-phase operation of impulse elements in the separate channels. It is shown that on using the bilinear transform ( $\varpi$ -transform) the CTFs  $q_i(\varpi)$  have the same number of poles and zeros for each  $i$ , irrespective of the number of poles and zeros of the CTFs  $q_i(z)$  in the  $z$ -domain [5].

2. It is shown that the application of the CTFs method allows reducing the stability analysis of discrete MIMO systems of the  $N$ -th order to the stability analysis of  $N$  one-dimensional characteristic systems on the basis of the classical methods of feedback control. The frequency-domain methods of stability analysis of discrete MIMO control systems are considered, and the extension of the classical notion of oscillatory index of continuous-time MIMO systems to the discrete case is given [5].

3. The distinctive features of canonical representations of discrete uniform MIMO systems, that is multidimensional discrete systems with identical transfer functions of separate channels and rigid cross-connections described by a certain numerical matrix are

considered. The direct and inverse formulations of the Nyquist criterion are given, and the distinctions of stability analysis of discrete uniform systems with the help of the Nyquist, Bode and Nichols frequency-response diagrams are indicated [4].

4. The canonical representations of the discrete normal MIMO systems in the  $z$  and  $\varpi$  domains, to which the circulant and anti-circulant MIMO systems belong, are obtained. It is revealed that their canonical bases are orthogonal and do not depend on  $z$ . The analytic expressions for the CTFs  $q_i(z)$  and  $q_i(\varpi)$  for the mentioned classes of MIMO systems are derived, and it is shown that all the CTFs  $q_i(\varpi)$  are described by non-strictly proper transfer functions with complex-valued coefficients. It is ascertained that the oscillatory index of discrete normal MIMO systems, which is determined by the peak gain value of the generalized frequency-response characteristics of the closed-loop MIMO systems, is equal to the maximum value of oscillation indices of the one-dimensional characteristic systems [1, 2, 3, 8].

5. The distinctive properties of the root loci on the  $z$  and  $\varpi$  planes of the main classes of discrete MIMO systems are investigated. It is shown that the discrete circulant and anti-circulant MIMO systems can have complex-conjugate centers of asymptotes of the root loci on the  $z$  plane. The analytical expressions for centers and slopes of the asymptotes are derived. It is revealed that the root loci of discrete MIMO systems on the  $\varpi$  plane do not have branches tending to infinity as  $k \rightarrow \infty$ . Besides, under certain conditions, the root trajectories of all types of the discrete MIMO systems on the  $\varpi$  plane can pass through the infinity, that is go to the infinity and return from it for some finite value of the gain  $k$  [2, 4, 6, 7].

6. The application package written in the MATLAB language for the numerical calculations of frequency-response characteristics and root loci in the  $z$  and  $\varpi$  domains of the main classes of discrete MIMO systems is developed. All the theoretical results of the thesis are illustrated by the numerical examples of specific discrete MIMO control systems. The developed application package can be used for the design and investigation of discrete MIMO control systems, as well as at the NPUA, in teaching the fundamentals of the modern feedback control.

