ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՃԱՐՏԱՐԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿ)

ԹԵՐՋՅԱՆ ԾՈԼԱԿ ԷՐՆԵՍՏԻ

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԿԻՆԵՏԻԿԱՅԻ ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա.01.02 – “Դիֆերենցիալ հավասարումներ” մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ
(ПОЛИТЕХНИК)

ТЕРДЖЯН ЦОЛАК ЭРНЕСТОВИЧ

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности
01.01.02 – “Дифференциальные уравнения”

ЕРЕВАН 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանի գիտական խորհրդի նիստում (15 մայիսի 2010թ, № 89)

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր,պրոֆեսոր Ա.Խ. Խաչատրյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ-մաթ.գիտ.դոկտոր, պրոֆեսոր, Վ.Ն. Մարգարյան
	ֆիզ-մաթ.գիտ. թեկնածու, դոցենտ Գ.Ս. Հակոբյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Բելառուսի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2011թ. հոկտեմբերի 5 -ին ժամը 15^{00} -ին Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանում գործող մաթեմատիկա 053 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե՝ ք.Երևան, 0009, փ. Տերյան 105, 12 մասնաշենք:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՊՃՀ գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2011թ. սեպտեմբերի 3 -ին:

053 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար
ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Հ. Բաբայան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета Государственного инженерного университета Армении (15.05.2010, № 89)

Научный руководитель	доктор физ.-мат. наук, профессор **А.Х.Хачатрян**
Официальные оппоненты	доктор физ.-мат. наук, профессор **В.Н. Маргарян**
	кандидат физ.-мат. наук, доцент **Г.С.Акопян**
Ведущая организация	**Белорусский государственный университет**

Защита диссертации состоится 5-го октября 2011г. в 15^{00} часов на заседании специализированного совета 053, действующего в Государственном инженерном университете Армении.
Адрес: г. Ереван, ул. Теряна 105, 12-й корпус.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГИУА.
Автореферат разослан 3 -го сентября 2011г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук. А. О. Бабаян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время кинетическое уравнение Больцмана стало предметом исследования в различных областях физической кинетики в связи с приложениями в кинетической теории газов, в теории переноса излучения, в теории нелокального взаимодействия волн, в теории переноса нейтронов и гамма-квантов, в теории плазмы и т.д.

Эти задачи сводятся к скалярным или векторным интегральным уравнениям Винера-Хопфа. В развитие интегральных уравнений Винера-Хопфа большой вклад внесли Д.В. Линдли, Ф. Спитцер, В.С. Владимиров, В.А. Амбарцумян, М.Г. Крейн, И.У. Гохберг, Ф.Д. Гахов, Н.Б. Енгибарян, Л.Г. Арабаджян, Н.Е. Товмасян и др.

Сравнительно недавно сильно возрос интерес к нелинейным задачам в связи с приложениями в эконометрике и физической кинетике. Эти задачи описываются нелинейными интегральными или интегро-дифференциальными уравнениями, близкими к сверточному типу.

Оказывается, как классические методы, так и новые методы линейной теории интегральных уравнений Винера-Хопфа могут служить мощным средством для изучения и решения указанных классов линейных и нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.
Вопросы существования решения указанных классов уравнений, а также разработки аналитических методов построения решения конкретных физических задач являются весьма актуальными.
Цель работы. Целью настоящей диссертационной работы является доказательство теорем существования решений некоторых классов линейных и нелинейных интегральных (скалярных и векторных) и интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в различных физических задачах, а также разработка конструктивных методов построения решений этих задач.
Методы исследования. Использовались классические и новые факторизационные методы теории линейных интегральных уравнений Винера-Хопфа, новые методы решения нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, теории функции вещественной и комплексной переменной.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации являются новыми.

Практическая значимость. Полученные результаты могут быть непосредственно применимы.

а) в задаче температурного скачка;

б) в задаче распределения дохода в однопродуктовой экономике;

в) в нестационарной задаче переноса излучения монохроматического рассеяния.

Основные положения, выносимые на защиту. Автором выносятся на защиту следующие положения:

- Для одной системы интегральных уравнений с необратимым интегральным оператором удается выделить необратимые факторы из исходного оператора и свести первоначальную систему к новой системе со сжимающим интегральным оператором. Доказывается структурная теорема существования решения. Результаты применены к решению задачи температурного скачка.

- Получены достаточные условия нетривиальной разрешимости для некоторых классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных урвнений типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным интегральным оператором.

- Доказана теорема существования решения для уравнения Винера-Хопфа, ядро которого представляется в виде суперпозиции комплекснозначных экспонент, а соответствующий интегральный оператор необратим. Построен пример ядра, удовлетворяющего всем условиям теоремы.

- Установлена связь между решениями интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с одним и тем же ядром на полуоси и на конечном промежутке. Доказаны теоремы существования решения некоторых классов линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах в отделе методов математической физики института математики Национальной Академии наук Республики Армения, на семинарах факультета прикладной математики Армянского государственного инженерного университета, на международной конференции математического института им.

В.А.Стеклова РАН, а также на семинаре факультета прикладной математики и информатики РАУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях, перечень которых приводится в конце автореферата.

Структура и обьем диссертации. Диссертация изложена на 88 страницах, состоит из введения, трех глав, содержащих 11 параграфов, заключения и списка цитированной литературы, включающего 58 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлен краткий обзор известных результатов по теме диссертации, общие направления исследования и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена изучению одной системы интегральных уравнений свертки на полупрямой с необратимым матричным интегральным оператором. Применение метода специальной факторизации позволяет выделить необратимые факторы из исходного необратимого оператора и свести систему к новой системе .со сжимающим оператором.

В качестве примера рассмотрена задача температурного скачка кинетической теории газов.

В §1.1 рассматривается следующая система интегральных уравнений с разностным 2×2 матричным ядром

$$\left(J-\hat{K}\right)f=g, \tag{1}$$

где $g=(g_1,g_2)^T$ $(g_i\in L_1(0,+\infty),\ m_1(g_i)<+\infty,\ i=1,2)$ и $f=(f_1,f_2)^T$ - заданные и искомые вектор-столбцы (T - знак транспонирования), J - единичный оператор, $\hat{K}=\left(\hat{K}_{ij}\right)_{i,j=1,2}$ -матричный оператор Винера-Хопфа

$$\left(\hat{K}f\right)(x)=\int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \tag{2}$$

где

$$K(x)=\int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{p}}G(p)dp. \tag{3}$$

Здесь $G(p)=\left(G_{ij}(p)\right)_{i,j=1,2}$-знакопеременная измеримая матрица-функция, удовлетворяющая условиям:

$$G(p)p^j \in L_1^{2\times 2}(0,\infty), \quad 2\int_0^\infty G(p)pdp = I, \; j=1,2,3, \tag{4}$$

$I = (\delta_{ij})_{i,j=1}^2$-единичная матрица.

Из (4) следует, что ядро K удовлетворяет условию консервативности

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = I. \tag{5}$$

Пусть E-одно из следующих банаховых пространств $L_p(0,+\infty)$, $p \ge 1$, $M(0,+\infty) = L_\infty(0,+\infty)$, $C_l(0,+\infty)$ и $C_0(0,+\infty)$, $E^2 = E \times E$-пространство двумерных вектор-столбцов с элементами из пространства E, а $\hat{K}$-матричный интегральный оператор Винера-Хопфа вида (2)-(4).

Обозначим: $I - \overline{K}(s)$-символ оператора $J - \hat{K}$, где $\overline{K}(s)$-преобразование Фурье от K

$$\overline{K}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{isx}dx. \tag{6}$$

(Преобразование Фурье понимается по компонентам). Из (4) и (5) следует, что

$$det[I - \overline{K}(0)] = 0.$$

Последнее означает что оператор $J - \hat{K}$ необратим в E^2. Поэтому система (1) выпадает из общей теории систем интегральных уравнений Винера-Хопфа (ИУВХ) и относится к особым случаям этих систем. В дальнейшем будем предполагать, что символ $I - \overline{K}(s)$ исходного оператора $\hat{K}$ не имеет других нулей, т.е. $det(I - \overline{K}(s)) \ne 0, \quad \forall s \ne 0$.

В §1.1 получены следующие результаты.

Утверждение. *Для любого $\beta > 0$ символ $I - \overline{K}(s)$ допускает разложение вида:*

$$I - \overline{K}(s) = \frac{s^2}{s^2+\beta^2}\left[I - \overline{T}(s)\right], \tag{7}$$

где $\overline{T}(s)$-символ оператора $\hat{T}$, а ядро оператора $\hat{T}$ определяется по формуле

$$T(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{p}} G(p)(1 - p^2\beta^2)dp. \tag{8}$$

При этом, если $\det A \ne 0$, $\left(A \equiv (a_{ij})_{i,j=1}^2, a_{ij} = 2\int_0^\infty G_{ij}(p)p^3dp\right)$, *то*

$$\det(I - \overline{T}(0)) = \frac{5\beta^4}{12} \ne 0, \quad \beta > 0. \tag{9}$$

Лемма 1.1. *Если $G_{ij}(p)p^k \in L_1(0,+\infty)$ $i,j=1,2$, $k=1,2,3$, то $T_{ij} \in L_1$ $i,j=1,2$.*

Введем нижние и верхние вольтерровые матричные необратимые операторы в E^2

$$\hat{U}^{\pm} = \begin{pmatrix} \hat{U}^{\pm} & 0 \\ 0 & \hat{U}^{\pm} \end{pmatrix}.$$

$$(\hat{U}^- f)(x) = \beta\int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} f(t)dt \qquad (\hat{U}^+ f)(x) = \beta\int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t)dt. \tag{10}$$

В § 1.2 доказана

Теорема 1.1. *Оператор $J - \hat{K}$ допускает разложение*

$$J - \hat{K} = (J - \hat{U}^-)(J - \hat{T})(J - \hat{U}^+), \tag{11}$$

где $\hat{U}^{\pm}$ определены в (10), а ядро T оператора $\hat{T}$ определяется по формуле:

$$T(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{p}} G(p)(1 - p^2\beta^2)dp, \tag{12}$$

$\beta > 0$-произвольное число.

Рассмотрим следующую вектор-функцию:

$$\varphi = \hat{T}f, \tag{13}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$, $\hat{T}$-матричный интегральный оператор.

В любом из пространств E^2 имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{E^2} \le \max(\lambda(\beta), \mu(\beta))\|f\|_{E^2}, \tag{14}$$

где

$$\|\hat{T}_{11}\|_{E\to E} + \|\hat{T}_{21}\|_{E\to E} \le \|\hat{T}_{11}\|_{L_1\to L_1} + \|\hat{T}_{21}\|_{L_1\to L_1} \equiv \lambda(\beta),$$

$$\|\hat{T}_{12}\|_{E\to E} + \|\hat{T}_{22}\|_{E\to E} \le \|\hat{T}_{12}\|_{L_1\to L} + \|\hat{T}_{22}\|_{L_1\to L} \equiv \mu(\beta).$$

Оператор $\hat{T}$ будет сжимающим в пространствах E^2, если

$$\sigma = \max(\lambda(\beta), \mu(\beta)) < 1. \tag{15}$$

Теорема 1.2. *Пусть для оператора $\hat{K}$ с ядром вида (3), где $G(p)$ удовлетворяет условию (4), существует число $\beta > 0$ для которого выполняется (15). Тогда система интегральных уравнений Винера-Хопфа (1) имеет решение $f = (f_1, f_2)^T$ следующей структуры.*

$$f_i(x) = F_i(x) + \varphi_i(x), \quad F_i \in L_1(0,+\infty), \quad \varphi_i \in C_l(0,+\infty), \; i = 1,2. \tag{16}$$

В §1.3 рассматривается система интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K(x-t) f(t)dt + \varepsilon \int_0^{\infty} K(x+t) f(t)dt \qquad (17)$$

относительной искомой вектор-функции $f = (f_1, f_2)^T$, где $0 \le \varepsilon < 1$.

Обозначим через Ω_0 класс матричных интегральных операторов: $\hat{K}_0 \in \Omega_0$, если существует $K_0 \in L_1$ такое, что

$$(\hat{K}_0 f)(x) = \int_0^{\infty} K_0(x+t) f(t)dt. \qquad (18)$$

Пусть ядром оператора $\hat{K}_0$ является функция K_0. Тогда имеет место факторизация

$$J - \hat{K} - \hat{K}_0 = (J - \hat{U}^-)(J - \hat{V}_-)(J - \hat{T}_0)(J - \hat{V}_+)(J - \hat{U}^+), \qquad (19)$$

где $\hat{T}_0 \in \Omega_0$, а

$$(\hat{V}_+ f)(x) = \int_0^{x} V_+(x-t) f(t)dt, \qquad (20)$$

$$(\hat{V}_- f)(x) = \int_x^{\infty} V_-(t-x) f(t)dt. \qquad (21)$$

Здесь $V_\pm \in L_1^{2\times 2}(0,+\infty)$ -построенные матриц-функции, причем $V_\pm \ge 0$*.

Используя факторизацию (19) доказываются следующие теоремы:

Теорема 1.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.2. Тогда, если $\lambda = 1$ не является собственным значением для вполне непрерывного операторам $\hat{T}_0$, то система (17) имеет решение следующей структуры:*

$$f_i(x) = h_i(x) + \varphi_i(x), \quad i = 1,2, \qquad (22)$$

где $h_i \in L_1(0,+\infty)$, $\varphi_i \in M(0,+\infty)$.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия теоремы 1.3. Тогда однородное уравнение (17) $(g = 0)$ обладает нетривиальным решением с асимптотикой $O(x)$, когда $x \to +\infty$.*

В §1.4 в качестве примера рассматривается задача температурного скачка для течения разреженного газа в полупространстве, ограниченном плоской твердой стенкой.

В рамках линеризованной БГК (Бхатнагар-Гросс-Крук) модели из уравнения Больцмана выводится система интегральных уравнений с

* Н.Б.Енгибарян, А.Х. Хачатрян. О некоторых интегральных уравнениях типа свертки в кинетической теории. ЖВМ и МФ, 1998г, т. 38, 3, с. 466-482.

суммарно-разностным 2×2 матричным симметричным знакопеременным ядром.

Задача сводится к особой (не элиптической) системе интегральных уравнений свертки на полупрямой с разностным матричным знакопеременным ядром $K_{ij}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{|x|}{p}} G_{ij}(p)dp$,

где $G_{11}(p) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi} p} e^{-p^2}$, $G_{22}(p) = \dfrac{2}{3p\sqrt{\pi}} e^{-p^2}\left[\left(p^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$,

$$G_{12} = G_{21} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{1}{p} e^{-p^2}\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)$$

Тогда имеем

$$T_{ij}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{p}} G_{ij}(p)(1 - p^2\beta^2)dp.$$

После некоторых выкладок получаются следующие выражения для $\lambda(\beta)$ и $\mu(\beta)$:

$$\lambda(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{p}} e^{-p^2}(1 - p^2\beta^2)\frac{dp}{p}\right|dx + 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{p}} e^{-p^2}\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)(1 - p^2\beta^2)\frac{dp}{p}\right|dx$$

$$\mu(\beta) = 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{p}} e^{-p^2}\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)(1 - p^2\beta^2)\frac{dp}{p}\right|dx + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{p}} e^{-p^2}\left[\left(p^2 - \frac{1}{2}\right) + 1\right](1 - p^2\beta^2)\frac{dp}{p}\right|dx$$

В диссертации доказывается, что для приведенного оператора $\sigma = \max(\lambda(\beta), \mu(\beta)) < 1$ при $\beta \in (0,1)$.

§2.1 Главы 2 посвящен вопросам разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором с суммарно-разностным ядром на полуоси. Доказана нетривиальная разрешимость уравнений в пространстве ограниченных функций и исследована асимптотика полученного решения.

Рассматривается следующий класс нелинейных интегральных уравнений

$$f(x) = Q(x, f(x)) \int_0^{\infty}\left(K(x-t) - \overset{0}{K}(x+pt)\right)G(f(t))dt, \; x > 0, \; p \ge 1. \qquad (23)$$

Ядра K и $\overset{0}{K}$ - неотрицательные и измеримые функции на $R \equiv (-\infty,+\infty)$ и $R^+ \equiv (0,+\infty)$ соответственно, удовлетворяющие условиям

$$a) \quad K \in L_1(R), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)d\tau = 1, \qquad (24)$$

$b)$ $K \downarrow$ на $(0,+\infty)$, $K \uparrow$ на $(-\infty,0)$ (25)

$c)$ $K(x) < K(-x), \quad x \in (0,+\infty), \quad 0 \le \overset{\circ}{K}(x) \le K(x), \quad x > 0.$ (26)

G и Q – определенные на множествах R и $(0,+\infty)\times R$ соответственно измеримые функции, причем предполагается, что существует число $\eta > 0$, такое что

$d)$ $G \in C[0,\eta]$, $G \uparrow$ на $[0,\eta]$, (27)

$e)$ $G(x) \ge x, \quad x \in [0,\eta], \quad G(\eta) = \eta,$ (28)

$f)$ $Q(x,\tau) \uparrow$ по τ на $[0,\eta]$ при каждом фиксированном $x \in (0,+\infty)$, (29)

$g)$ Q удовлетворяет условию Каратеодори на $\Omega_\eta \equiv (0,+\infty)\times[0,\eta]$ по аргументу τ, т.е. при каждом фиксированном $\tau \in [0,\eta]$, Q – измерима (30) по $x > 0$ и при почти всех $x > 0$ она непрерывна по $\tau \in [0,\eta]$.

$$h) \quad 1 \le Q(x,\tau) \le \frac{1}{1 - \frac{p+1}{p}\int\limits_0^\infty \overset{\circ}{K}(z)dz}, \quad (x,\tau) \in \Omega_\eta. \tag{31}$$

В п. 2 §2.1 доказывается нетривиальная разрешимость уравнения (23) в пространстве ограниченных функций. Вычисляется предел построенного решения в бесконечности. При некоторых дополнительных условиях на Q установлено, что построенное решение монотонно возрастает. В конце параграфа приведены примеры функций Q и G.

Справедлива:

Теорема 2.1. *Пусть для неотрицательных функции* K *и* $\overset{\circ}{K}$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tau|\mathrm{K}(\tau)\mathrm{d}\tau < \infty$, $\int\limits_0^\infty \tau^2 \overset{\circ}{K}(\tau)d\tau < +\infty$. *Тогда при условиях (24)-(31) уравнение (23) имеет ограниченное и положительное решение* f *с пределом* η *в бесконечности. Более того, если* $Q \uparrow$ *по* x, *то* $f(x) \uparrow$ *по* x.

В качестве примеров функций G и Q можно рассмотреть следующие классы функций:

$a_1)$ $G(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in (0,1), \quad a_2)$ $G(x) = e^{x-1}, \quad a_3)$ $G(x) = x + \sin^2 x$,

$b_1)$ $Q(x,\tau) = \dfrac{L(x)-1}{2}U(\tau) + \dfrac{1+L(x)}{2}$,

где

$$L(x) = \left(1 - \frac{p+1}{p}\int\limits_x^\infty \overset{\circ}{K}(z)dz\right)^{-1}, \tag{32}$$

а U – измеримая функция на R, причем

- $U \in C[0,\eta]$, $U \uparrow$ *по* τ *на* $[0,\eta]$ (33)
- $0 \le U(x) \le 1, \quad x \in [0,\eta],$ (34)

$b_2)$ $Q(x,\tau) = (L(x)-1)U(\tau) + L(x).$ (35)

Примером функции $U(\tau)$ может служить, например,

$$U(\tau) = \left(\frac{\tau}{\eta}\right)^\alpha, \quad \alpha > 1. \tag{36}$$

В §2.2 и §2.3 главы 2 рассматривается одно нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа уравнения Гаммерштейна на полуоси. Доказана теорема существования неотрицательного и ограниченного решения рассматриваемого уравнения.

§2.2 главы 2 посвящен рассмотрению следующего класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \lambda\varphi(x) = \int\limits_0^\infty K(x,t)G(\varphi(t))dt, \quad x > 0 \tag{37}$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi \in W^1_\infty(R^+) \tag{38}$$

относительно искомой функции $\varphi(x)$.

Здесь λ-положительное число, ядро $K(x,t)$-измеримая функция на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, причем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R^+} \int\limits_0^\infty K(x,t)dt = \lambda. \tag{39}$$

а $G(x)$ функция, удовлетворяющая условиям (27),(28).

Через $W^1_\infty(R^+)$-обозначено следующее пространство Соболева

$$W^1_\infty(R^+) = \{f : f^{(k)} \in L_\infty(R^+),\ k = 0,1\}. \tag{40}$$

Пусть $K_0(x)$- неотрицательная функция из пространства $L_1(R)$, для которого $K_0(-x) > K_0(x), \quad x \in R^+$ и $\nu(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tau|K_0(\tau)d\tau < +\infty$,

$0 \le K_1(x) \in L_1(R^+)$-монотонно убывающая функция на $(0,+\infty)$ причем

$$0 \le K_1(x) < K_0(x), \quad x \in R^+. \tag{41}$$

Будем предполагать также, что существует измеримая функция $\mu(x)$ и число $\varepsilon \in (0,1)$, такие что

$$0 < \varepsilon_0 \le \mu(x) \le 1,\ (1-\mu(x))x^j \in L_1(R^+),\ \mu(x) \uparrow \text{по } x \text{ на } R^+, \tag{42}$$

и

$$K(x,t) \ge \mu(x)(K_0(x-t) - K_1(x+t)), (x,t) \in R^+ \times R^+. \tag{43}$$

Тогда справедлива:

Теорема 2.2. *Пусть для функции K, K_0 и K_1 выполнены условия (39), (41)-(43). Тогда задача (37) и (38) имеет ненулевое и ограниченное решение φ с пределом η в $+\infty$. При этом для этого решения верна следующая оценка*

$$\varphi(x) \geq \frac{\eta\alpha}{\underset{x>0}{esssup}\,\psi(x)}(1-e^{-\lambda x}), \tag{44}$$

где $\alpha = \underset{x>0}{essinf}\,\psi(x) > 0$: $\psi(x)$-специальное (см. стр. 47-48 в диссертации) решение следующего линейного уравнения

$$\psi(x) = \mu(x)\int_0^{\infty}[W_0(x-t) - W_1(x+t)]\psi(t)dt, \quad x > 0,$$

где $W_0(x) = \int_0^{\infty} K_0(x-z)e^{-\lambda z}dz$, $W_1(x) = \int_0^{\infty} K_1(x+z)e^{-\lambda z}dz$, $x \in R^+$.

Первая часть главы 3 посвящена уравнениям Винера-Хопфа с ядром, представляющим собой суперпозицию комплекснозначных экспонент. Этим уравнением описывается классическая задача Рэлея и задача нестационарного переноса излучения монохроматического рассеяния. Применением специального трехфакторного разложения исходного уравнения доказывается структурная теорема существования.

Во второй части главы 3 рассматривается класс линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка на конечном интервале и на полуоси.

Таким уравнением описываются различные задачи физической кинетики (аномальный скин эффект, распространение геликоновых волн) и квантовой механики. Применяется и развивается метод работы[†], основанный на установлении связи между решением рассматриваемого уравнения и решением соответствующего интегро-дифференциального уравнения на полуоси (когда $r = +\infty$) с тем же ядром.

Доказаны теоремы существования решения для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси.

В §3.1 рассматривается следующее уравнение Винера-Хопфа

[†] Н.Б.Енгибарян, М.А.Мнацаканян. Об одном интегральном уравнении с разностным ядром. Мат. Заметки, 1976, т.19, 6, с. 927-932.

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)f(t)dt \tag{45}$$

с комплекснозначной ядерной функцией

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|\lambda p}d\sigma(p),\ \alpha \equiv Re\lambda > 0, \qquad [a,b) \subset [0,+\infty). \tag{46}$$

Здесь $g(x) \in L_1(0,+\infty)$, а $\sigma(p)$ – неубывающая на $[a,b)$ функция для которой

$$\int_a^b \frac{d\sigma(p)}{p} < +\infty. \tag{47}$$

Через Ω обозначим следующий класс интегральных операторов Винера-Хопфа: $\hat{K} \in \Omega$, если $(\hat{K}f)(x) = \int_0^{\infty} K(x-t)f(t)dt$, $K \in L_1(R)$.

Пусть s_1, s_2 $(s_1 = -s_2)$ - вещественные нули символа $1-\overline{K}(s)$, где $\overline{K}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}K(x)dx$.

Обозначим через $\Omega^{\pm} \subset \Omega$ алгебры следующих простых вольтерровых операторов $\hat{U}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$

$$(\hat{U}_+f)(x) = (\beta - is_1)\int_0^x e^{-\beta(x-t)}f(t)dt$$

$$(\hat{U}_-f)(x) = (\beta - is_1)\int_x^{\infty} e^{-\beta(t-x)}f(t)dt,$$

где $\beta > 0$ – произвольное число.

В § 3.1. доказана следующая:

Теорема 3.1. Пусть $K(x)$ функция из (46), где $\sigma(p)$ удовлетворяет условию (47). Тогда для любого $\beta > 0$ существует оператор $\hat{T} = \hat{T}_{\beta} \in \Omega$ с ядром

$$T(x) = \int_a^b e^{-|x|\lambda p}G_{\beta}(p)d\sigma(p), \tag{48}$$

где

$$G_{\beta}(p) = \frac{\lambda^2p^2 - \beta^2}{\lambda^2p^2 + s_1^2}, \tag{49}$$

для которого верна в E следующая факторизация

$$J - \hat{K} = (J - \hat{U}_-)(J - \hat{T})(J - \hat{U}_+). \tag{50}$$

Если для некоторого $\beta > 0$

$$\rho = 2\int_0^b \frac{G_\beta(p)\, d\sigma(p)}{\alpha p} < 1,$$

то оператор $\hat{T}$ будет сжимающим в E с коэффициентом сжатия ρ.

Теорема 3.2. *Пусть $K(x)$ функция из теоремы 3.1, для которой при некотором $\beta > 0$, $\rho < 1$. Тогда для любого $g \in L_1(0,+\infty)$, $m_1(g) < +\infty$ уравнение (45) имеет решение вида $f(x) = h(x) + H(x)$, где $h(x) \in L_1(0,+\infty)$ и* $H(x) = (\beta - is_1)\int_0^x e^{-is_1(x-t)} h(t)dt.$

В качестве примера рассмотрена следующая функция:

$$K(x) = \frac{5\alpha}{6}(e^{-\lambda x} + e^{-2\lambda x}), \quad \lambda = \alpha + i\omega.$$

Нетрудно заметить, что $\int_{-\infty}^{\infty} |K(x)|\, dx > 1$.

Показано, что символ $1 - \overline{K}(s)$ имеет вещественные нули

$$s_{1,2} = \pm 2\alpha, \quad \alpha = \omega$$

и при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ существует интервал значений $\beta > 0$, для которых

$$\rho < 1.$$

В §3.3 и §3.4 рассматриваются вопросы разрешимости некоторых классов линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.

В §3.3 рассматривается следующее интегро-дифференциальное уравнение с разностным ядром

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + Af = g(x) + \int_0^r K(x-t) f(t)dt, \quad r < +\infty, \tag{51}$$

где $A > 0$,

$$g(x) = \int_{a_1}^{\infty} e^{-xp} G_1(p)dp, \quad x > 0 \tag{52}$$

$$K(x) = \int_a^{\infty} e^{-|x|p} G(p)dp, \quad a_1, a \geq 0, \tag{53}$$

$G(p) \geq 0, G_1(p) \geq 0$-измеримые функции, причем

$$2\int_a^{\infty} \frac{G(p)dp}{p} = \lambda, \quad \lambda \in R^+. \tag{54}$$

Уравнением (51) описываются задача нелокального взаимодействия волн в среде конечной толщины. Наряду с уравнением (51) рассматривается соответствующее уравнение со свободным членом $e^{-xs}, x > 0$

$$\frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2} + AY(x,s) = e^{-xs} + \int_0^r K(x-t)Y(t,s)ds, \tag{55}$$

$s > 0$-параметр, уравнения.

Пусть $P(x,s)$-решение следующего интегро-дифференциального уравнения на полуоси $(r = +\infty)$

$$\frac{\partial^2 P(x,s)}{\partial x^2} + AP(x,s) = e^{-xs} + \int_0^{\infty} K(x-t)P(t,s)dt. \tag{56}$$

Тогда функции $P(x,s)$ и $Y(x,s)$ связаны между собой соотношением:

$$P(x,s) = Y(x,s) + \int_0^{\infty} U(s,s')Y(r-x,s')G(s')ds', \quad x \in [0,r], \tag{57}$$

где

$$U(s,s') = e^{rs'}\int_r^{\infty} P(t,s)e^{-ts'}dt. \tag{58}$$

Следует отметить, что идентичная связь (57), (58) впервые была получена в работе Н.Б.Енгибаряна и М.А.Мнацаканяна (см. сноску на стр.12) при решении интегральных уравнений на полуоси и на конечном интервале.

Показано, что оператор $\hat{U}$, определяемый посредством

$$(\hat{U}f)(s) = \int_a^{\infty} U(s,s')f(s')G(s')ds'$$

является оператором сжатия в весовом пространстве $L_1\left(\frac{G(s)ds}{s}\right)$.

В §3.4 рассматриваются вопросы разрешимости следующего класса линейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt \tag{59}$$

с граничным условием

$$\varphi(0) = \varphi_0 \geq 0, \tag{60}$$

$$\varphi \in P \equiv \left\{ f : \frac{df}{dx} \in AC[0,+\infty), f(x) = O(x), x \to +\infty \right\}, \tag{61}$$

где $AC[0,+\infty)$ – пространство абсолютно непрерывных функций на $[0,+\infty)$, $\lambda \geq 1$-числовой параметр,

$$g \in L_1(0,+\infty),\ 0 \le K \in L_1(-\infty,+\infty), \quad и \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)d\tau = 1. \qquad (62)$$

Получены следующие результаты.

Теорема 3.4. *Предположим, что условия (62) выполняются. Тогда если $\lambda > 1$, то задача (59)-(61) имеет решение следующей структуры:*

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{-\sqrt{\lambda}x} + \int_0^x e^{-\sqrt{\lambda}(x-t)} F(t)dt, \qquad (63)$$

где $F(x) \in W_1^1(0,+\infty)$. Это решение единственно в $W_1^2(0,+\infty)$.

Теорема 3.5. *Предположим, что условия (62) выполняются, $\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|K(\tau)d\tau < +\infty$ и $\lambda = 1$. Тогда*

a) если $\nu(K) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tau K(\tau)d\tau > 0$, то задача (59)-(61) в пространстве P имеет решение следующей структуры

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{-\sqrt{\lambda}x} + \int_0^x e^{-\sqrt{\lambda}(x-t)}(R_1(t) + R_2(t))dt, \quad x > 0 \qquad (64)$$

где $R_1 \in L_1(0,+\infty)$, $R_2 \in C_M(0,+\infty)$,

b) если $\nu(K) = 0$ и $m_1(g) < +\infty$, то уравнения (59) в P также обладает решением структуры (64)

c) если же $\nu(K) < 0$, $m_1(g) < +\infty$, то уравнение (59) в пространстве $W_1^2(0,+\infty)$ имеет решение.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ц.Э. Терджян. Об одном интегро-дифференциальном уравнении с разностным ядром. Мат. в Высшей школе. 2007г, том. 3, № 4, стр. 51-55.
2. А.Х. Хачатрян, Ц.Э. Терджян. Уравнение Винера-Хопфа, ядро которого допускает представление в виде суперпозиции комплекснозначных экспонент. Известия НАН Армении, Математика. 2007г, том 42, № 5, стр. 71-77.
3. Ц.Э. Терджян. Об одном интегро-дифференциальном уравнении типа свертки второго порядка. Второе российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. Тезисы докладов, Москва, Математический институт им. В.А. Стеклова, РАН. 2008г, стр. 56-57.
4. Х.А. Хачатрян, Ц.Э. Терджян. О построении нетривиального решения одного класса нелинейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром на положительной полупрямой. Математика в высшей школе. 2009г, том 5, № 3, стр. 22-27.
5. Ц.Э. Терджян, А.Х. Хачатрян. Об одной системе интегральных уравнений в кинетической теории. Жур. Выч. Мат. и Мат. Физики. 2009г, том 49, № 4, стр. 715-721.

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Թերզյան Ցոլակ Էրնեստի

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԿԻՆԵՏԻԿԱՅԻ ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ատենախոսությունը նվիրված է որոշ դասի գծային և ոչ գծային ինտեգրալ (սկալյար և վեկտորական) և ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծելիության հարցերին: Այդ հավասարումներով նկարագրվում են ֆիզիկական կինետիկայի և էկոնոմետրիկայի մի շարք խնդիրներ: Նշված հավասարումների համար ապացուցվել են լուծման գոյության թեորեմներ և նկարագրվել է լուծումների կառուցման կոնստրուկտիվ եղանակներ:
Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները

1. Դիտարկվել է 2x2 մատրիցային ինտեգրալ օպերատորով կիսառանցքի վրա փաթեթի տիպի ինտեգրալ հավասարումների մի համակարգ, որի սիմվոլի որոշիչը զրո կետում ունի չորրորդ կարգի վերասերում: Հատուկ ֆակտորիզացիոն մեթոդի կիրառումը հնարավորություն է տվել ոչ շրջելի ինտեգրալ օպերատորներով ինտեգրալ հավասարումների համակարգի սկզբնական օպերատորից անջատել ոչ շրջելի պարզ արտադրիչներ և համակարգը «բերել» սեղմող ինտեգրալ օպերատորով նոր հավասարումների համակարգի: Ապացուցվել է լուծման գոյության կառուցվածքային թեորեմ: Առաջարկվել է անալիտիկ լուծման կառուցման կոնստրուկտիվ եղանակ: Որպես կիրառություն դիտարկվել է գազերի կինետիկ տեսությունում ծագող և Բոլցմանի գծայնացված մոդելային հավասարումով նկարագրվող ջերմաստիճանային թռիչքի խնդիրը:

2. Ոչ կոմպակտ ինտեգրալ օպերատորներով Համերշտեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների որոշ դասերի համար ստացվել են դրական, սահմանափակ լուծման գոյության բավարար պայմաններ: Հետազոտվել է լուծման ասիմպտոտիկ

հատկությունները: Համերշտեյնի տիպի ոչ կոմպակտ օպերատորով ոչ գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների որոշ դասերի համար ապացուցվել է Սոբոլևի տարածությանը պատկանող լուծման գոյության թեորեմ: Նշված հավասարումները ծագում են էկոնոմետրիկայում՝ եկամտի բաշխման խնդիրներում: Կառուցվել են թեորեմների պայմաններին բավարարող օրինակներ:

3. Վիներ-Հոպֆի ինտեգրալ հավասարումների որոշ դասի համար, որոնց կորիզը ներկայացվում է կոմպլեքս արժեքանի էքսպոնենտների համադրույթի տեսքով և համապատասխան ինտեգրալ օպերատորը շրջելի չէ, «բերվել» է սեղմող օպերատորներով հավասարման և ապացուցվել է լուծման գոյության թեորեմ: Կառուցվել է թեորեմի պայմաններին բավարարող օրինակ: Վերը նշված հավասարումով նկարագրվում են Ռելեյի դասական և մոնոխրոմատիկ ցրման դեպքում ճառագայթման տեղափոխման ոչ ստացիոնար խնդիրները:

4. Հաստատվել է կապ միևնույն կորիզով կիսառանցքի և վերջավոր հատվածի վրա երկրորդ կարգի գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների միջև: Այդ հավասարումներով նկարագրվում են ալիքների ոչ լոկալ փոխազդեցության խնդրրները (անոմալ սկին էֆեկտ, հելիկոնային ալիքների տարածում) կիսանվերջ միջավայրում և վերջավոր հաստության շերտում:
Կիսառանցքի վրա երկրորդ կարգի գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների որոշ դասերի համար ապացուցվել են լուծման գոյության թեորեմներ: Նշված հավասարումները ծագում են ոչ լոկալ դիֆուզիայի խնդիրներում, կոսմոլոգիայում և ֆինանսական մաթեմատիկայում:

CONCLUSION

Tsolak Terjyan

ON SOLVABILITY OF SOME LINEAR AND NONLINEAR PROBLEMS OF PHYSICAL KINETICS

The present dissertation work is devoted to question of solvability of some classes of linear and nonlinear integral and integral differential equations. Many problems of physical kinetics are reduced to these equations.

The existence theorems of solvability for these equations are proved, as well as the constructive methods for solutions are described.

In the dissertation the following results are obtained:

1. One system of convolution type integral equations on semi-axis with an noninvertible 2x2 matrix integral operator which determinant of symbol at zero has a fourth order degeneration in considered. The application of a special factorization methods makes it possible to distinguish noninvertible factors in the original noninvertible operator and reduce the system to a new system with a nonsingular integral operator. The existence theorem of solvability is proved, as well as constructive method for analytical solution is suggested. As an example the temperature jump problem is considered. The last problem arises in kinetic theory of gases and reduced from Boltzmann linearized model equation.

2. The sufficient conditions for existence of nontrivial positive, bounded solution for some classes of nonlinear integral equations with Hammerstein type noncompact operators are obtained. The asymptotic behavior of solution is investigated. The existence theorems of solution in Sobolev space for some classes of nonlinear integral-differential equations with Hammerstein type noncompact operators are proved. The examples, satisfying conditions of theorems are given. The above mentioned equation arises in econometrics: particularly in theory of income distribution.

3. The Wiener-Hopf integral equation with kernel represented as a superposition of complex value exponents and noninvertible integral operator is reduced to the equation with contractive operator and existence theorem of solution is proved. An example satisfying conditions of theorem is constructed. By means of above mentioned equation is described Riley classic problem, as well as non stationary radiative transfer problem with monochromatic scattering.

4. The connection between solutions of linear integral-differential equations of second order with same kernels on semi-axis and on finite interval is established. By these equations are described the problems of nonlocal interactions of waves (anomalous skin effect, propagation of helicon waves) in medium of finite thickness and in infinite medium. The existence theorems of solution for some classes of linear integral-differential equations of second order on semi-axis are proved. These equations arise in nonlocal diffusion problems: including mathematical finance, physical kinetics, particle systems and cosmology.

Sobolev space for some classes of nonlinear integral-differential equations with Hammerstein type noncompact operators are proved. The examples, satisfying conditions of theorems are given. The above mentioned equation arises in the econometrics, particularly in theory of income distribution.

3. The Wiener-Hopf integral equation with kernel represented as a superposition of complex value exponents and nonsummable integral operator is reduced to the equation with nonnegative operator and existence theorem of solution is proved. An example satisfying conditions of theorem is constructed. By means of above mentioned equation is described Milne classic problem, as well as the stationary radiative transfer problem with nonconservative scattering.

4. The connection between solutions of linear integral-differential equations of second order with some kernels on semi axis and on finite interval is established. By these equations are described the problems of nonlocal interactions of waves (consideration of an effect propagation of balance waves) in medium of finite thickness and in infinite medium. The existence theorems of solution for some classes of linear integral-differential equations of second order on semi-axis are proved. These equations arise in coupled diffusion problems, including mathematical finance, physical kinetics, particle systems and cosmology.