

A 01.01.01  
d-20

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Արժրուն Արշալույսի Սարգսյան

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐ ՖԱԲԵՐ-ՇԱՌԻԴԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՎ  
ԵՎ ԱԳԱՅ ԱԼԳՈՐԻԹՄԸ

Ա. 01.01 – “մաթեմատիկական անալիզ” մասնագիտությամբ  
ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական  
աստիճանի հայցման ատենախոսության

**ՍԵՂՄԱԳԻՐ**

Երևան 2008

---

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Саргсян Арцрун Аршалуйсович

НЕЛИНЕЙНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА-  
ШАУДЕРА И ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
А.01.01-“математический анализ”

Ереван 2008

Ատենախոսությունը կատարված է Ռուս-Հայկական (Սլավոնական) Պետական Համալսարանում:

Ատենախոսության թեման հաստատված է Երևանի Պետական Համալսարանում:


Գիտական ղեկավար - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  
Ս. Գ. Գրիգորյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ  
Ա. Ա. Սահակյան  
- ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ  
Ս. Ա. Եպիսկոպոսյան

Առաջատար կազմակերպություն - Վարչավայրի Համալսարան, Լեհաստան

Պաշտպանությունը կկայանա 2008թ. մայիսի 13-ին ժամը 15.00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանին կից 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով. 375049, Երևան, Ալ. Մանուկյան փ. 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:  
Սեղմագիրն առաքված է 2008թ. ապրիլի 12 -ին.

Մասնագիտական խորհրդի գիտ. քարտուղար,  
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ,  
 Ս. Ս. Հարությունյան

Диссертация выполнена в Российско-Армянском (Славянском) Государственном Университете.

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете.

Научный руководитель - доктор физ-мат. наук, профессор  
М. Г. Григорян

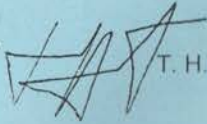
Официальные оппоненты - доктор физ-мат. наук, член-корр. НАН РА  
А. А. Саакян  
- кандидат физ-мат. наук, доцент  
С. А. Епископосян

Ведущая организация - Варшавский Университет, Польша

Защита диссертации состоится 13-го мая 2008 года в 15.00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском Государственном Университете по адресу: 375049, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 12 апреля 2008г.

Ученый секретарь специализированного совета,  
кандидат физ-мат. наук, доцент  
 Т. Н. Арутюнян



16 95 - 2008

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Работа посвящена важной и бурно развивающейся области математического анализа - теории нелинейной аппроксимации. Наиболее активные исследования в этой области проводятся с конца 20-ого века. В этом направлении интересные результаты получены Р. ДеВором [1], В. Н. Темляковым [1-3], С. В. Конягиным [2], П. Воўтащчыком [5], А. Камонт [6], М. Г. Григоряном [7-10] и другими авторами (см. [4], [9], [11-14]).

### Цель работы.

1) исследование вопросов сходимости жадного алгоритма в  $C[0,1]$  по системе Фабера-Шаудера и по подсистемам системы Фабера-Шаудера.

2) исследование поведения жадного алгоритма в  $C[0,1]$  по системе Фабера-Шаудера после исправления функции на фиксированном множестве малой меры.

3) изучение демократичности системы Фабера-Шаудера и подсистем системы Фабера-Шаудера в  $C[0,1]$ .

**Методы исследования.** Применяются методы теории функций и функционального анализа.

**Научная новизна.** Все результаты диссертации являются новыми.

**Практическая и теоретическая ценность.** Тема предлагаемой работы представляет теоретический интерес. Результаты и методы работы могут найти применение при изучении аналогичных вопросов для других базисов.

**Апробация полученных результатов.** Основные результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры математического анализа математического факультета ЕГУ (руководители Г.Г. Геворкян и А.А. Саакян), на семинаре кафедры высшей математики физического факультета ЕГУ

(руководитель М.Г. Григорян), на международных конференциях "Harmonic analysis and approximations, III" (Цахкадзор, Армения 2005), "Ряды Фурье и Их Приложения" (стендовый доклад) (Ростов-на-Дону, Россия 2006).

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 статьях, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 66 страницах, состоит из введения, 3 параграфов и списка цитированной литературы, включающего 46 наименований.

## Содержание работы

Сначала напомним определение системы Фабера-Шаудера. Это система функций  $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $x \in [0,1]$ , в которой  $\varphi_0(x) \equiv 1$ ,  $\varphi_1(x) = x$  и при  $n = 2^k + i$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ;  $i = 1, 2, \dots, 2^k$

$$\varphi_n(x) = \varphi'_k(x) \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если } x = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна на} \\ \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \text{ и на } \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right]. \end{cases}$$

$k$  называется рангом функции  $\varphi'_k(x)$ . Носитель функции  $\varphi'_k(x)$  ( $n \geq 2$ ) системы Фабера-Шаудера обозначим через  $\Delta_n = \Delta'_k$ ,  $n = 2^k + i$ . Система Фабера-Шаудера - базис в пространстве  $C[0,1]$  (см. [15]).

Далее пусть  $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  нормированный базис в банаховом пространстве  $X$ . Тогда для каждого элемента  $f \in X$  существует единственный ряд по системе  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  сходящийся к  $f$  по норме пространства  $X$ :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) \psi_n.$$

**Определение 1.** Базис  $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется безусловным базисом в  $X$ , если для любого элемента  $f \in X$  и для любой перестановки неотрицательных целых чисел  $\rho = \{\rho(n)\}_{n=1}^{\infty}$ , ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{\rho(n)}(f) \psi_{\rho(n)}$$

сходится к  $f$  по норме пространства  $X$ .

**Определение 2.** Система  $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется демократичной системой в  $X$ , если для любых двух конечных множеств индексов  $P$  и  $Q$ , с одинаковыми числами элементов, выполняется

$$\left\| \sum_{k \in P} \psi_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k \in Q} \psi_k \right\|_X,$$

где постоянная  $C = C(X, \Psi)$  не зависит от  $P$  и от  $Q$ .

Перестановку неотрицательных целых чисел (необязательно всех)  $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$  назовем убывающей, если

$$|A_{\sigma(n)}(f)| \geq |A_{\sigma(n+1)}(f)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Множество таких перестановок обозначим через  $D(f, \Psi)$ . В случае строгих неравенств  $D(f, \Psi)$  содержит только одну убывающую перестановку. Определим  $m$ -тый жадный аппроксимант элемента  $f$  по базису  $\Psi$ , отвечающий перестановке  $\sigma \in D(f, \Psi)$  следующим образом

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi, \sigma) := \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)} \psi_{\sigma(n)}.$$

Этот нелинейный метод аппроксимации известен как жадный алгоритм (см. например [2]).

**Определение 3.** Говорят, что жадный алгоритм элемента  $f \in X$  по системе  $\Psi$  сходится, если существует  $\sigma \in D(f, \Psi)$ , для которой

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = 0. \quad (1)$$

Если система  $\Psi$  является безусловным базисом, то ясно, что последовательность  $\{G_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$  сходится к  $f$ , т.е. для нее имеет место (1) независимо от выбора  $\sigma \in D(f, \Psi)$ .

Положим

$$\zeta_m(f, \Psi) := \inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_m; k_1, \dots, k_m} \left\| f - \sum_{i=1}^m \alpha_i \psi_{k_i} \right\|_X.$$

$\zeta_m(f, \Psi)$  называется  $m$ -членным наилучшим приближением элемента  $f$  по системе  $\Psi$ . Наилучшее, что можно ожидать от  $G_m(f, \Psi, \sigma)$ , это

$$\|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = \zeta_m(f, \Psi).$$

**Определение 4.** Базис  $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^\infty$  называется *гриди базисом* в  $X$ , если для любого элемента  $f \in X$ , существует перестановка  $\sigma \in D(f, \Psi)$ , для которой

$$\|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X \leq K \cdot \zeta_m(f, \Psi), \quad (2)$$

где постоянная  $K = K(X, \Psi)$  не зависит от  $f$  и от  $m$ .

В работе [2] доказано, что если базис  $\Psi$  является гриди базисом в  $X$ , то (2) имеет место для любой перестановки  $\sigma \in D(f, \Psi)$ .

**Определение 5.** Базис  $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^\infty$  называется *квази-гриди базисом* в  $X$ , если для любого элемента  $f \in X$  и перестановки  $\sigma \in D(f, \Psi)$  выполняется (1).

Очевидно, что гриди базис является также квази-гриди базисом. В работе [2] доказана следующая теорема:

**Теорема (С. Конягин, В. Темляков).** Базис является гриди базисом тогда и только тогда, когда она является безусловным и демократичным базисом.

В работе [5] доказана

**Теорема (П. Войтащик).** Для того, чтобы базис  $\Psi$  был квази-гриди базисом в  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента  $f \in X$ , для любой перестановки  $\sigma \in D(f, \Psi)$  и натурального числа  $m$  выполнялось неравенство

$$\|G_m(f, \Psi, \sigma)\|_X \leq B_0 \cdot \|f\|_X,$$

где постоянная  $B_0 = B_0(X, \Psi)$  не зависит от  $f$  и от  $m$ .

В работе [4] доказано, что в пространстве  $C[0,1]$  не существует квази-гриди базиса. Следовательно, в случае системы Фабера-Шаудера (система Фабера-Шаудера базис в пространстве  $C[0,1]$ , (см. [15])) для любого положительного числа  $B$  существуют функция  $f_0 \in C[0,1]$ , перестановка  $\sigma_0 \in D(f_0, \Phi)$  и натуральное число  $m_0$ , для которых

$$\|G_{m_0}(f_0, \Phi, \sigma_0)\|_C > B \cdot \|f_0\|_C,$$

где  $\|\cdot\|_C$  - норма пространства  $C[0,1]$ . Отметим, что доказательство этого результата не имеет конструктивного характера. В первом параграфе приводится конструктивное доказательство этого результата со следующими усилениями:

**Теорема 1.1.** Для точки  $x_0 \in [0,1]$ , существует функция  $f_0 \in C[0,1]$ , такая что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)}(f_0) \varphi_{\sigma(n)}(x_0) = +\infty,$$

какого бы не было  $\sigma \in D(f_0, \Phi)$ , тогда и только тогда, когда

$$x_0 \in [0,1] \setminus \left\{ \frac{i}{2^k}, k=0,1,\dots; i=0,1,\dots,2^k \right\}.$$

**Теорема 1.2.** Существует множество  $E_0 \in [0,1]$  мощности континуума и функция  $f_0(x) \in C[0,1]$  такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x) = +\infty, \text{ для любого } x \in E_0,$$

какого бы не было  $\sigma \in D(f_0, \Phi)$ .

Далее, имеет место

**Теорема 1.3.** Существуют функция  $f_0(x) \in C[0,1]$ , для которой множество  $D(f_0, \Phi)$  содержит одну убывающую перестановку, и подпоследовательности  $\{M_k\}_{k=1}^\infty$  и  $\{N_k\}_{k=1}^\infty$  натуральных чисел такие, что

$$1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} G_{M_k}(f_0, \Phi, x) = +\infty, \text{ п.в. на отрезке } [0,1],$$

$$2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|G_{N_k}(f_0, \Phi, x) - f_0(x)\|_C = 0.$$

Из этой теоремы вытекает следующее

**Следствие.** Существует функция  $f_0(x) \in C[0,1]$ , жадный алгоритм которой расходится по мере на  $[0,1]$ .

Отметим также, что этой теоремой дается положительный ответ одного вопроса С. Конягина, поставленного после доклада автора на международной конференции "Harmonic Analysis and Approximations III", 20-27 September 2005, Tsahkadzor, Armenia": существует ли непрерывная на  $[0,1]$  функция, жадный алгоритм которой по системе Фабера-Шаудера расходится на множестве положительной меры?

Далее, нетрудно видеть, что если коэффициенты разложения функции  $f(x) \in C[0,1]$  по системе Фабера-Шаудера удовлетворяют условию

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2^{1+\varepsilon} n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty \ (\varepsilon > 0),$$

то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) \varphi_n(x)$  абсолютно (а значит, и безусловно) сходится по норме пространства  $C[0,1]$ .

Верна следующая теорема:

**Теорема 1.4.** *Существует функция  $f_0(x) \in C[0,1]$  коэффициенты разложения которой по системе Фабера-Шаудера удовлетворяют условию*

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

и жадный алгоритм которой расходится по норме пространства  $C[0,1]$ .

Во втором параграфе изучается сходимость жадного алгоритма в подпространствах  $C[0,1]$  порожденные подсистемами системы Фабера-Шаудера и демократичность подсистем системы Фабера-Шаудера.

Пусть  $S = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, а  $\Lambda(n)$  - число элементов  $S$  меньше  $n$ . Положим

$$\rho(S) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m}.$$

$\rho(S)$  называется плотностью множества  $S$ .

Пусть  $\Phi_{S'} = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  такая подсистема системы Фабера-Шаудера, что носители функций  $\varphi_{n_k}(x)$ ,  $k=1,2,\dots$ , попарно не пересекаются (например  $\Phi_{S'} = \{\varphi_{2^{i+2}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ). Очевидно, что  $\Phi_{S'}$  является безусловным, следовательно и квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки и  $\rho(S') = 0$ .

Справедлива следующая

**Теорема 2.1.** *Существует подсистема системы Фабера-Шаудера с плотностью нуль, которая не является квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки.*

Далее, для каждого  $x \in [0,1]$  через  $E_x$  обозначим множество, элементы которого являются числа, выражающие количества поочередных повторений 0 и 1 в двоичном разложении числа  $x$  (будем считать, что повторениям в одиночное число раз в  $E_x$  соответствует один элемент, и  $\infty$  будем считать одним числом). Например для

$$x^{(2)} = 0,00001110011110(1)$$

будет  $E_x = \{4,3,2,1,\infty\}$ .

Определим классы подсистем  $\Phi_{(1)}$ ,  $\Phi_{(2)}$  и  $\Phi_{(3)}$  системы Фабера-Шаудера следующим образом: через  $\Phi_{(1)}$  обозначим множество тех подсистем  $\Phi_R = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , для которых

$$\text{mes } \bar{\Delta}_k = \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \bar{\Delta}_{k+1} \subset \bar{\Delta}_k, \quad k \in N,$$

через  $\Phi_{(2)}$  обозначим множество тех подсистем

$\Phi_{R'} = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , для которых  $\bar{\Delta}_{k+1} \subset \bar{\Delta}_k$ ,  $i=1,2,\dots$ , и наконец

через  $\Phi_{(3)}$  обозначим множество тех подсистем

$\Phi_{R'} = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset \Phi_{(2)}$ , для которых  $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}_k \in Q_{[0,1]}$ , где  $Q_{[0,1]}$

есть совокупность рациональных чисел отрезка  $[0,1]$ , а  $\bar{\Delta}_k$  - замыкание  $\Delta_k$ . Ясно, что  $\Phi_{(1)} \subset \Phi_{(2)}$  и что системы класса  $\Phi_{(2)}$  являются подсистемами систем класса  $\Phi_{(1)}$  или совпадают с ними.

Теорема 2.1 следует из более общей теоремы:

**Теорема 2.2.** *Для того, чтобы подсистема  $\Phi_{R'} = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)} \cup \Phi_{(3)}$  являлась квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо и достаточно, чтобы*

$$x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{\Delta}_k \in \left\{ \frac{i}{2^k}, k=0,1,\dots; i=0,1,\dots,2^k \right\}.$$

Верны также следующие теоремы:

**Теорема 2.3.** *Для того, чтобы подсистема  $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi_{(1)}$  являлась демократичной системой в  $C[0,1]$ , необходимо и*

достаточно, чтобы число элементов множества  $E_{x_0}$  ( $x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}_k$ ) было конечно.

**Теорема 2.4.** Для того, чтобы подсистема  $\Phi_R = \{\bar{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi_{(2)}$  являлась демократичной системой в  $C[0,1]$ , достаточно, чтобы число элементов множества  $E_{x_0}$  ( $x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}_k$ ) было конечно.

Итак, жадный алгоритм в  $C[0,1]$  по системе Фабера-Шаудера сходится не для всех функций из  $C[0,1]$ . В третьем параграфе рассматривается поведение жадного алгоритма в  $C[0,1]$  по системе Фабера-Шаудера, после исправления функции на множестве малой меры.

Идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н.Н. Лузину. Им в 1912 г. был получен следующий знаменитый результат (см. [16]).

**Теорема (С - свойство Лузина).** Для любой измеримой, почти всюду конечной на  $[0,1]$  функции  $f(x)$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует измеримое множество  $E$  с мерой  $|E| > 1 - \varepsilon$  и непрерывная на  $[0,1]$  функция  $g(x)$ , совпадающая с  $f(x)$  на  $E$ .

В 1939г. Д.Е. Меньшов [17] доказал следующую фундаментальную теорему

**Теорема (Усиленное С - свойство Меньшова).** Пусть  $f(x)$  измеримая функция, конечная почти всюду на  $[0, 2\pi]$ . Каково бы не было  $\varepsilon > 0$ , можно определить непрерывную функцию  $g(x)$ , совпадающую с  $f(x)$  на некотором множестве  $E$ ,  $|E| > 2\pi - \varepsilon$ , и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на  $[0, 2\pi]$ .

Далее в этом направлении интересные результаты получены Д.Е. Меньшовым [18], А.А. Талаляном [19], Ф.Г. Арутюняном [20], К.И. Осколковым [21], Б.С. Кашиним [22], Ш.В. Хеладзе [23], М.Г. Григорьяном [24-27], К.С. Казарьяном [26] и другими авторами.

В третьем параграфе дается положительный ответ на естественный вопрос: можно ли изменить значения любой функции  $f(x) \in C[0,1]$  на множестве малой меры так, чтобы жадный алгоритм вновь полученной функции  $g(x) \in C[0,1]$  сходилась в  $C[0,1]$ . Верна следующая теорема

**Теорема 3.1.** Для любого  $\varepsilon > 0$  и для каждой функции  $f(x) \in C[0,1]$ , можно найти функцию  $g(x) \in C[0,1]$ ,  $\text{mes}\{x \in [0,1], g(x) \neq f(x)\} < \varepsilon$  и такую, что ее жадный алгоритм равномерно сходится к ней.

Эта теорема следует из более общей теоремы:

**Теорема 3.2.** Для любого  $0 < \varepsilon < 1$  существует измеримое множество  $E \subset [0,1]$  с мерой  $|E| > 1 - \varepsilon$  такое, что для каждой функции  $f(x) \in C[0,1]$  можно найти функцию  $g(x) \in C[0,1]$ , совпадающую с  $f(x)$  на  $E$ , и такую, что все коэффициенты разложения этой функции по системе Фабера-Шаудера отличны от нуля, множество  $D(g, \Phi)$  содержит один элемент, жадный алгоритм этой функции по системе Фабера-Шаудера равномерно сходится к ней, и имеет место следующее неравенство:

$$\|G_m(g, \Phi, x)\|_C \leq 5 \cdot \|g(x)\|_C \leq 10 \cdot \|f(x)\|_C, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

В заключение выражаю благодарность профессору М. Г. Григорьяну, под руководством которого выполнена работа.

## Заклучение

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

а) Построены подмножество отрезка  $[0,1]$  мощности континуума и непрерывная на  $[0,1]$  функция, жадный алгоритм которой по системе Фабера-Шаудера расходится к  $+\infty$  во всех точках этого множества.

б) Построена непрерывная на  $[0,1]$  функция, последовательность жадных аппроксимантов которой по системе Фабера-Шаудера имеет как подпоследовательность расходящейся к  $+\infty$  почти всюду на  $[0,1]$ , так и подпоследовательность равномерно сходящейся к ней.

в) Построена непрерывная на  $[0,1]$  функция, коэффициенты разложения которой по системе Фабера-Шаудера удовлетворяют условию

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

и жадный алгоритм которой расходится по норме пространства  $C[0,1]$ .

г) Описаны подсистемы системы Фабера-Шаудера, которые являются квази-гриды базисами в  $C[0,1]$ , на замыканиях своих линейных оболочек.

д) Описаны подсистемы системы Фабера-Шаудера, которые являются демократичными системами в  $C[0,1]$ .

е) Для любого  $\varepsilon \in (0,1)$  построена измеримое множество  $E \subset [0,1]$  с мерой  $|E| > 1 - \varepsilon$  такое, что значений любой непрерывной на  $[0,1]$  функции можно изменить вне  $E$  так, чтобы жадный алгоритм вновь полученной непрерывной функции по системе Фабера-Шаудера равномерно сходил к ней.

## Литература

- [1] DeVore R. A., Temlyakov V. N., "Some remarks on greedy algorithms", *Advances in Computational Math.*, N5, 1996, pp. 173-187.
- [2] Konyagin S. V. and Temlyakov V. N., "A remark on Greedy approximation in Banach spaces", *East J. on Approx.*, v.5, 1999, pp.1-15.
- [3] Temlyakov V. N., "Nonlinear Methods of Approximation", *Found. Comput. Math.*, N3, 2003, pp. 33-107.
- [4] Dilworth S. J., Kalton N. J., Kutzarova D., "On the existence of almost greedy bases in Banach spaces", *STUDIA MATHEMATICA*, v.159, N1, 2003, pp. 67-101.
- [5] Wojtaszczyk P., "Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems", *Journal of Approximation Theory*, v.107, 2000, pp. 293-314.
- [6] Kamont A., "General Haar systems and greedy approximation", *STUDIA MATH.*, v.145, N2, 2001, pp. 165-184.
- [7] Grigorian M. G., "Greedy algorithm and applications", *Isaac International Conference, 2002, Yerevan, Armenia*.
- [8] Григорян М. Г., "О сходимости в метрике  $L^p$  жадного алгоритма по тригонометрической системе", *Изв. НАН Армении*, т. 39, N4, 2004, см. 89-116.
- [9] Grigorian M. G., Zink R. E., " Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system", *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 134, N12, 2006, pp. 3495-3505.
- [10] Григорян М. Г., Гогян С. А., "Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций", *Analysis Mathematica* т. 32, N1, 2006, см. 49-80.
- [11] Геворкян Г., Камонт А., "Два замечания о квази-гриды базисах в пространстве  $L^p$ ", *Известия НАН Армении*, т. 40, N1, 2005.
- [12] Gogyan S. L., "On the greedy algorithm with regard to the Haar subsystems", *East J. on Approx.*, v.11, N2, 2005, pp. 221-236.
- [13] Саакян А. А., "О сходимости жадного алгоритма для непрерывных функций после замены переменных", *Известия НАН Армении, Математика*, т. 37, N4, 2002, см. 63-72.
- [14] Gribonval R., Nielsen M., "Some remarks on nonlinear approximation with Shauder bases", *East Journal on Approximations*, v. 7, N3, 2001, pp. 267-285.
- [15] Schauder J., "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Functionalraumen", *Math. Zeit.*, Bd. 26, 1927, S. 47-65.

[16] Лузин Н. Н., "К основной теореме интегрального исчисления", Мат.Сб., т.28, N 2, 1912, стр. 266-294.

[17] Меньшов Д. Е., "О равномерной сходимости рядов Фурье", Мат.Сб., т.53, N 2, 1942, стр. 67-96.

[18] Меньшов Д. Е., "О рядах Фурье от суммируемых функций", Тр.Моск. матем. общва, т. 1, 1952, стр. 5-38.

[19] Талалян А. А., "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции, Мат. Заметки, т.33, N5, 1983, стр. 715-722".

[20] Арутюнян Ф. Г., "О рядах по системе Хаара", Доклады АН Арм. ССР., т. 42, N3, 1966, стр. 134-140.

[21] Осколков К. И., "Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры", ДАН СССР-1976, Т.228, N2, стр. 304-306.

[22] Кашин Б. С., Кошелева Г. Г., "Об одном подходе к теоремам об исправлении", Вестник МГУ, Сер. мат. мех., N1, 1988, стр. 6-8.

[23] Хеладзе Ш. В., "Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрике  $L^1$ ", Мат. сб., т. 107, N 2, 1978, стр. 245-258.

[24] Григорян М. Г., "О сходимости в метрике  $L^1$  и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат.Сб., т.181, N 8, 1990, стр. 1011-1030.

[25] Grigorian M. G. "On the representation of functions by orthogonal series in weighted  $L^p$  spaces", Studia. Math., v. 134, N3, 1999, pp. 207-216.

[26] Grigorian M. G., Kazarian K. S. and Soria F., "Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod. functions", Trans. Amer. Math. Soc. (TAMS), v. 352, N8, 2000, pp. 3777-3799.

[27] Григорян М. Г., "Об усиленном  $L^p_\mu$  свойстве", Матем. сборник, N10, 2003, стр. 77-106.

## Работы автора по теме диссертации

[I] Саргсян А. А., "О квази-гриди базисности системы Фабера - Шаудера", Доклады НАН Арм., т. 105, N4, 2005, стр. 333-337.

[II] Sargsian A. A., "Greedy algorithm with regard to Schauder subsystems", Harmonic Analysis and Approximations III, 20-27 September 2005, Tsahkadzor, Armenia, pp. 65-66.

[III] Саргсян А. А., "Квази-гриди системность некоторых подсистем системы Фабера - Шаудера в  $C[0,1]$ ", Известия НАН Арм., т. 40, N3, 2005, стр. 46-54.

[IV] Саргсян А. А., "О квази-гриди системности и демократичности некоторых подсистем системы Фабера - Шаудера", Известия НАН Арм., т. 41, N2, 2006, стр. 57-74.

[V] Саргсян А. А., "Квази-гриди базисность системы Фабера - Шаудера", Теория функций и смежные вопросы, Материалы конференции, посвященной 90-летию Гаўка Бадаляна, 2006, стр. 46-47.

[VI] Григорян М. Г., Саргсян А. А., "Нелинейная аппроксимация по системе Фабера - Шаудера", XIV Международная Конференция Математика, Экономика, Образование. IV Международный Симпозиум Ряды Фурье и Их Приложения, 2006 г, Ростов-на-Дону, Россия, стр. 87-88.

[VII] Grigoryan M. G. and Sargsyan A. A., "Divergence a.e. of the greedy algorithm by Faber-Schauder system for continuous functions", East Journal on Approx., v. 13, N 2, 2007, pp. 199-209.

[VIII] Саргсян А. А., "Расходимость жадного алгоритма по системе Фабера-Шаудера на множестве мощности континуума", Известия НАН Арм., т. 42, N2, 2007, стр. 69-77.

## Ամփոփում

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները:

ա) Կառուցվել են  $[0,1]$  հատվածի կոնտինուում հզորություն ունեցող ենթաբազմություն և  $[0,1]$ -ում որոշված անընդհատ ֆունկցիա, որի ազահ ալգորիթմն ըստ Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգի տարամիտում է  $+\infty$ -ի այդ բազմության բոլոր կետերում:

բ) Կառուցվել է  $[0,1]$ -ում որոշված անընդհատ ֆունկցիա, որի ըստ Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգի ազահ մոտարկիչների հաջորդականությունն ունի ինչպես  $[0,1]$ -ում համարյա ամենուրեք  $+\infty$ -ի տարամիտող, այնպես էլ հավասարաչափ իրեն զուգամիտող ենթահաջորդականություններ:

գ) Կառուցվել է  $[0,1]$ -ում որոշված անընդհատ ֆունկցիա, որի ըստ Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգի վերլուծության գործակիցները բավարարում են

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right), \text{ երբ } n \rightarrow \infty,$$

պայմանին, ու որի ազահ ալգորիթմն ըստ Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգի տարամիտում է  $C[0,1]$  տարածության նորմով:

դ) Նկարագրված են Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգի ենթահամակարգեր, որոնք քվազի-գրիդի բազիս են  $C[0,1]$ -ում իրենց գծային թաղանթի փակման վրա:

ե) Նկարագրված են Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգի ենթահամակարգեր, որոնք դեմոկրատիկ են  $C[0,1]$ -ում:

զ) Ցանկացած  $\varepsilon \in (0,1)$  թվի համար կառուցվել է  $1-\varepsilon$ -ից մեծ չափ ունեցող  $E \subset [0,1]$  բազմություն այնպիսին, որ  $[0,1]$ -ում որոշված կամայական անընդհատ ֆունկցիայի արժեքները  $E$ -ից դուրս փոխելուց հետո ստացված անընդհատ նոր ֆունկցիայի ազահ ալգորիթմն ըստ Ֆաբեր-Շաուդերի համակարգի հավասարաչափ զուգամիտի իրեն:

## Summary

The following main tasks have been examined in the PhD thesis:

a) Subset of the section  $[0,1]$  with continuum cardinality and continuous in  $[0,1]$  function are constructed, such that the greedy algorithm of that function with respect to Faber-Schauder system diverges to  $+\infty$  in all points of that set.

b) Continuous in  $[0,1]$  function is constructed, which's sequence of greedy approximants with respect to Faber-Schauder system has a subsequence divergent to  $+\infty$  a.e. in  $[0,1]$  and a subsequence uniformly convergent to it.

c) Continuous in  $[0,1]$  function is constructed with coefficients of expansion by Faber-Schauder system satisfying the condition

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right), \text{ when } n \rightarrow \infty,$$

and with greedy algorithm divergent by  $C[0,1]$  norm.

d) Faber-Schauder subsystems  $\Phi_R = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  are described which are quasi-greedy in  $\overline{\text{span}}\{\Phi_R\}$  (where the closure is taken in  $C[0,1]$  norm).

e) Faber-Schauder subsystems are described which are democratic in  $C[0,1]$ .

f) For each  $\varepsilon \in (0,1)$  it is constructed a measurable set  $E \subset [0,1]$  with measure  $|E| > 1-\varepsilon$ , such that it is possible to alter the values of an arbitrarily given continuous in  $[0,1]$  function outside  $E$ , so that the greedy algorithm with respect to Faber-Schauder system, when applied to the continuous function thus altered, yields a sequence of approximants that does uniformly converge in  $[0,1]$ .

15.05.2014

