Ե Ր Ե Վ Ա Ն Ի   Պ Ե Տ Ա Կ Ա Ն   Հ Ա Մ Ա Լ Ս Ա Ր Ա Ն

ՀԱՅԿ ԱՐԹՈՒՐԻ ՔԱՄԱԼՅԱՆ

$\mathcal{A}$-ԱՐԺԵՔԱՆԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.01.02 – «Դիֆերենցիալ հավասարումներ և մաթեմատիկական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ

Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

ԵՐԵՎԱՆ – 2014

Е Р Е В А Н С К И Й   Г О С У Д А Р С Т В Е Н Н Ы Й   У Н И В Е Р С И Т Е Т

ГАЙК АРТУРОВИЧ КАМАЛЯН

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ $\mathcal{A}$-ЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02
“Дифференциальные уравнения и математическая физика”

Е Р Е В А Н – 2 0 1 4

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	ֆ-.մ.գ. դ. Մ.Ի. Կարախանյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆ-մ. գ. դ. Խ.Ա. Խաչատրյան
	ֆ-մ. գ. թ. Գ.Ս. Հակոբյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Կազանի պետական էներգետիկ համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2014 թ. հունիսի 30-ին ժ. 15^{00}-ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցեն՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2014 թ. մայիսի 29-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար

ֆ.-մ. գ. դոկտոր Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	д. ф-м. н. М.И. Караханян
Официальные оппоненты:	д. ф-м. н. Х.А. Хачатрян
	к. ф-м. н. Г.С. Акопян
Ведущая организация:	Казанский государственный Энергетический университет

Защита диссертации состоится 30 июня 2014г. в 15^{00} ч. на заседании специализированного совета ВАК-а 050, действующего при Ереванском государственном университете.
Адрес: 0025, г. Ереван, ул.Ал. Манукяна 1.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 29-го мая 2014 г.

Ученый секретарь специализированного совета

доктор физ-мат. наук Т. Н. Арутюнян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Спектральная теория нормальных операторов имеет важные приложения в различных задачах математической физики.

Спектральная теория в широком ее смысле (с точки зрения теории коммутативных, комплексных банаховых алгебр) является одним из актуальных направлений функционального анализа. Интерес к этой теории обусловлен тем, что оно имеет непосредственное применение в теории динамических систем, в эргодической теории, в математической физике, в теории аппроксимации и т.д..

В работе [1] Д. фон Нейманом была поставлена следующая задача: для ограниченных нормальных операторов A и B действующих в гильбертовом пространстве из равенства $[A, B] = AB - BA = 0$ следует ли равенство $[A, B^*] = 0$. В дальнейшем в более общей ситуации это свойство будем называть "эффектом фон Неймана".

В случае конечномерных пространств это задача была решена в [1]. На вышеуказанный вопрос положительный ответ дал Б. Фуглиде (см[2]). Обобщение этого результата имеющее ключевое значение в спектральной теории нормальных операторов(см. [5]) было получено в работах К. Путнама (см. [3]) и С. Берберяна (см. [4]).

Асимптотический вариант этого эффекта, были иследованы в работах Р. Мурра (см. [6]), Д. Роджерса (см. [7]), Т. Фуруты (см. [8]).

Е.А. Горином и М.И. Караханяном (см [9]-[14]) эта задача была рассмотрена в случае произвольной банаховой алгебры $\mathcal{A}$ с единицей. В работе [12] Е.А. Гориным была поставлена следующая задача: привести пример комплексной банаховой алгебры $\mathcal{A}$ и элемента $a, b \in \mathcal{A}$, таких, что коммутатор $[a, b] = ab - ba \neq 0$, но "эффект фон Неймана" верен.

На основе "эффекта фон Неймана" (см. [15]-[17]) Д. Глобевником и И. Видавом иследованы свойства коммутативности образа аналитических, операторазначных функций. Важную роль при исследовании этих вопросов играют спектральные свойства $\mathcal{A}$-значных (в частности операторнозначных) аналитических функций.

Отметим, что наличие коммутативных подалгебр в некоммутативных алгебрах, порожденных, в частности $\mathcal{A}$-значными аналитическими функциями, позволяют некоторые результаты с коммутативного случая распространить на некоммутативную ситуацию (см. [5]). Последнее позволяет применить спектральные свойства $\mathcal{A}$-значных аналитических функций в теории аппроксимаций.

Интерес к изучению спектральных свойств $\mathcal{A}$-значных аналитических функций, связан, также с возможностью их применения в теории B^*-алгебр, спектральной теории несамосопряженных операторов, в эргодической теории и т.д.

Цель работы

1) Привести пример комплексной банаховой алгебры $\mathcal{A}$ с единицей и пары элементов $a, b \in \mathcal{A}$, при котором верен “эффект фон Неймана”, но $[a, b] = ab - ba \neq 0$.
2) Привести критерий, при котором элемент алгебры $\mathcal{A}$ является “выпуклоидным”, т.е. $\langle sp(a) \rangle = V(a)$, где $V(a) = \{\varphi(a): \|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1}) = 1,\ \varphi \epsilon \mathcal{A}^*\}$ – алгебраический числовой образ элемента $a \in \mathcal{A}$, $\langle sp(a) \rangle$ – выпуклая оболочка спектра этого элемента.
3) С помощу применения теоремы Пикара исследовать некоторые свойства $\mathcal{A}$-значных целых функций.
4) Исследовать свойства коммутативности, связанные со свойствами $\mathcal{A}$-значных аналитических функций. Получить $\mathcal{A}$-значные аналоги теорем о коммутативности и применить их в теории некоммутативных банаховых алгебр.
5) Для голоморфных по Лорху аналитических функций, заданных на инволютивной, коммутативной, комплексной, банаховой алгебре $\mathcal{A}$ с единицей, получить аналог классической теоремы С. Бернштейна о

приближении ограниченной равномерно непрерывной функции на $\mathbb{R}$ последовательностью целых функций из пространств Бернштейна.

Методы исследования

Применены методы теории функций и функционального анализа. Используется теория коммутативных топологических алгебр и спектральная теория несамосопряженных операторов.

Научная новизна

Все результаты являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность

Работа носит теоретический характер и посвящена изучению свойств $\mathcal{A}$-значных аналитических функций, что позволяет получить теоремы типа коммутативности в топологических алгебрах. Доказаны аналоги классических теорем Пикара и Бернштейна, связанных с $\mathcal{A}$-значными целыми функциями.

Аппробация полученных результатов

Основные результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и функционального анализа и на семинаре по банаховым алгебрам и некоторых вопросов теории операторов, факультета математики и механики ЕГУ, на кафедре высшей математики и информатики Иджеванского филиала ЕГУ.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация изложена на 67 страницах, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 53 наименования.

Содержание работы

Первая глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе приведены необходимые сведения по комплексным, банаховым алгебрам, и ключевые факты из теории И.М. Гельфанда по коммутативным банаховым алгебрам, необходимые в дальнейшем.

Пусть $(\mathcal{A};\tau)$- топологическая алгебра, где топология τ является локально выпуклой топологией на алгебре $\mathcal{A}$, в которой умножение непрерывно по каждому из сомножителей и тождественное отображение $(\mathcal{A},\|\cdot\|)\to(\mathcal{A};\tau)$ непрерывно.

Будем говорить, что элемент $a\in Gr(\mathcal{A};\tau)$, если существует такой элемент $b\in(\mathcal{A};\tau)$, что для каждой полунормы P_α порождающую топологию τ имеет место

$$\max\{P_\alpha(\exp(-\lambda b)\exp(\bar{\lambda}a)),P_\alpha(\exp(-\bar{\lambda}a)\exp(\lambda b))\}=o\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\right),$$

когда $|\lambda|\to\infty$, $\lambda\in\mathbb{C}$ (см. [18]).

Отметим, что элемент $b\in(\mathcal{A};\tau)$ в определении класса $a\in Gr(\mathcal{A};\tau)$ определяется по элементу $a\in Gr(\mathcal{A};\tau)$ однозначно.

Ниже $\rho(a)$ будет обозначать спектральный радиус элемента $a\in(\mathcal{A};\tau)$, а $Der(\mathcal{A};\tau)$ множество всех непрерывных $(\mathcal{A};\tau)$-дифференцирований.

Во втором параграфе исследуется асимптотическое свойство “эффекта фон Неймана” для класса $Gr(\mathcal{A};\tau)$ в достаточно широком классе топологических алгебр $(\mathcal{A};\tau)$.

В теореме 1.2.5 показано, что *если элемент* $a\in Gr((\mathcal{A};\tau))$ *и* $U\subset(\mathcal{A};\tau)$ *– окрестность нуля, тогда существует окрестность нуля* $V\subset(\mathcal{A};\tau)$ *обладающая тем свойством, что из условий* $x\in Gr((\mathcal{A};\tau))$, $P_\alpha(x)\le 1$ *для каждой полунормы* P_α *и* $[a,x]\in V$ *следует, что* $[b,x]\in U$.

Далее, в алгебре матриц $\mathcal{B}=M_2\left(BL(B_\sigma(\alpha))\right)$, где $B_\sigma(\alpha)$ – пространство всех целых функций f экспоненциального типа не превосходящего σ, для которых $\|f\|_\alpha=\sup_{\mathbb{R}}\frac{|f(\lambda)|}{(1+|\lambda|)^\alpha}<\infty$, приводится пример пары элементов $a,b\in\mathcal{B}$ для которых $[a,b]=ab-ba\neq 0$, но

$a \in Gr(\mathcal{B})$. Этот пример дает ответ на вопрос поставленный Е.А. Гориным в работе [12].

В третьем параграфе изучаются некоторые спектральные свойства элементов комплексной банаховой алгебры, с точки зрения ее “выпуклоидности”, т.е. когда $\langle sp(a) \rangle = V(a)$, где $V(a)$ – алгебраический числовой образ элемента $a \in \mathcal{A}$, а $\langle sp(a) \rangle$ – выпуклая оболочка его спектра.

Основным результатом третьего параграфа является

Теорема 1.3.1. *Для того, чтобы элемент $a \in \mathcal{A}$ был выпуклоидным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\min_{0 \le \theta \le 2\pi} \left\{ \ln \rho\left(\exp\left(e^{-i\theta} a\right)\right) - \lim_{t \to +0} \frac{\left\| \mathbf{1} + t e^{-i\theta} a \right\| - 1}{t} \right\} \ge 0.$$

Для элемента из класса $Gr(\mathcal{A})$ доказан следующий результат.

Теорема 1.3.2. *Для каждого элемента $a \in Gr(\mathcal{A})$ имеем, что $\overline{\langle sp(a) \rangle} = \langle sp(b) \rangle$, и поэтому $\rho(a) = \rho(b)$.*

Вторая глава посвящена свойствам коммутативности в некоммутативных комплексных топологических алгебрах.

В первом параграфе второй главы для топологических алгебр $(\mathcal{A};\, \tau)$ доказаны следующие результаты.

Теорема 2.1.2. *Пусть $(\mathcal{A};\, \tau)$ – комплексная, полная, локально выпуклая алгебра с единицей и J – замкнутый двусторонний идеал в алгебре $(\mathcal{A};\, \tau)$. Тогда $ac \equiv cb (\mathrm{mod}\, J)$, где элементы $a, b, c \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда для каждой фактор-полунормы q_γ имеем*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} q_\gamma \left(\left(\exp \lambda \hat{b}\right) \hat{c} (\exp(-\lambda \hat{a})) \right) < \infty \,.$$

Теорема 2.1.5. *Пусть $(\mathcal{A};\, \tau)$ – комплексная, полная, локально выпуклая алгебра с единицей и J – замкнутый двусторонний идеал в алгебре $(\mathcal{A};\, \tau)$ и $\mathcal{D} \in Der\big((\mathcal{A};\, \tau)\big)$. Тогда элемент $\mathcal{D}a \in J$ тогда и только тогда, когда для каждой фактор-полунормы q_γ имеем*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} q_\gamma\left((\exp\lambda\mathcal{D})_J(\hat{a})\right) < \infty.$$

В работе [15] Дж. Глобевник и И. Видав доказали, что если $f: \mathcal{D} \to BL(\mathbb{H})$ есть операторнозначная аналитическая функция в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, такая, что при каждом $\lambda \in \mathcal{D}$, $f(\lambda)$ – нормальный оператор в алгебре $BL(\mathbb{H})$, тогда $f(\mathcal{D})$ – коммутативное подмножество в алгебре ограниченных линейных операторов $BL(\mathbb{H})$.

Второй параграф данной главы посвящен обобщению этой теоремы на случай топологических алгебр. Здесь доказана следующая точная теорема

Теорема 2.2.1. *Пусть $\mathcal{A}$ – комплексная банахова алгебра, на которой параллельно задана полная, локально выпуклая топология τ и $f: \Delta \to (\mathcal{A}, \tau)$ есть такая $\mathcal{A}$-значная аналитическая функция, что при каждом $z \in \Delta$ элемент $f(z)$ – квазинормальный элемент алгебры $\mathcal{A}$. Тогда множество $f(\Delta)$ – коммутативное подмножество в алгебре $\mathcal{A}$, где* $\Delta = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$.

Третьем параграфе доказаны следующие результаты.

Теорема 2.3.1. *Пусть $(\mathcal{A};\, \tau)$ – комплексная, полная, локально выпуклая алгебра с единицей и J – замкнутый двусторонний идеал в алгебре $(\mathcal{A};\tau)$ и $\mathcal{D} \in Der\big((\mathcal{A};\, \tau)\big)$. Если элемент $a \in (\mathcal{A};\tau)$ такой, что $\mathcal{D}a \notin J$, то тогда*

$$\bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} V\left((\exp\lambda\mathcal{D})_J(\hat{a})\right) = \mathbb{C}\,.$$

Результат аналогичного характера в терминах внутренних дифференцирований приводит к следующему утверждению

Теорема 2.3.2. *Пусть $(\mathcal{A};\, \tau)$ – комплексная, полная, локально выпуклая алгебра с единицей и J – замкнутый двусторонний идеал в алгебре $(\mathcal{A};\tau)$. Если элементы $a, b, c \in (\mathcal{A};\, \tau)$ такие элементы, что $ac \not\equiv cb (\mathrm{mod}\, J)$, то тогда*

$$\bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} V\left((\exp\lambda\hat{a})\hat{c}\exp\!\big(-\lambda\hat{b}\big)\right) = \mathbb{C}\,.$$

Третья глава посвящена некоторым вопросам теории аппроксимации на комплексной коммутативной банаховой (в частности операторной) алгебре посредством целых по Лорху функций.

Обозначим через $\mathrm{HoL}(\Omega;\, \mathcal{A})$ множество всех голоморфных по Лорху отображений $F\colon \Omega \to \mathcal{A}$, где Ω – открытое множество в $\mathcal{A}$. В частном случае, когда $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ и $\Omega \subset \mathbb{C}$, то мы получаем алгебру обычных голоморфных функций.

Пусть $\mathcal{D}$ – некоторое открытое множество в $\mathbb{C}$. Определим открытое множество в $\mathcal{A}$, задаваемое формулой $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{a \in \mathcal{A}\colon sp(a) \subset \mathcal{D}\}$. Каждому отображению $F \in \mathrm{HoL}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}};\, \mathcal{A})$ сопоставим $\mathcal{A}$-значную аналитическую функцию f$\in \mathrm{HoL}(\mathcal{D};\, \mathcal{A})$ по формуле $f(\lambda) = F(\lambda\mathbf{1})$. Соответствие $f \leftrightarrow F$ является биекцией между пространствами $\mathrm{HoL}(\mathcal{D};\, \mathcal{A})$ и $\mathrm{HoL}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}};\, \mathcal{A})$. Имеет место

Теорема 3.1.1. *Отображение* $f \overset{\alpha}{\longmapsto} \boldsymbol{f}$ *задаваемое формулой*

$$\boldsymbol{f}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} (\lambda\mathbf{1} - a)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda$$

есть мономорфизм алгебры $\mathrm{HoL}(\mathcal{D};\, \mathbb{C})$ *в алгебру* $\mathrm{HoL}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}};\, \mathcal{A})$ *голоморфных по Лорху функций в области* $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{a \in \mathcal{A}\colon sp(a) \subset \mathcal{D}\}$ *в алгебру* $\mathcal{A}$. *Если область* $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ *связна, то*

$$\alpha\colon \mathrm{HoL}(\mathcal{D};\, \mathbb{C}) \to \mathrm{HoL}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}};\, \mathcal{A})$$

есть изомотфизм

Второй параграф посвящен аналогу теоремы Винера-Пэли в коммутативной банаховой алгебре.

Пусть $\Omega_{\mathcal{A}}$ – область в инволютивной, коммутативной, комплексной банаховой алгебре $\mathcal{A}$ с единицей $\mathbf{1}$, $F \in \mathrm{HoL}(\Omega_{\mathcal{A}};\, \mathcal{A})$ и $\varphi \in M_{\mathcal{A}}$, где $M_{\mathcal{A}}$ – пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}$. В случае, когда $\Omega_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, то через $\mathrm{HoL}(\mathcal{A})$ обозначим пространство всех целых по Лорху функций. Имеет место

Теорема 3.2.1. *Пусть* $F \in \mathrm{HoL}(\mathcal{A})$*, а* $\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ *– алгебра Фреше целых комплексозначных функций в компактной топологии (т.е. равномерная сходимость на компактных подмножествах). Тогда отображение* $\pi: M_{\mathcal{A}} \to \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$*, определенная по формуле* $\pi_\varphi = F_\varphi$ *является непрерывным отображением.*

Как говорилось выше, фундаментальным фактом в теории голоморфных по Лорху функций (см. [19], [20) является то, что если $\Omega_{\mathcal{A}}$ – звездная область (в частности шар B_R или вся алгебра $\mathcal{A}$), то для нее существует фактор-функция F_φ для каждого $\varphi \in M_{\mathcal{A}}$ (т.е. существует единственная, комплекснозначная, аналитическая функция g, определенная на $\varphi(\Omega_{\mathcal{A}})$ такая, что $g \circ \varphi = \varphi \circ F$ на $\Omega_{\mathcal{A}}$), где $g \underset{\text{об}}{=} F_\varphi$.

Пусть $\mathcal{A}$ есть V-алгебра, т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$ и отображение $a = \boldsymbol{h} + i\boldsymbol{k} \to a^+ = \boldsymbol{h} - i\boldsymbol{k}$ есть инволюция. Тогда по известной теореме Видава-Пальмера (см. [21]-[24]), алгебра $\mathcal{A}$ совпадает, с точностью до изометрического изоморфизма, с B^* алгеброй. В этом случае $Sym(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{A})$ и возникает два пространства

$E_\sigma(\mathcal{A}) = \{F \in \mathrm{HoL}(\mathcal{A})$, которые представляются в виде $F(a) = \sum_0^\infty \frac{c_k a^k}{k!}$

для которых $\sigma(\hat{c}) \le \sigma\}$ и

$B_\sigma(\mathcal{A}) = \left\{F \in E_\sigma(\mathcal{A}): \sup_{\varphi \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}} \|f(\boldsymbol{h})\| < \infty\right\}$.

Обозначим через

$$W_\sigma(\mathcal{A}) = \left\{F \in E_\sigma(\mathcal{A}): \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}}} \int_{\mathbb{R}} \left|F_\varphi(t)\right|^2 dt < \infty\right\}.$$

Тогда имеет место

Теорема 3.2.2. *Пусть* $F \in W_\sigma(\mathcal{A})$*, тогда существует* $G \in L^2(M_{\mathcal{A}} \times$ $-\sigma\varphi;\sigma\varphi$*, где* $\varphi \in M\mathcal{A}$*, такая, что*

$$\hat{F}(a) = \int_{M_{\mathcal{A}}} \int_{-\sigma(\varphi)}^{\sigma(\varphi)} \chi_a(\varphi, t)\, G(\varphi, t)\, dt_\varphi\, d\mu(\varphi)\,.$$

В третьем параграфе получен операторный вариант теоремы С. Бернштейна о приближении на вещественной оси ограниченной равномерно непрерывной функции целыми функциями из пространств С. Бернштейна. Везде ниже $\mathcal{A}$ есть B^*-алгебра и, следовательно, $\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathbb{C}\mathcal{A}$.

Пусть $C_b(\mathcal{H}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$ – пространство всех ограниченных непрерывных отображений $F: \mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, а $C_{b,u}(\mathcal{H}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$ – подпространство всех ограниченных равномерно непрерывных $\mathcal{A}$-значных отображений из $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ в $\mathcal{A}$.

Если $F \in B_\sigma(\mathcal{A})$, то имеет место следующее неравенство

$$\sup_{h \in \mathcal{H}(\mathcal{A})} \|F'(\boldsymbol{h})\| \leq \alpha\sigma \sup_{h \in \mathcal{H}(\mathcal{A})} \|F'(\boldsymbol{h})\|,$$

где α – положительная константа зависящая от $M_{\mathcal{A}}$. Из вышеуказанного неравенства следует (см. [25]).

Теорема 3.3.1. *Для любого отображения $G \in C_{b,u}(\mathcal{H}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$ существует последовательность целых по Лорху отображений $F_k \in B_{\sigma_k}(\mathcal{A})$ таких, что $\|G - F_k\|_\infty \to 0$ при $k \to \infty$.*

Список литературы

1. Neuman J. von. *Approximative properties of matrices of hight finite order.* Port Math. J., 1942, V. 3, N. 1, 1-62.
2. Fuglede B.A. *A commutativity theorem for normal operators.* Proc. Nat. Acad. Sci USA, 1950, V. 36, 35-40.
3. Putnam C.R. *On normal operators in Hilbert space.* Amer. J. Math., V. 73, 1951, 357-362.
4. Berberyan S.K. *Note on a theorem Fuglede and Putnam.* Proc. Amer. Math. Soc., V. 10, 1959, 175-182.
5. Рудин У. *Функциональный анализ.* Изд. “Мир”, Москва, 1975.
6. Moore R. *An asymptotic Fuglede theorem.* Proc. Amer. Math. Soc., V. 50, 1975, 138-148.
7. Rogers D.D. *On Fugledes theorem and operator topologies.* Proc. Amer. Math. Soc., V. 75, 1979, 32-36.
8. Furuta T. *Normality can be relaxed in the asymptotic Fuglede-Putnam theorem.* Proc. Amer. Math. Soc., V. 79, 1980, 593-596.
9. Горин Е.А., Караханян М.И. *Асимптотический вариант теоремы Фугледе-Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр.* Математ. заметки, Т. 22, N. 2, 1977, 179-188.
10. Караханян М.И. *Асимптотический вариант теоремы Фугледе-Путнама о коммутаторах линейных ограниченных операторов в сильной и слабой операторных топологиях.* Докл. АН Арм.ССР, Т. XXIII, N. 5, 1981, 265-268.
11. Караханян М.И. *Асимптотические свойства коммутаторов элементов банаховых алгебр.* Изв. АН Арм.ССР, “Математика”, Т. XIX, N. 3, 1984, 242-247.
12. Горин Е.А. *Обобщение одной теоремы Фугледе.* Алгебра и анализ, Т. 5, Н. 4, 1993, 83-97.

13. Караханян М.И. *Асимптотические свойства коммутаторов.* Изв. НАН Армении, Т. 23, N. 1, 1994, 50-57.
14. Караханян М.И. *Асимптотический вариант общих теорем о коммутаторах.* Функц. анализ и его прилож., Т. 39, N. 4,2005,80-83.
15. Globevnik J., Vidav I. *A note on normal operator valued analytic functions.* Proc. Amer. Math. Soc., V. 37, N. 2, 1973, 619-621.
16. Fleming R.J., Jamison J.E. *Commutative range of analytic functions in Banach algebra.* Proc. Amer. Math. Soc., V. 93, N. 1, 1985, 48-50.
17. Караханян М.И. *О коммутативности образа $\mathcal{A}$-значной аналитической функции.* Изв. НАН Армении, Математика, Т. XXXI, N. 1, 1996, 35-45.
18. Karakhanyan I.M., Karakhanyan M.I. *A remark on asymptotic property of commutators.* Proc. of YSU, Physical and Math. Sciences, N. 2, 2009, 63-66.
19. Lorch E.R. *The theory of analytic functions in normed Abelian vector rings.* Trans. Amer. Math. Soc., V. 54, 1943, 414-425.
20. Glickfeld B.W. *The Rieman sphere of a commutative Banach algebra.* Trans. Amer. Math. Soc., V. 134, 1968, 1-18.
21. Palmer T.W. *Characterizations of C^*-algebras I.* Bull. Amer. Math. Soc. 74, 1968, 538-540.
22. Palmer T.W. *Characterizations of C^*-algebras II.* Trans. Amer. Math. Soc. 148, 1970, 577-588.
23. Vidav I. *Sur un système d'axiomes caracterisant les algèbras C^*.* Glassnik Mat. Ser. III, 16, 1961, 189-193.
24. Bonsall J.F., Dunkan J. *Complete Normed Algebras.* Springer-Verlag, 1973.
25. Бернштейн С.Н. *О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых данной степени I-III.* Собр. сочинения, Т. II, 1946, 371-383.

Публикации по теме диссертации

1. Karakhanyan M.I., Kamalyan H.A. *Some Remarks of Properties of Elements Complex Banach Algebras.* Proc. of YSU, Physical and Math. Sciences, N. 2, 2013, 8-14.

2. Караханян М.И., Камалян Г.А. *Одно замечание о коммутативности образа $\mathcal{A}$-значной аналитической функции.* Изв. НАН Армении, Математика, Т. 48, N. 2, 2013, 39-42.

3. Kamalyan H.A. *Operator analogue of Bernstein theorem.* Proc. of YSU, Physical and Math. Sciences, N. 1, 2014, 16-18.

4. Kamalyan H.A. *On generalization of the theorem of Picard* Proc. of YSU, Physical and Math. Sciences, N. 2, 2014, 64-66

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ատենախությունը նվիրված է $\mathcal{A}$ –արժեքանի անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ սպեկտրալ հատկությունների ուսումնասիրությանը:

Առանձնակի հետաքրքրություն է ներկայացնում $\mathcal{A}$ –արժեքանի անալիտիկ ֆունկցիաների սպեկտրալ հատկությունների կիրառությունը ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների սպեկտրալ տեսությունում, մոտարկման տեսությունում, դինամիկ համակարգերի տեսությունում, մաթեմատիկական ֆիզիկայում և այլն:

Աշխատանքում օգտագործվում է ֆունկցիաների տեսության, ֆունկցիոնալ անալիզի և տոպոլոգիական հանրահաշիվների տեսության մեթոդները:

Ատենախոսության հիմնական արդյունքներն են.

1. $(\mathcal{A};\tau)$ տոպոլոգիական հանրահաշիվների լայն դասի համար ստացված են ասիմպտոտիկ թեորեմներ, որոնց համար տեղի ունի <<ֆոն Նեյմանի էֆեկտը>>:.

   $\mathcal{B}=M_2\left(BL\left(B_\sigma(\alpha)\right)\right)$ քառակուսային մատրիցների հանրահաշվում, որտեղ $B_\sigma(\alpha)$ բոլոր էքսպոնենցիալ տիպի f ամբողջ ֆունկցիաների տարածություն է կշռով, որոնց տիպը չի գերազանցում σ, կառուցված են $a,b\in\mathcal{B}$ էլեմենտների օրինակ, որոնց համար $[a;b]=ab-ba\neq 0$, բայց <<ֆոն Նեյմանի էֆեկտը>> գործում է: Այս օրինակ Ե.Ա. Գորինի [12] աշխատանքում ձևակերպված մի հարցի պատասխանն է:

2. Բանախյան հանրահաշվի էլեմենտի համար ստացված է <<ուռուցիկակերպության >> հայտանիշ: Այլ կերպ ասած, երբ

$V(a) = \langle sp(a) \rangle$, որտեղ $V(a)$-ն a էլեմենտի հանրահաշվական թվային պատկերն է, իսկ $\langle sp(a) \rangle$ սպեկտրի ուռուցիկ թաղանթը:

3. Ապացուցված է, որ $(\mathcal{A};\tau)$ հանրահաշիվների դեպքում, եթե J-ն փակ երկկողմանի իդեալ է այդ հանրահաշվի համար և $\mathcal{D}$-ն անընդհատ $(\mathcal{A};\tau)$ դիֆերենցում է, ապա $\mathcal{D}a \in J$ պայմանը համարժեք է, որ կամայական g_γ կիսանորմի համար տեղի ունենա

$$\sup\left\{q_\gamma\left((\exp \lambda\mathcal{D})_J(\hat{a})\right) : \lambda \in \mathbb{C}\right\} < \infty:$$

4. Ստացված է $\mathcal{A}$ –արժեքանի անալիտիկ $f\colon \Delta \to (\mathcal{A};\tau)$ ֆունկցիայի պատկերի կոմուտատիվության մասին թեորեմ, որը ճշգրիտ է <<ֆոն Նեյմանի էֆեկտի>> շնորհիվ:

5. $(\mathcal{A};\tau)$ տոպոլոգիական հանրահաշիվների համար ապացուցված է, որ եթե J-ն $(\mathcal{A};\tau)$ հանրահաշվի փակ երկողմանի իդեալ է, իսկ $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}\big((\mathcal{A};\tau)\big)$ և եթե $a \in (\mathcal{A};\tau)$ էլեմենտ այնպիսին է, որ $\mathcal{D}a \notin J$, ապա

$$\cup_{\lambda\in\mathbb{C}} V\left((\exp \lambda\mathcal{D})_J(\hat{a})\right) = \mathbb{C}$$

6. Օգտագործելով Լորխի իմաստով ֆունկցիաների անալիտիկությունը՝ ինվոլյուտիվ, կոմուտատիվ, կոմպլեքս բանախյան $\mathcal{A}$ հանրահաշվի դեպքում ապացուցված է Բերնշտեյնի՝ իրական առանցքի վրա սահմանափակ, հավասարաչափ անընդհատ ֆունկցիային Բերնշտեյնի տարածություններին պատկանող ամբողջ ֆունկցիաների միջոցով մոտարկման, թեորեմի օպերատորային տարբերակը:

CONCLUSION

Dissertation is dedicated to some spectral properties A-valued analytical functions.

There is a particular interest in the use of spectral properties A-valued analytical function in the spectral theory of non self adjoint operators, in theory of approximation, theory of dynamic systems etc.

In the work methods of functional theory, functional analysis and theories of topological algebras are used.

1. For rather wide class topological algebras $(\mathcal{A};\tau)$ which are obtained asymptotic theorems are conected to "Von Neumann effect". Further, in algebra of square matrixes $\mathcal{B} = M_2\left(BL\big(B_\sigma(\alpha)\big)\right)$, where $B_\sigma(\alpha)$ the space of all entire functions f of exponential type not exceeding σ, elements $a, b \in \mathcal{B}$, where $[a;b] \neq 0$ and "Von Neumann Effect" is performing , are constructed. This example gives the answer to a question, supplied by E.A Gorin in the work[12].
2. The criterion of Banach algebras element convexity is obtained. Which means $V(a) = \langle sp(a)\rangle$, where $V(a)$ is numerical algebraic range of Banach algebra element and $\langle sp(a)\rangle$ is the convex hull of the spectrum of that element respectively.
3. It is proved that, in the class of the topological algebra $(\mathcal{A};\tau)$, if J is closed, two-sided ideal in the algebra $(\mathcal{A};\tau)$ and $\mathcal{D}$ is a continuous $(\mathcal{A};\tau)$-differentation, then the condition $\mathcal{D}a \in J$ is equivalent to the following condition form

$$\sup\left\{q_\gamma\left((\exp\lambda\mathcal{D})_J(\hat{a})\right) : \lambda \in \mathbb{C}\right\} < \infty$$

for the each seminorm g_γ.

4. In algebra $(\mathcal{A};\tau)$ the theorem about the commutativity of A-valued analytic function $f:\Delta \to (\mathcal{A};\tau)$ image is obtained. This result is exact because of the "von Neumann effect".
5. It is proved that, in the class of the topological algebra $(\mathcal{A};\tau)$, if J is closed, two-sided ideal in the algebra $(\mathcal{A};\tau)$ and $\mathcal{D}$ is a continuous $(\mathcal{A};\tau)$-differentation, and element $\mathrm{a} \in (\mathcal{A};\tau)$ such that n $\mathcal{D}\mathrm{a} \notin \mathrm{J}$, then

$$\cup_{\Lambda\in\mathbb{C}} \mathrm{V}\left((\exp\lambda\mathcal{D})_{\mathrm{J}}(\hat{\mathrm{a}})\right) = \mathbb{C}.$$

6. In involutive, commutativ complex Banach algebra $\mathcal{A}$ operator analogue of well-known S. Bernstein theorem about approximation on the real axis of a bounded and uniformly continuous function by entire functions of Bernstein space is proved with use of holomorphic by Lorch functions.