

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ ԻՌԵՆ ԱՐՄԵՆԻ

ԳԱԶԻ ԳԵՐՉԱՅՆԱՅԻՆ ՀՈՍԱՆՔՈՎ ՇՐՋՀՈՄՎՈՂ
ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐՆ ՈՒ
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա.02.04 – «ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱ» ՄԱՍՆԱԳԻՏՈՒԹՅԱՄԲ

ՖԻԶՄԱԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԹԵԿՆԱԾՈՒՄ
ԳԻՏԱԿԱՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՅՑՄԱՆ ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2019

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ВАРДАНЯН ИРЭН АРМЕНОВНА

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

АВТОРЕФЕРАТ

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ - 01.02.04 – МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЕРЕВАН – 2019

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում


Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր,
ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս **Գ.Ե.Բաղդասարյան**
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ **Ս.Հ.Մարգարյան**
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու,
պրոֆեսոր **Մ.Վ.Բելուբեկյան**

Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2019թ.-ի *դեկտեմբերի 27*-ին, ժամը 14:00-ին, ՀՀ ԳԱԱ մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0019, Երևան, Մարշալ Բաղրամյան 24/2:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2019թ.-ի *նոյեմբերի 15*-ին:

047 մասնագիտական խորհրդի
Գիտական քարտուղար, ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր  Ա.Վ.Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: Доктор физ. мат. наук,
профессор, академик НАН РА **Г.Е.Багдасарян**
Официальные оппоненты: Доктор физ. мат. наук, профессор,
член-корреспондент НАН РА **С.О.Саргсян**
Кандидат физ. мат. наук,
профессор **М.В.Белубекян**

Ведущая организация: Ереванский Государственный Университет

Защита диссертации состоится *27-ого декабря 2019* года в 14:00 часов на заседании специализированного совета 047 “Механика деформируемого твердого тела” Института механики НАН РА по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИМ НАН РА.

Автореферат разослан *15-ого ноября 2019*г.

Ученый секретарь специализированного совета 047,
доктор физ. мат. наук



А.В.Саакян

OSTILLATIONS AND STABILITY OF CYLINDRICAL SHELLS IN A SUPERSONIC GAS FLOW

SUMMARY

The problems investigation was carried out taking into account both types of quadratic and cubic nonlinearities: aerodynamic and geometric. By taking into account the aerodynamic nonlinearity (especially its asymmetric quadratic part), it was found that:

- Depending on the geometric parameters of the shell and the value of the flow velocity, the function $A(v)$ can be either single-valued and monotonically decreasing, or multi-valued;
- There is an interval of variation in the flow velocity, where it is impossible to excite flutter oscillations (the silence zone). The silence zone can be either of finite length or semi-infinite;
- At frequencies close to critical and for shells with large radius, the nature of the function $A(v)$ changes significantly. In this case, if the flow velocity is increased, the flutter oscillation mode is maintained up to a certain value of the flow velocity, where the oscillations “break” and the unperturbed state of the shell is restored. With a decrease in velocity, the unperturbed state is stable up to a certain value of velocity, where the amplitude of flutter oscillations increases abruptly up to a certain value and with further decrease the amplitude increases;
- For sufficiently thick shells, the function $A(\theta)$ is defined over the entire range of frequency values, that is, there is no frequency value at which steady flutter oscillations cannot be excited. Moreover, this function has a minimum point;
- Depending on the geometric parameters of the shell, there is such a specific value of the frequency parameter that it is impossible to excite flutter oscillations (silence zone) up to this value. After that value, the function $A(\theta)$ is a single-valued monotonically increasing function up to a certain frequency value, after which the function $A(\theta)$ is two-valued;
- There is a finite frequency variation interval outside of which steady flutter oscillations cannot be excited,
- As in the case of critical velocity, at postcritical velocities, the shell radius has a significant effect on the amplitude value – the larger the radius, the greater the amplitude value at a fixed oscillation frequency,

New results were also obtained in the study of aerothermoelastic systems. It is assumed that under the influence of a stationary temperature field, which is inhomogeneous over the shell thickness, the cylindrical shell bulges and, as a result, additional aeroelastic pressure appears. The specified bulged state is accepted as unperturbed and its stability under the influence of the temperature field and the gas flow pressure is studied. The scientific novelty of the results obtained in the case of presence of temperature field is as follows:

- The characteristics of the initial undisturbed state are calculated;
- On the basis of the solutions of linear problems, stability conditions are obtained;
- If the edges of the shell freely move in the longitudinal direction, then a constant temperature field practically does not affect the critical velocity;
- Depending on the number of half-waves, the critical velocity value has a minimum point;
- The inhomogeneity of the temperature field, in contrast to the constant temperature field, has a significant effect on the magnitude of the critical velocity in the case of free edges;
- At negative temperatures, the critical velocity increases substantially and the minimum point of the function $v_{cr}(n)$ moves toward lower values of n , while at positive temperatures the opposite is observed.

Актуальность темы. Проблема взаимодействия различных сред и физических полей находится в центре внимания исследователей механики сплошных деформируемых сред. В частности, особое место занимают вопросы механики оболочек и пластин, взаимодействующих со сверхзвуковым потоком газа и температурными полями. Эти вопросы относятся к современной и быстро развивающейся области механики деформируемого тела, являются весьма актуальными и охватывают широкий класс общетеоретических и прикладных задач, возникающих при рассмотрении физического эксперимента, создании измерительной аппаратуры, проектировании авиационных и космических конструкций, строительстве инженерных сооружений, судостроении и т. д. Обеспечение динамической прочности инженерных сооружений и тонкостенных элементов летательных аппаратов при их взаимодействии с потоком газа относится к разряду наиболее сложных проблем, возникающих при разработке новых конструкций и их эксплуатации. Надежность является основным показателем качества и важной задачей проектирования является улучшение этого показателя.

Взаимодействие конструкции со сверхзвуковым потоком может порождать незатухающие упругие колебания, представляющие особую опасность, в частности динамические напряжения в конструкции могут быстро достигнуть разрушающих значений. Поэтому задача изучения этого явления весьма актуальна и современна, требуется более строгая постановка задачи и ее исследование в случае пластин и оболочек из новых конструкционных материалов.

Цель диссертационной работы заключается в исследовании следующих вопросов колебаний и устойчивости цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа:

- получение основных уравнений и граничных условий аэротермоупругой устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки, учитывающие выпучивание (деформированное невозмущенное состояние) оболочки вследствие неоднородности температурного поля. На основе этого изучить влияние температурного поля на величину критической скорости и на области устойчивости.
- на основе теории гибких цилиндрических оболочек исследовать влияние обтекающего потока газа на характер зависимости «амплитуда-скорость» нелинейных колебаний с целью выявления новых типов указанной зависимости.
- обобщение метода исследования зависимости «амплитуда-частота» нелинейных флаттерных колебаний цилиндрических панелей с целью выявления влияния потока на указанную зависимость.

Научная новизна. Определены критические скорости и построены области устойчивости термоупругого флаттера замкнутой цилиндрической оболочки. Показано существенное влияние способа закрепления тангенциальных перемещений на торцах оболочки и неоднородного характера температурного поля.

Разработан приближенный способ исследования нелинейных колебаний и устойчивости прямоугольной в плане гибкой цилиндрической панели в сверхзвуковом потоке газа. Исследование проведено с учетом обоих типов квадратичной и кубической нелинейностей: аэродинамической и геометрической. Особое внимание уделено учету аэродинамической нелинейности, в особенности ее несимметричной квадратичной части, которая позволила выявить новые эффекты влияния сверхзвукового потока на характер нелинейных флаттерных колебаний. На основе этого решением конкретных задач показано, что:

а) функция зависимости амплитуды флаттерных колебаний как от скорости обтекающего потока при фиксированных значениях частоты, так и от частоты колебаний при фиксированных скоростях потока, может быть многозначной;

б) существуют интервалы изменения скорости обтекающего потока, в которых невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания (зоны молчания). При этом указанные интервалы могут быть как конечными, так и полубесконечными;

в) существует конечный интервал изменения частоты, вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания;

г) при постепенном увеличении скорости потока режим флаттерных колебаний сохраняется до некоторого значения скорости, при котором колебания «срываются» и восстанавливается невозмущенное состояние оболочки. При снижении скорости невозмущенное состояние устойчиво до некоторого значения скорости, где амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определенного конечного значения, после чего при дальнейшем уменьшении скорости амплитуда возрастает. В случае исследования зависимости «амплитуда-частота» наблюдается аналогичное представление, но при этом ветви функции направлены в обратную сторону;

д) на графиках амплитуды нелинейных флаттерных колебаний существуют точки, в которых происходит смена состояния устойчивости (точки бифуркации).

При исследовании вопросов аэротермоупругой устойчивости приведена новая постановка рассматриваемых задач. А именно, учитывается, что под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля происходит выпучивание цилиндрической оболочки и вследствие этого появляется добавочное аэроупругое давление. Указанное выпученное состояние принимается как невозмущенное и исследуется его устойчивость под действием температурного поля и давления обтекающего потока газа. На этой основе стало возможным решить новые конкретные задачи, в результате:

- а) определены условия устойчивости;
- б) найдены критические скорости обтекания;

в) установлено, что если края оболочки свободно смещаются в продольном направлении, то неоднородность температурного поля имеет существенное влияние; показано, что в зависимости от числа полуволн значение критической скорости имеет точки экстремума, местоположение которых зависит от температуры;

г) установлено, что если края оболочки шарнирно оперты и неподвижны, то постоянное температурное поле имеет существенное влияние на область устойчивости (появляются новые области неустойчивости) и на величину критической скорости, а неоднородность температурного поля в этом случае практически не влияет на устойчивость оболочки.

Практическая ценность. Результаты работы могут использоваться непосредственно в авиа- и судостроении, космонавтике, проектировании и строительстве инженерных конструкций. Приведенные теоретические результаты могут служить ориентиром при дорогостоящих экспериментальных исследованиях, а также могут быть использованы в родственных задачах аэротермоупругости и различных задачах прикладной физики.

Обоснованность и достоверность. Физически правильная математическая модель, неоднократно подтвержденная экспериментами, основанная на законе плоских сечений и на общепринятой теории пластин и оболочек, обеспечивает обоснованность и достоверность полученных результатов. Более того важным является использование строгих методов вычислений и в частных случаях совпадение с известными результатами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

- На конференции, посвященной 80-летию Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна (15–22 ноября, 2014).
- На IV международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (21-26 Сентября, 2015, Цахкадзор, Армения);
- На конгрессе «Thermal stresses – 2016» (5–9 июня, 2016, Университет Салерно, Салерно, Италия);
- На V международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» со специальной сессией в честь 60-летия Александра Манжирова (2-7 октября, 2017, Цахкадзор, Армения);

- Чрիտիկական հաճախություններին մոտ արժեքների դեպքում և թաղանթի բավականաչափ մեծ շառավիղների դեպքում $A(\nu)$ ֆունկցիայի վարքը էապես փոխվում է: Այդ դեպքում՝ շրջհոսող հոսանքի արագությունն աստիճանաբար մեծացնելիս ֆլատերային տատանումների ռեժիմը պահպանվում է ընդհուպ մինչև զազի հոսանքի արագության որոշակի արժեք, որտեղ տատանումներն ընդհատվում են և վերականգնվում է թաղանթի չգրգռված վիճակը: Արագության փոքրացման հետ չգրգռված վիճակը մնում է կայուն մինչև արագության որոշակի արժեք, որի դեպքում ֆլատերային տատանումների ամպլիտուդան թռիչքով աճում է մինչև արաշակի արժեք: Արագության հետագա փոքրացման հետ ամպլիտուդան աճում է,
- Բավականաչափ հաստ թաղանթների դեպքում $A(\theta)$ ֆունկցիան որոշված է հաճախության պարամետրի փոփոխման ամբողջ տիրույթում: Այսինքն՝ գոյություն չունի հաճախության այնպիսի արժեք, որի դեպքում հնարավոր չէ գրգռել հաստատված ֆլատերային տատանումներ: Ավելին, նշված ֆունկցիան ունի մինիմումի կետ,
- Կախված թաղանթի երկրաչափական պարամետրերից՝ գոյություն ունի հաճախության պարամետրի այնպիսի արժեք, որից փոքր հաճախությունների դեպքում հնարավոր չէ գրգռել ֆլատերային տատանումներ (լուսյան գոտի): Այնուհետև $A(\theta)$ ֆունկցիան միարժեք մոնոտոն աճող է մինչև հաճախության որոշակի արժեք, որից հետո $A(\theta)$ ֆունկցիան երկարժեք է,
- Գոյություն ունի հաճախության փոփոխության վերջավոր միջակայք, որից դուրս հնարավոր չէ գրգռել ֆլատերային տատանումներ,
- Ինչպես կրիտիկական արագությունների շրջհոսման ժամանակ, այնպես էլ հետկրիտիկական արագությունների դեպքում թաղանթի շառավիղի մեծությունն ունի էական ազդեցություն տատանումների ամպլիտուդայի արժեքի վրա: Այն է՝ ինչքան մեծ է շառավիղը, այնքան մեծ է տատանման ամպլիտուդան ֆիքսած հաճախության դեպքում:

Նոր արդյունքներ են ստացվել նաև աերոդերմատոադական համակարգերն ուսումնասիրելիս: Գիտական նորույթն այս ուղղությամբ հետևյալն է՝

- Որոշված են սկզբնական չգրգռված վիճակի բնութագրիչները,
- Գծային խնդիրների լուծումների հիման վրա որոշված են ուսումնասիրվող համակարգերի կայունության տիրույթները,
- Եթե թաղանթի եզրերն ազատ տեղաշարժվում են երկայնական ուղղությամբ, ապա հաստատուն ջերմային դաշտը պարկտիկորեն չի ազդում շրջհոսման կրիտիկական արագության մեծության վրա,
- Կախված կիսաալիքի թվից կրիտիկական արագությունն ունի մինիմումի կետ,
- Ի տարբերություն հաստատուն դեպքի, ազատ եզրերի դեպքում փոփոխական ջերմային դաշտն ունի էական ազդեցություն կրիտիկական արագության արժեքի վրա,
- Բացասական ջերմությունն էապես մեծացնում է կրիտիկական արագությունը և $v_{cr}(n)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետը տեղաշարժվում է փոքր n -երի կողմ, իսկ դրական ջերմային դաշտի դեպքում տեղի ունի հակառակ պատկերը:

13. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А. Нелинейный флаттер цилиндрической панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. В книге: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, Ереван, 2019, с.47-51.
14. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Vardanyan I.A., Marzocca P. Flutter of closed cylindrical shell in a non-homogeneous thermal field. Theoretical & Applied Mechanics Letters, 2019, 9(5): p.285-288. doi: 10.1016/j.taml.2019.05.001

- На IX международной конференции «Проблемы деформируемых твердых сред», посвященной 75летию Академии Наук Армении (1-6 октября, Горис, Армения);
- На XXI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (24-31 мая, 2019, МАИ: «Алушта», Республика Крым);
- На VI международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (1-6 октября, Дилижан, Армения);
- На конгрессе «Thermal stresses – 2019» (1-6 июня, 2019, Университет Хангжу, Хангжу, Китай).

Диссертационная работа в целом обсуждена на семинаре отдела «Динамика деформируемых систем и связанные поля» Института Механики НАН Армении и на общем семинаре Института Механики НАН Армении.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 14 научных статей, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 140 наименований. Общий объем работы составляет 117 страниц, включая 11 таблиц, 54 графика.

Վարդանյան Իոնն Արմենի

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏՍԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՍԲ ՇՐՋՆՍՎԵԼԻՄ

ԱՍՓՈՓՈՒՄ

Ժամանակակից բնական գիտությունների տարբեր ճյուղերի զարգացման որակական նոր մակարդակը սերտորեն կապված է տարբեր միջավայրերի և դաշտերի փոխազդեցության տեսական և կիրառական խնդիրների հետ: Սույն ատենախոսությունը նվիրված է իզոտրոպ բարակ գլանային թաղանթների տատանումների և կայունության ուսումնասիրմանը, երբ այդ բարակապատ դեֆորմացվող առաձգական մարմինները գտնվում են փոխազդեցության մեջ ինչպես մարմինները շրջհոսող գազի գերձայնային հոսանքի, այնպես էլ ըստ սալի հաստության արտաքին անհամասեռ ջերմային դաշտի հետ: Ուսումնասիրված են առաձգական ձկուն թաղանթների ոչ գծային ֆլատտերային տատանումների “ամպլիտուդա-արագություն” և “ամպլիտուդա-հաճախություն” կապերի վրա շրջհոսող հոսքի ազդեցությունը և ըստ սալի հաստության անհամասեռ ջերմային դաշտի ազդեցությունը ֆլատտերի բնութագրիչների վրա:

Այս ուսումնասիրությունների հիման վրա ստացված արդյունքները ունեն տեսական և խիստ կիրառական նշանակություն, և կարող են կիրառվել ավիացիոն և կոսմիկական հետազոտություններում, նավաշինարարության և ինժեներական կառույցների շինարարության մեջ: Ստացված արդյունքները օգտակար են գազի գերձայնային հոսքով շրջհոսվող բարակապատ մարմիններում դինամիկ պրոցեսների ուսումնասիրման և բնագիտական բազմաթիվ խնդիրների հետազոտման համար:

Նշված հանգամանքներով էլ պայմանավորված է ատենախոսության թեմայի արդիականությունը և հրատապությունը:

Աշխատանքում հաշվողական մաթեմատիկայի մեթոդների և ծրագրավորման գործիքների կիրառմամբ հետազոտված է գազի գերձայնային հոսքով շրջհոսվող բարակ գլանային թաղանթների ոչ գծային տատանումների և կայունության խնդիրների մի լայն դաս: Ստացվել են մի շարք գիտական նոր արդյունքներ, որոնք համառոտ բերվում են ստորև:

- Կախված թաղանթի երկրաչափական պարամետրերից և շրջհոսող գազի հոսանքի արագությունից՝ $A(\nu)$ ֆունկցիան կարող է լինել ինչպես միարժեք, այնպես էլ բազմարժեք,
- Գոյություն ունի շրջհոսող գազի հոսանքի արագություն, որի դեպքում հնարավոր չէ գրգռել ֆլատտերային տատանումներ (լռության գոտի): Ընդ որում, լռության գոտին կարող է լինել ինչպես վերջավոր երկարության, այնպես էլ կիսաանվերջ,

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен краткий обзор работ, посвященных вопросам колебаний и устойчивости деформируемых тонких тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, поршневой теории и ее уточнению. Приведены обоснование актуальности темы, ее новизна, цель настоящей диссертационной работы и краткое описание содержания диссертационной работы по главам.

Первая глава посвящена вопросам колебаний и устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа при наличии неоднородного температурного поля и состоит из трех параграфов.

В первом параграфе приводится постановка задачи.

Рассматривается тонкая изотропная цилиндрическая оболочка постоянной толщины h и радиуса R , находящаяся в стационарном температурном поле T . Оболочка отнесена к цилиндрическим координатам x, Φ, r , координатные линии x и Φ совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки (x – вдоль образующей, Φ – по дуге поперечного сечения). Пусть с внешней стороны оболочка обтекается сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью U , направленной параллельно образующим цилиндра. Под действием неоднородного по направлению нормали к срединной поверхности температурного поля оболочка выпучивается, это деформированное состояние принимается как невозмущенное и исследуется устойчивость этого состояния. На основе этого выведены основные уравнения и соотношения, описывающие поведение возмущений, сообщаемых невозмущенному состоянию. С этой целью, как и в общей теории упругой устойчивости, сначала определяются характеристики невозмущенного состояния:

- решена задача теплопроводности (в случае, когда на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^+ и T^- соответственно, а боковые поверхности $x=0$ и $x=a$ теплоизолированы) и получены следующие формулы для характеристик температурного поля

$$T = T_0 + (r - R)\Theta, \quad T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta = \frac{k(T^+ - T^-)}{kh - 2\lambda}.$$

- из уравнений теории упругости на основе гипотезы Кирхгофа-Лява получены следующие уравнения относительно перемещений u_T и w_T :

$$\frac{d^2 u_T}{dx^2} + \frac{\mu}{R} \frac{dw_T}{dx} = 0 \quad (1)$$

$$D \left[\frac{d^4 w_T}{dx^4} + \frac{12}{Rh^2} \left(\mu \frac{du_T}{dx} + \frac{w_T}{R} \right) \right] + \alpha p_\infty M \frac{dw_T}{dx} = 0, \quad (2)$$

и следующее выражение для внутренних усилий невозмущенного состояния

$$T_{11}^0 = \int_{R-h/2}^{R+h/2} \sigma_{11}^0 dr = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{du_T}{dx} + \mu \frac{w_T}{R} - \alpha(1+\mu)T_0 \right], \quad (3)$$

$$T_{22}^0 = \int_{R-h/2}^{R+h/2} \sigma_{22}^0 dr = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\mu \frac{\partial u_T}{\partial x} + \frac{w_T}{R} - \alpha(1+\mu)T_0 \right].$$

Здесь $M = Ua_\infty^{-1}$ – число Маха для невозмущенного потока, $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного теплового расширения материала оболочки.

Решения уравнений (1) и (2) должны удовлетворять условиям закрепления краев оболочки при $x=0$ и $x=a$. Будут рассмотрены краевые условия следующих двух типов:

края шарнирно оперты и свободно перемещаются вдоль оси Ox

$$w_T = 0, \quad d^2 w_T / dx^2 + \alpha(1+\mu)\Theta = 0 \quad \text{при } x=0, x=a \quad (4)$$

$$du_T / dx - \alpha(1+\mu)T_0 = 0 \quad \text{при } x=0, x=a; \quad (5)$$

края шарнирно оперты и неподвижны

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2 w_T}{dx^2} + \alpha(1+\mu)\Theta = 0 \quad \text{при } x=0, x=a \quad (6)$$

$$u_T = 0 \quad \text{при } x=0, x=a. \quad (7)$$

Решения указанных краевых задач имеют следующий вид:

$$u_T = -\frac{\mu}{R} \int_0^x w_T(\xi) d\xi + \delta \frac{\mu x}{Ra} \int_0^a w_T(x) dx + (1-\delta)\alpha(1+\mu)T_0 x,$$

$$w_T = \alpha\Theta(1+\mu) \left(-\frac{1}{2}x(x-a) + M_1 \text{Sin}\left[\frac{\pi x}{a}\right] + M_2 \text{Sin}\left[\frac{2\pi x}{a}\right] \right),$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края оболочки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края оболочки неподвижны.} \end{cases}$$

$$M_1 = -\frac{3a^6(-96(12+(\delta\pi^2-12)\mu^2)(-4h^2\pi^4R^2+3a^4(-1+\mu^2))+h^8k^2\pi^2R^4v^2\omega_1^4)}{72\pi(4h^2\pi^4R^2-3a^4(-1+\mu^2))(h^2\pi^6R^2+12a^4(\pi^2+(8\delta-\pi^2)\mu^2))+8a^4h^8k^2\pi^3R^4v^2\omega_1^4}$$

$$M_2 = \frac{3a^4h^4kR^2(-3h^2\pi^6R^2+4a^4(96-24(4+3\delta)\mu^2+\pi^2(-9+(9+8\delta)\mu^2)))v\rho\omega_1^2}{16(9\pi(4h^2\pi^4R^2-3a^4(-1+\mu^2))(h^2\pi^6R^2+12a^4(\pi^2+(8\delta-\pi^2)\mu^2))+a^4h^8k^2\pi^3R^4v^2\omega_1^4)}$$

Для получения уравнений и граничных условий возмущенного состояния принимаются следующие известные предположения:

а) гипотеза Кирхгофа-Лява о недеформируемых нормалях

$$u_x = u - (r-R) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_\varphi = \left(1 + \frac{r-R}{R} \right) v - (r-R) \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad u_r = w(x, \varphi, t), \quad (8)$$

- Неоднородное температурное поле, в отличие от постоянного, имеет существенное влияние на величину критической скорости в случае свободно смещающихся краев оболочки;
- При отрицательных температурах критическая скорость существенно увеличивается и точка минимума функции $v_{cr}(n)$ перемещается в сторону меньших n , а при положительных температурах имеет место обратная картина.

ПУБЛИКАЦИИ

- Варданян И.А.** Математическое моделирование и исследование устойчивости анизотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Вестник РАУ, 2017, #2, 41-51.
- Микилян М.А., Варданян И.А.** Математическое моделирование и численное исследование устойчивости замкнутой изотропной цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа. В книге "XII годовичная конференция РАУ, 4-8 декабря 2017", Ереван, Армения.
- Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А.** Термоупругая устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа. В книге: "Актуальные проблемы механики сплошной среды", Ереван, 2017, с.37-38.
- Варданян И.А., Сагоян Р.О.** Исследование амплитудно-частотной зависимости нелинейных термоупругих колебаний удлиненной пластинки в критических скоростях обтекающего потока сверхзвукового газа. В книге: "Актуальные проблемы механики сплошной среды", Ереван, 2017, с.51-52.
- Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А., Пантелеев А.В.** Замкнутая цилиндрическая оболочка в сверхзвуковом потоке газа в присутствии неоднородного температурного поля. Труды МАИ: Информатика, вычислительная техника и управление, 2018, № 103.
- Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А.** Флаттер замкнутой цилиндрической оболочки в присутствии неоднородного температурного поля. В книге: Проблемы взаимодействия в деформируемых средах, Ереван, 2018, с.68-72.
- Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А.** Нелинейный флаттер цилиндрической панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. В книге: Проблемы взаимодействия в деформируемых средах, Ереван, 2018, с.63-67.
- Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А., Пантелеев А.В.** Влияние сверхзвукового потока на характер нелинейных флаттерных колебаний цилиндрической оболочки. Двадцать первая Международная конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019), 24 по 31 май, 2019 г., МАИ: «Алушта» в Республике Крым, с.207-210.
- Багдасарян Г. Е., Микилян М. А., Варданян И. А., Пантелеев А.В.** Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных флаттерных колебаний цилиндрической панели. Вестник МАИ, 2019, Том 26, N1.
- Варданян И.А., Шмавонян А.** Задача термоупругого фаттера замкнутой цилиндрической оболочки. Доклады НАН РА, 2019, 119, #1, с.1-10.
- Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А.** Характер нелинейных колебаний цилиндрических оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Механика, Изв. НАН РА, 2019, 72, №1, с.10-34.
- Варданян И.А.** Влияние граничных условий на аэротермоупругую устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки. В книге: "Актуальные проблемы механики сплошной среды", Ереван, 2019, с.84-88.

чего функция $A(\theta)$ является двузначной, одна ветвь которой убывает, а вторая возрастает. Заметим также, что в зависимости от скорости обтекающего потока и геометрических параметров возможен как случай $\theta_* > \theta_{cr}$, так и $\theta_* < \theta_{cr}$;

- при $b/a < 1$ в случае достаточно тонких оболочек наблюдается возможность существования точек бифуркации.

Таким образом (при фиксированной геометрии оболочки и скорости газа) как существование различных типов зависимостей $A(\theta)$, точек бифуркации и зон молчания, так и переход от одного типа зависимости $A(\theta)$ к другому, можно регулировать оптимальным выбором геометрических параметров R/a , b/a оболочки.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Исследование задач проведено с учётом обоих типов нелинейностей: аэродинамической и геометрической. Благодаря учету аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратной части), установлено, что:

- В зависимости от геометрических параметров и от значения скорости обтекающего потока, функция $A(v)$ может быть как однозначной и монотонно убывающей, так и многозначной,
- Существует интервал изменения скорости обтекающего потока, где невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания). При этом зона молчания может быть как конечной длины, так и полубесконечной,
- При частотах, близких к критической, и достаточно больших радиусах оболочки характер функции $A(v)$ существенно меняется. В этом случае, если постепенно увеличивать скорость потока, режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определенного значения скорости потока, где колебания “сорвутся” и восстанавливается невозмущенное состояние оболочки. При снижении скорости невозмущенное состояние является устойчивым до определенного значения скорости, где амплитуда колебаний скачком возрастает до определенного конечного значения.
- В случае достаточно толстых оболочек функция $A(\theta)$ определена на всей области изменения значений частоты, т. е. не существует такого значения частоты, при котором невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания. Более того, указанная функция имеет точку минимума,
- В зависимости от геометрических параметров оболочки существует такое определенное значение параметра частоты, что до этого значения невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания). После функция $A(\theta)$ является однозначной монотонно возрастающей функцией до определенного значения частоты, после чего функция $A(\theta)$ является двузначной,
- Существует конечный интервал изменения частоты, вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания,

Новые результаты получены также при исследовании аэротермоупругих систем. Научная новизна полученных результатов в случае наличия температурного поля заключается в следующем:

- Вычислены характеристики начального невозмущенного состояния;
- На основе решений линейных задач получены условия устойчивости;
- Если края оболочки свободно смещаются, то постоянное температурное поле практически не влияет на величину критической скорости;
- В зависимости от числа полуволн значение критической скорости имеет точку минимума;

б) “закон плоских сечений” при определении аэродинамического давления

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{2} \frac{v_3^2}{a_\infty^2} \right)^{\frac{2\varepsilon}{\varepsilon - 1}}, \quad (9)$$

где p – давление газа на поверхность оболочки, a_∞ – скорость звука для невозмущенного газа ($a_\infty^2 = \varepsilon p_\infty \rho_\infty^{-1}$), p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность газа в невозмущенном состоянии, ε – показатель политропы, v_3 – нормальная составляющая скорости точек поверхности оболочки;

г) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры.

На основе общей теории термоупругости изотропных тел, принятых предположений и методов теории тонких оболочек в случае малых возмущений после линеаризации получена следующая однородная система линейных дифференциальных уравнений устойчивости рассматриваемой термогазоупругой системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{(1-\mu^2)T_{22}^0}{ERh} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{12R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Delta w + \frac{w}{R^2} \right) &= 0 \\ D \left[\Delta^2 w + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{12}{Rh^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right) \right] + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ - T_{22}^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \left(\rho_0 h \varepsilon + \frac{\varepsilon p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{2} p_\infty M^2 \frac{dw_T}{dx} \frac{dw}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

где $u(x, \varphi, t)$, $v(x, \varphi, t)$ и $w(x, \varphi, t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки, ε – коэффициент линейного затухания.

При решении конкретных задач устойчивости к системе (10) присоединяются граничные условия относительно возмущений, вытекающие из условий закрепления краев оболочки. Например, если края оболочки шарнирно оперты и свободно смещаются в направлении оси Ox , то граничные условия представляются в виде:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a \quad (11)$$

Отметим, что вследствие предложенной новой постановки задачи устойчивости в полученной системе уравнения имеют переменные коэффициенты, а также граничные условия невозмущенного состояния являются неоднородными. В дальнейшем рассмотрены два случая: асимметричная задача со свободным смещением краев (параграф 2) и осесимметричная задача с неподвижными в продольном направлении краями (параграф 3).

Во втором параграфе исследовано влияние температурного поля в случае свободно смещающихся краев. С этой целью приближенное решение системы (10), удовлетворяющее условиям (11), представляется в виде

$$\begin{aligned} u(x, \varphi, t) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) \cos \lambda_i x \right) \sin n\varphi, \quad v(x, \varphi, t) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i(t) \sin \lambda_i x \right) \cos n\varphi, \\ w(x, \varphi, t) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} w_i(t) \sin \lambda_i x \right) \sin n\varphi, \quad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $u_i(t)$, $v_i(t)$, $w_i(t)$ – подлежащие определению функции времени t .

Подставляя (12) в первые два уравнения системы (10), получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $u_i(t)$, $v_i(t)$, в правые части которых

входит $w_i(t)$. Решая эту систему, получаем $u_i(t), v_i(t)$, выраженные через $w_i(t)$, следовательно и $u(x, \varphi, t)$ и $v(x, \varphi, t)$. Подставляя (12) в третье уравнение системы, применяя метод ортогонализации получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $w_i(t)$. Представляя решение системы в виде $w_i = y_i e^{\lambda t}$ и ограничиваясь случаем двучленной аппроксимации, получим характеристическое уравнение четвертой степени относительно λ .

Невозмущенная форма оболочки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Согласно теореме Гурвица получены условия устойчивости, на основе которых с помощью численных методов получены значения критической скорости. Для расчета здесь и в дальнейшем принято $a=23.8 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; $k=1200$ Вт/(м 2 град); $\lambda=210$ Вт/(м град); $\mu=0.34$; $a=1$ м; $h/a=1/100$; $R/a=2$.

Результаты представлены в таблицах и графиках. На рис. 1 приведен график зависимости критической скорости v_{cr} от числа окружных волн n в случае переменного по толщине оболочки температурного поля.

Рис.1 и расчеты показывают, что в случае свободно смещающихся краев неоднородное температурное поле (в отличие от постоянного) имеет существенное влияние как качественное (существование точки максимума), так и количественное. А именно: а) при $\Theta > 0$ критическая скорость существенно увеличивается и точка минимума функции $v_{cr}(n)$ перемещается в сторону меньших n ; б) при $\Theta < 0$ имеет место обратная картина.

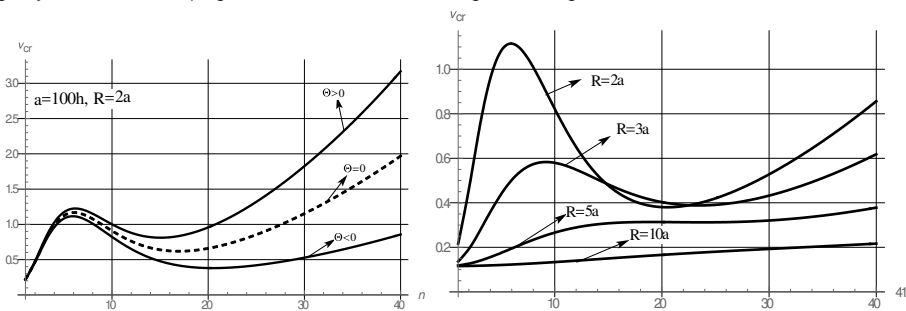


Рис. 1

Рис.2

Исследовано также влияние геометрических параметров на зависимость $v_{cr}(n)$. На рис. 2 приведен график зависимости критической скорости от числа окружных волн в случае разных значений параметра R/a , показывающий, что с уменьшением кривизны значение критической скорости в точках экстремума уменьшается. При $R \rightarrow \infty$ точки экстремума исчезают.

В третьем параграфе первой главы исследовано влияние температурного поля в случае неподвижных краев и построены области устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы.

На рис. 3 представлены области устойчивости в случае однородного температурного поля при различных значениях R/a :

- а) если $T_0 < 0$, то чем ниже температура, тем шире область устойчивости;
- б) если $T_0 > 0$, то чем выше температура, тем меньше область устойчивости;

Третья глава посвящена изучению влияния обтекающего потока на зависимость “амплитуда-частота” нелинейных колебаний пологих оболочек.

В первом параграфе исследуется влияние сверхзвукового потока на характер функции $A(\theta)$ при докритических скоростях. Численные вычисления показывают, что:

- в зависимости от геометрических параметров оболочки в случае толстых оболочек не существует такого значения частоты, при котором невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания.
- при уменьшении толщины оболочки характер зависимости $A(\theta)$ меняется существенно. В зависимости от геометрических параметров оболочки существует такое определенное значение $\theta_* < \theta_{cr}$, что при $\theta \in [0, \theta_*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания). Начиная с θ_* функция $A(\theta)$ является однозначной монотонно возрастающей функцией до определенного значения θ^* , после чего функция $A(\theta)$ является двузначной, при этом ветви практически параллельны.

Во втором параграфе исследуется влияние сверхзвукового потока на характер функции $A(\theta)$ при критических скоростях. Полученные результаты показывают, что:

- при $b/a < 1$ и малых значениях R/a существует интервал $[\theta_*, \theta^*]$ изменения частоты θ , вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания (рис.8а). При этом, если $\theta \in [\theta_*, \theta^*]$, то значения амплитуды флаттерных колебаний находятся на границах замкнутых областей;

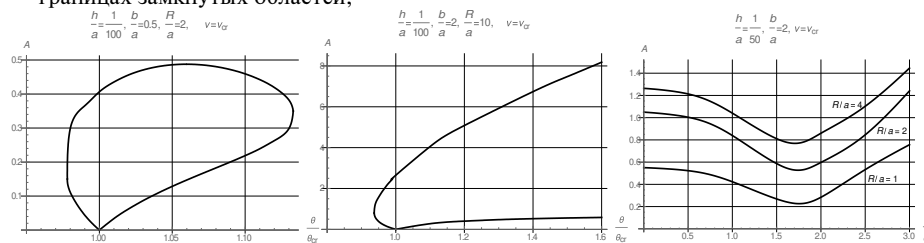


Рис.8. График функции $A(\theta)$ при различных значениях геометрических параметров и при критической скорости обтекающего потока

- при $b/a < 1$ и больших значениях R/a характер функции $A(\theta)$ существенно меняется. Возбудить нелинейные флаттерные колебания возможно только при $\theta \in [\theta_*, \infty)$, где θ_* - является предельным значением частоты и $\theta_* < 1$;
- если $b/a \geq 1$, то характер амплитудно-частотной зависимости аналогичен представлению, приведенному на рис.8б;
- чем больше значение R/a , тем больше значение амплитуды при фиксированной частоте колебаний, при этом зависимость $A(\theta)$ однозначна и имеет точку минимума (рис.8в).

В третьем параграфе исследуется влияние сверхзвукового потока на характер функции $A(\theta)$ при послекритических скоростях. Получены следующие результаты:

- при $b/a < 1$ и малых значениях R/a существует интервал $\theta \in [\theta_*, \theta^*]$, где значения амплитуды колебаний находятся на границах замкнутых областей;
- при $b/a > 1$ и достаточно больших значениях R/a в зависимости от геометрических параметров оболочки существует определенное значение θ_* параметра θ , что: а) при $\theta \in [0, \theta_*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), при $\theta = \theta_*$ значение амплитуды скачком возрастает до определенного конечного значения, после

- при малых значениях R/a существуют такие значения скорости обтекающего потока v_* и v^* , что функция $A(v)$ является однозначной в областях $v \in [0, v_*]$ и $v > v^*$, а при $v \in (v_*, v^*)$ невозможно возбудить флаттерные колебания рис.7а.
- дальнейшее увеличение R/a приводит к тому, что зона молчания становится полубесконечной (рис.7б), а зависимость амплитуда-скорость имеет следующий характер: если постепенно увеличивать скорость потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определенного значения скорости потока v^* (при этом $v^* > v_{cr}$), где колебания “сорвутся” и восстанавливается невозмущенное состояние оболочки. Отметим, что в интервале (v_{cr}, v^*) функция $A(v)$ является двузначной. При снижении скорости невозмущенное состояние является устойчивым, пока $v > v_{cr}$. При $v = v_{cr}$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определенного значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает (рис.4в). Отметим, что точки L и B на рис.7 являются точками бифуркации (точка, где происходит переход из устойчивого состояния в неустойчивое и наоборот), при этом, точка L является предельной точкой.

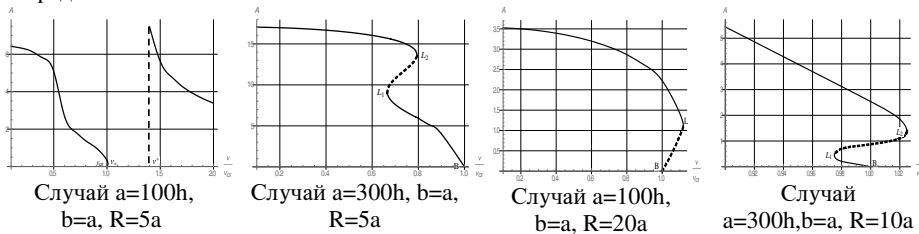


Рис. 7. Характер функции $A(v)$

В третьем параграфе исследуется влияние сверхзвукового потока на характер зависимости “амплитуда-скорость” нелинейных колебаний пологой оболочки при посткритических частотах.

Результаты численного решения системы (27), показывают, что

- Если $b/a < 1$, то существует интервал изменения скорости потока (интервал $(0, v_0)$), где v_0 зависит от θ , в котором невозможно возбудить флаттерные колебания с выбранной частотой (зона молчания). При $v \geq v_0$ зависимость $A(v)$ является однозначной монотонно убывающей функцией. При этом, если фиксировать значение R/a , то чем тоньше оболочка, тем больше v_0 и тем больше значение амплитуды. Аналогичный характер имеет зависимость $A(v)$ при фиксированных h/a .
- Если $b/a \geq 1$ и значения частоты колебаний близки к критической, то функция $A(v)$ может быть как однозначной, так и двузначной функцией.
- Если оболочка достаточно тонкая, то зона молчания становится полубесконечной. Расчеты показывают, что флаттерные колебания можно возбудить на интервале $(0, v_0)$. При этом с увеличением R/a амплитуда колебаний уменьшается, а значение v_0 увеличивается.

Таким образом (при фиксированной оболочке и газа), как существование различных типов зависимостей $A(v)$, точек бифуркации и областей молчания, так и переход от одного типа зависимости $A(v)$ к другому, можно регулировать оптимальным выбором параметра θ частоты колебаний.

в) при уменьшении значения a/R появляются новые области неустойчивости, при этом поток имеет стабилизирующий характер, если T_0 и V меньше соответствующих критических значений.

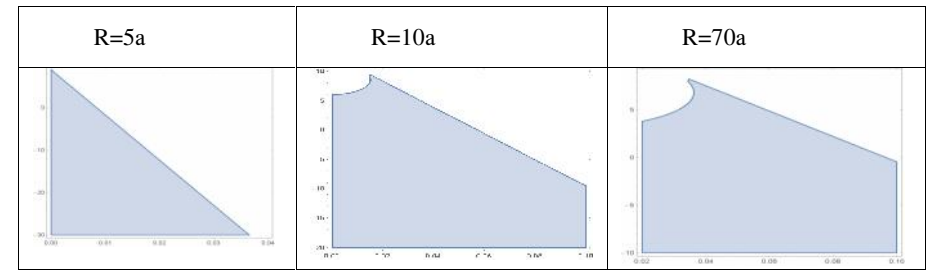


Рис. 3. Влияние постоянной температуры на область устойчивости

На рис. 4 представлены области устойчивости в случае неоднородного температурного поля при различных значениях R/a что:

- при увеличении $|\Theta|$ область устойчивости увеличивается;
- при фиксированном значении Θ увеличение радиуса оболочки R приводит к увеличению области устойчивости;
- в отсутствие потока, если $T_0 = 0$ под действием температурного поля типа $T = \Theta(r - R)$ не происходит потери устойчивости.

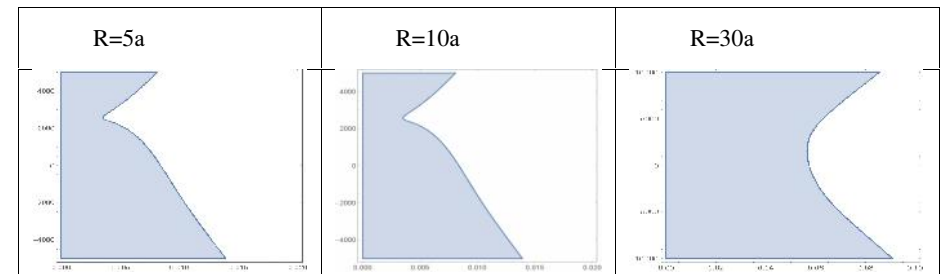


Рис. 4. Влияние переменной по толщине температуры на область устойчивости

Вторая глава посвящена изучению зависимости “амплитуда-скорость” нелинейных флаттерных колебаний пологой оболочки в отсутствие температурного поля.

В первом параграфе, который носит вспомогательный характер (Болотин В. В., Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, 1961), приведена постановка нелинейной задачи флаттера цилиндрической панели в следующем виде. Рассмотрена тонкая изотропная прямоугольная в плане цилиндрическая панель постоянной толщины h . Оболочка отнесена к ортогональным криволинейным координатам x, y, z , где координатные линии x и y совпадают с линиями кривизны срединной поверхности. Третья координатная линия z прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(x, y, 0)$ до точки (x, y, z) оболочки. Пусть оболочка обтекается с одной стороны

сверхзвуковым потоком газа с постоянной невозмущенной скоростью \bar{U} , направленной вдоль оси Ox . Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэроупругой системы. В отличие от главы 1 невозмущенное состояние оболочки совпадает с недеформированным.

На основе исследований принимаются следующие предположения:

- 1) гипотеза Кирхгофа-Лява о недеформируемых нормалях (8);
- 2) давление газа учитывается по приближенной формуле “поршневой теории”(9);
- 3) основные положения теории весьма пологих гибких оболочек с большим показателем изменчивости, считая, что прогибы $w(x, y, t)$ сравнимы с толщиной оболочки.

На этой основе получена следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения оболочки

$$D\Delta^2 w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho_0 h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{1}{R} - \alpha p_\infty \frac{\alpha + 1}{4} M^2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{M}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right] \quad (13)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 F = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (14)$$

где $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$, $M = U / a_\infty$, $a_\infty^2 = \alpha p_\infty / \rho_\infty$, $F(x, y, t)$ – функция напряжений ($T_{11} = \partial^2 F / \partial y^2$, $T_{22} = \partial^2 F / \partial x^2$, $T_{12} = -\partial^2 F / \partial x \partial y$), T_{ik} – внутренние усилия, ε – коэффициент линейного затухания, $M = U / a_\infty$ – число Маха, p_∞ – давление невозмущенного потока газа, a_∞ – величина скорости звука для невозмущенного газа, α – показатель политропы, t – время, R – радиус оболочки, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность материала оболочки.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (13)-(14) присоединяются также условия на контуре оболочки. Здесь рассматривается шарнирно опертая по всему контуру пологая оболочка ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), края которой свободно смещаются в плане. Тогда, следуя вышеуказанной монографии Болотина В. В., граничные условия принимаются в виде при $x = 0$, $x = a$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

$$\bar{T}_{11} = 0, \quad \bar{T}_{12} = 0, \quad (16)$$

при $y = 0$, $y = b$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

$$\bar{T}_{22} = 0, \quad \bar{T}_{21} = 0, \quad (18)$$

Здесь \bar{T}_{ik} осредненные значения усилий на кромках оболочки, которые определяются по следующим формулам

$$\bar{T}_{11} = \frac{1}{b} \int_0^b T_{11}|_{x=0} dy, \quad \bar{T}_{22} = \frac{1}{a} \int_0^a T_{22}|_{y=0} dx, \quad \bar{T}_{12} = \frac{1}{a} \int_0^a T_{12}|_{y=0} dx. \quad (19)$$

Второй параграф, состоящий из трех пунктов, посвящен решению нелинейной задачи.

значения параметра R/a , как и в случае толстых оболочек, величина V_* увеличивается.

Отметим, что при сравнительно малых R/a возможен случай, когда $V_* < V_{cr}$;

- с увеличением частоты θ картина зависимости амплитуды нелинейных флаттерных колебаний оболочки от скорости набегающего потока меняется и показывает, что а) с увеличением частоты колебаний θ , ширина зоны молчания, примыкающей к области малых скоростей ($v \in (0, v_1)$), уменьшается и занимает область $v \in (v_2, v_3)$, б) при $0 < v < v_2$ функция $A(v)$, будучи монотонно убывающей, может быть как однозначной, так и двузначной, г) если $v > v_3$, то $A(v)$ – монотонно убывающая функция. Уменьшение относительной толщины оболочки, как и следовало ожидать, приводит к существенному увеличению амплитуды и возможности возбуждения флаттерных колебаний как при докритических скоростях, так и при послекритических;

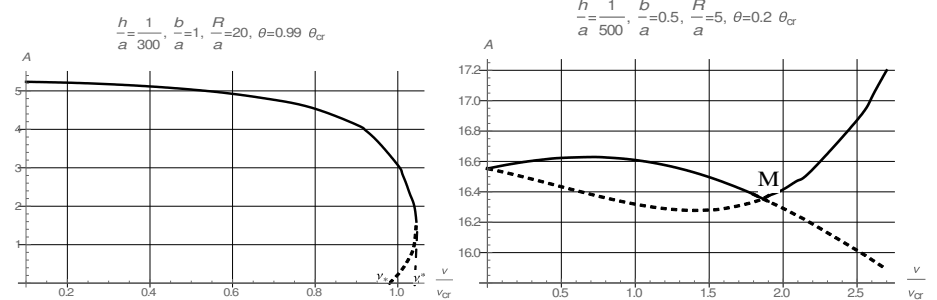


Рис.6. График функции $A(v)$ в случае сравнительно тонких оболочек

- при частотах, близких к θ_{cr} , и достаточно больших R/a характер функции $A(v)$ существенно меняется. В этом случае если постепенно увеличить скорость потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определенного значения скорости потока v^* , где колебания “сорвутся” и восстанавливается невозмущенное состояние оболочки. При снижении скорости невозмущенное состояние является устойчивым, пока $v > v_*$, где $v_* < v^*$. При $v = v_*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определенного значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает (рис.6а);
- с уменьшением относительной толщины оболочки существует значение $\bar{\theta}$, близкое к θ_{cr} , при котором $v_* = v^*$ и зависимость амплитуды колебаний от скорости потока (функция $A(v)$) является однозначной и монотонно убывающей. Причем такой характер ранее выявлен в других работах, когда $A_2 \approx -A_1$;
- проведено численное исследование $A(v)$ в случае тонкой оболочки, когда частота флаттерного колебания достаточно мала и $b/a < 1$. Результаты расчетов приведены на рис.6б, который показывает возможность существования точки бифуркации (точка M).

Во втором параграфе исследуется влияние сверхзвукового потока на характер зависимости “амплитуда-скорость” нелинейных колебаний пологой оболочки при критических частотах.

Численные исследования проведены для различных значений параметра R/a . Результаты численных исследований показывают, что

- значения функции $A(v)$ при фиксированном V монотонно возрастают при увеличении значения R/a ; более того, с увеличением как значений геометрических параметров b/a и R/a , так и частоты θ , значение v_* увеличивается;
- при малых значениях параметра θ функция $A(v)$ является однозначной, монотонно убывающей функцией. В этих случаях при фиксированных b/a с увеличением R/a значение амплитуды увеличивается;
- при сравнительно больших значениях частоты θ и параметра R/a характер функции $A(v)$ существенно меняется. Здесь в зависимости от b/a в основном имеют место следующие два случая: 1) если отношение b/a порядка единицы, то: а) существует интервал $[0, v_*]$ изменения v , где $A(v)$ является однозначной монотонно убывающей функцией, б) существует такое определенное значение $v^* > v_*$, что в интервале $[v_*, v^*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), в) при $v = v^*$ значение амплитуды скачком возрастает до определенного конечного значения, а при $v > v^*$ устойчивая ветвь зависимости $A(v)$ является монотонно убывающей функцией (рис.5а);

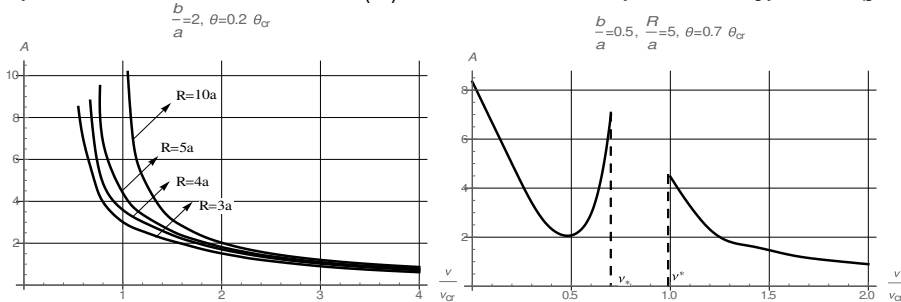


Рис.5. График функции $A(v)$ для относительно малых значениях частоты θ

- если же $b/a \leq 0.5$, то: а) существует интервал $[0, v_*]$, где $A(v)$ является однозначной функцией, которая имеет точку минимума, б) существует значение v^* такое, что в интервале $[v_*, v^*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), в) при $v = v^*$ значение амплитуды скачком возрастает до определенного конечного значения, а при $v > v^*$ зависимость $A(v)$ является однозначной, монотонно убывающей функцией (рис.5б);
- при частотах колебаний θ , близких к θ_{cr} , и в зависимости от геометрических параметров оболочки существует определенное значение v_* параметра V ($v_* < v_{cr}$), что: а) при $v \in [0, v_*]$ невозможно возбудить флаттерные колебания (зона молчания), при $v = v_*$ значение амплитуды скачком возрастает до определенного конечного значения, после чего функция $A(v)$ является двузначной, одна ветвь которой убывает, а вторая имеет точку максимума;
- с увеличением R/a значение амплитуды флаттерных колебаний увеличивается.
- при малых значениях параметра θ существует значение обтекающего потока v_* такое, что а) область $v < v_*$ является зоной молчания; б) при $v > v_*$ зависимость “амплитуда-скорость” является однозначной монотонно убывающей функцией, аналогичной соответствующей зависимости, полученной для толстых оболочек; в) с увеличением

В первом пункте решение сводится к задаче устойчивости, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений, путем представления приближенного решения уравнения (13), удовлетворяющего условиям (15) и (17), в виде (Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, 1961)

$$w(x, y, t) = \left(\sum_{k=1}^n f_k(t) \sin \lambda_k x \right) \sin \mu_m y; \quad \lambda_k = k\pi/a, \quad \mu_m = m\pi/b, \quad (20)$$

Подставив (20) в (14), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции F , которое решено методом неопределенных коэффициентов. Подставляя найденную функцию $F(x, y, t)$ и (20) в уравнение (13), ограничиваясь двучленной аппроксимацией и применяя метод Бубнова-Галеркина для определения безразмерных неизвестных функций $x_1 = f_1(t)/h$, $x_2 = f_2(t)/h$, получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3} kvx_2 + kv^2 \left[\alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_2^2 + vx_2 (\beta_{11} x_1^2 + \beta_{12} x_2^2) \right] + \\ + Qx_1 (\gamma_{11} x_1^2 + \gamma_{12} x_2^2) + L (\delta_{11} x_1^2 + \delta_{12} x_2^2) = 0 \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma_2 x_2 + \frac{2}{3} kvx_2 + kv^2 \left[\alpha_{21} x_1 x_2 + vx_1 (\beta_{21} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2) \right] + \\ + Qx_2 (\gamma_{21} x_1^2 + \gamma_{22} x_2^2) + L \delta_{21} x_1 x_2 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau = \Omega_1 t$, введены обозначения

$$\begin{aligned} k = \frac{4\alpha p_\infty}{\rho_0 \omega_1^2 h^2}, \quad Q = \frac{4}{16\rho_0 \omega_1^2}, \quad L = \frac{1}{\rho_0 h \omega_1^2}, \\ v = M \frac{h}{a}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} (\varepsilon + \varepsilon_a), \end{aligned} \quad (22)$$

а также коэффициенты α_{ik} и β_{ik} , учитывающие аэродинамическую нелинейность

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \frac{(\alpha+1)(2+\cos(m\pi))(1-\cos(m\pi))}{9m}, \quad \alpha_{12} = \frac{28(\alpha+1)(2+\cos(m\pi))(1-\cos(m\pi))}{45m}, \\ \alpha_{21} = \frac{8(\alpha+1)(2+\cos(m\pi))(1-\cos(m\pi))}{45m}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\beta_{11} = \beta_{21} = \frac{\pi^2}{40}(\alpha+1), \quad \beta_{22} = \frac{11\pi^2}{70}(\alpha+1), \quad \beta_{12} = -\frac{9\pi^2}{70}(\alpha+1),$$

и коэффициенты γ_{ik} и δ_{ik} , учитывающие геометрическую нелинейность

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{Eh^2(b^4 + a^4 m^4)\pi^4}{a^4 b^4}, \quad \gamma_{22} = \frac{Eh^2(16b^4 + a^4 m^4)\pi^4}{a^4 b^4} \\ \gamma_{12} = Eh^2 \left(\frac{4}{a^4} + m^4 \left(\frac{4}{b^4} + \frac{81}{(b^2 + 4a^2 m^2)^2} + \frac{1}{(9b^2 + 4a^2 m^2)^2} \right) \right) \pi^4 \\ \gamma_{21} = Eh^2 \pi^4 \left(\frac{4}{a^4} + \frac{4m^4}{b^4} + \frac{81m^4}{(b^2 + 4a^2 m^2)^2} + \frac{m^4}{(9b^2 + 4a^2 m^2)^2} \right), \\ \delta_{11} = -\frac{Eh^2 m(9b^4 + 2a^2 b^2 m^2 + a^4 m^4 - 15b^4 \cos(m\pi) - 8b^4)(1 - \cos(m\pi))}{3b^2(b^2 + a^2 m^2)^2 R} \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = -\frac{Eh^2m(144b^4 + 8a^2b^2m^2 + a^4m^4 - 1280b^4\cos(m\pi) - 640b^4)(1 - \cos(m\pi))}{15b^2(4b^2 + a^2m^2)^2R}$$

$$\delta_{21} = -\frac{Eh^2m}{R} \left(\left(\frac{64b^2}{15(b^2 + a^2m^2)^2} + \frac{256b^2}{15(4b^2 + a^2m^2)^2} + \frac{4b^2}{(b^2 + 4a^2m^2)^2} + \frac{12b^2}{5(9b^2 + 4a^2m^2)^2} \right) (1 + \cos(m\pi)) + \frac{32}{15} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{3b^2}{(b^2 + a^2m^2)^2} + \frac{12b^2}{(4b^2 + a^2m^2)^2} \right) (1 - \cos(m\pi)) - \left(\left(\frac{5b^2}{(b^2 + 4a^2m^2)^2} + \frac{18b^2}{5(9b^2 + 4a^2m^2)^2} \right) \right) \cos(m\pi) \right)$$

В (21) V – приведенный параметр скорости, χ – приведенный параметр демпфирования, ω_i – частоты малых собственных колебаний оболочки.

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой аэрогидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (21) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра V).

Выведены также системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случаях $n=3$ и $n=4$, они получились довольно громоздкими для аналитического исследования и здесь не приводятся. Они в дальнейшем использованы при решении линейной задачи и при численных исследованиях.

Во втором пункте параграфа решена соответствующая линейная задача и с помощью критериев Гурвица найдено формулы для определения v_{cr} и θ_{cr} .

$$v_{cr} = \frac{3}{4} \frac{\gamma_2^2 - 1}{k} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma_2^2 + 1)}{(\gamma_2^2 - 1)^2}}, \quad \theta_{cr} = \frac{1}{2}(\gamma_2^2 + 1). \quad (24)$$

Получены также условия устойчивости при $n=2,3,4$ в формуле (20). Численное исследование этих условий показало, что, как и в работах Доуэлла и Болотина, когда оболочка достаточно тонкая и $b/a > 1$, то можно ограничиться случаем $n=2$.

В третьем пункте второго параграфа задача устойчивости оболочки с помощью метода гармонического баланса приведена к решению системы нелинейных алгебраических уравнений представлением приближенного периодического решения системы в виде (Багдасарян Г. Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа, 1963)

$$x_1 = C_1 + A_1 \cos \theta \tau + B_1 \sin \theta \tau + \dots, \quad x_2 = C_2 + A_2 \cos \theta \tau + B_2 \sin \theta \tau + \dots \quad (25)$$

где A_i, B_i, C_i и $\theta = \omega \omega_1^{-1}$ ($i=1,2$) – неизвестные постоянные; ω – неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Структура решения (25) отличается от существующих наличием свободных членов $C_i \neq 0$, присутствие которых дает возможность учитывать влияние квадратичной нелинейности.

Подставляя решение (25) в систему (21) и приравнявая к нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos \theta \tau$ и $\sin \theta \tau$ (члены, содержащие гармоники пренебрегаются), получается

система нелинейных алгебраических уравнений относительно A_i, B_i, C_i . Эта система исследуется при следующих предположениях:

а) затухание системы достаточно мало ($\chi |B_i| \ll |A_i|$, $|B_i| \ll |A_i|$; ($i=1,2$)),

б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившиеся колебания с конечной амплитудой вокруг состояния, бесконечно мало отличающегося от невозмущенного ($|A_i| \gg |C_j|$; $j=1,2$). Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведениями величин B_1, B_2, C_1 и C_2 , указанную нелинейную систему представим:

$$\begin{aligned} A_1(1 - \theta^2) - \frac{2}{3}kvA_2 + 2kv^2(\alpha_{11}A_1C_1 + \alpha_{12}A_2C_2) + \frac{3}{4}kv^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \\ + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) + 2L(\delta_{11}A_1C_1 + \delta_{12}A_2C_2) = 0, \\ A_2(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{2}{3}kvA_1 + kv^2\alpha_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) + \frac{3}{4}kv^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \\ + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) + L\delta_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_1 = -Kv^2 \left[(L(\delta_{11}A_1^2 + \delta_{12}A_2^2) + \alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_2 - (L\delta_{21} + \alpha_{21})A_1A_2\Delta_4 \right] / 2\Delta \\ C_2 = -Kv^2 \left[(L\delta_{21} + \alpha_{21})A_1A_2\Delta_1 - L(\delta_{11}A_1^2 + \delta_{12}A_2^2) + (\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_3 \right] / 2\Delta \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 1 + \frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2 + Kv^3\beta_{11}A_1A_2, \quad \Delta_2 = \gamma^2 + Kv^3\beta_{22}A_1A_2 + \frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2, \\ \Delta_3 = \frac{2}{3}Kv + \frac{3}{2}Kv^3\beta_{21}A_1^2 + \frac{1}{2}Kv^3\beta_{22}A_2^2 + Q\gamma_{21}A_1A_2, \\ \Delta_4 = -\frac{2}{3}Kv + \frac{3}{2}Kv^3\beta_{12}A_2^2 + \frac{1}{2}Kv^3\beta_{11}A_1^2 + Q\gamma_{12}A_1A_2, \quad \Delta = \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4. \end{aligned}$$

Третий параграф посвящен изучению влияния величины скорости обтекающего потока v на амплитуду A нелинейных колебаний, т. е. изучению функции $A(v)$.

В первом пункте параграфа исследуется влияние сверхзвукового потока на характер зависимости “амплитуда-скорость” нелинейных колебаний пологой оболочки при докритических частотах.

В этом случае численные расчеты системы (26) показывают, что в случае достаточно толстых оболочек для произвольно выбранных значений геометрических параметров задачи изменение частоты θ имеет существенное влияние (как качественное, так и количественное) на зависимость амплитуда-скорость. А именно:

- если $b/a < 1$ и θ достаточно меньше θ_{cr} , то существует такое значение скорости обтекающего потока v_* , что при $v \in [0, v_*]$ функции $A(v)$ является однозначной и монотонно убывающей, а при $v > v_*$ она является трехзначной и ее поведение аналогично случаю, когда $v \in (0, v_*)$;