ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Բաղալյան Սևակ Հարությունի

ԱՆԿԱԽՈՒԹՅԱՆ ԹՎԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՑԻԿԼԵՐԻ ՈՒԺԵՂ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՀԱՄԱՐ

Ա.01.09 "Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և
մաթեմատիկական տրամաբանություն"
մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան - 2012

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Бадалян Севак Арутюнович

О ЧИСЛЕ НЕЗАВИСИМОСТИ СИЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ЦИКЛОВ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.09 "Математическая кибернетика и
математическая логика"

Ереван – 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ս. Ե. Մարկոսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Լ. Հ. Ասլանյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ռ. Ռ. Քամալյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012 թ. հունիսի 8-ին, ժ. 14^{00}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 “Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն” մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2012 թ. մայիսի 3-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու՝ Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук С. Е. Маркосян
Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук Л. А. Асланян
кандидат физ.-мат. наук Р. Р. Камалян

Ведущая организация: Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита состоится 8 июня 2012 г. в 14^{00} часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика и математическая логика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 3 мая 2012 г.

Ученый секретарь специализированного совета.
кандидат физ.-мат. наук В. Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը. Գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թվերի ուսումնասիրությունը սկիզբ է առել 1956 թվականին, երբ Կլաուդ Շենոնի կողմից դրվեց ինֆորմացիայի տեսության հիմնարար խնդիրներից մեկը՝ անսխալ կապուղու թողունակությունը գտնելու խնդիրը: Ինֆորմացիայի կապուղու թողունակությունը արտահայտվում է դրա բնութագրիչ գրաֆի ուժեղ արտադրյալով աստիճանների անկախության թվերի միջոցով: Գրաֆի Շենոնի թողունակությունը գտնելու խնդիրը ունենալով մեծ կիրառական նշանակություն ինֆորմացիայի տեսությունում, համարվում է բարդ խնդիր և մինչ այժմ այն լուծված չէ այնպիսի պարզ գրաֆի համար, ինչպիսին, օրինակ 7 գագաթանի պարզ ցիկլն է: Շենոնի խնդրից է սկիզբ առել նաև կատարյալ գրաֆների տեսությունը: Կատարյալ գրաֆները պատկանում են գրաֆների այն փոքրաթիվ դասերից մեկին, որի համար Շենոնի թողունակությունը հայտնի է:

Գրաֆի Շենոնի թողունակության բացահայտ արժեքը գտնելու խնդիրը լինելով չափազանց բարդ խնդիր, արվել են նրա համար ստորին և վերին գնահատականներ ստանալու բազմաթիվ փորձեր: Ստորին գնահատականներ ստանալու հիմնական եղանակը գրաֆների ուժեղ արտադրյալով աստիճանների անկախության թվերը որոշելն է: 1971 թվականին Ա. Գ. Մարկոսյանի և ավելի ուշ Ռ.Ս. Հալեսի և այլոց կողմից հաշվվեց կամայական երկու պարզ ցիկլերի ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը: Այնուհետև, տարբեր աշխատանքներում ստացվեցին որոշակի գնահատականներ ցիկլերի բարձր աստիճանների անկախության թվերի համար:

1979 թվականին Լովասի կողմից հաջողվեց նշանակալի առաջընթաց արձանագրել գրաֆի Շենոնի թողունակությունը գտնելու խնդրում: Նա ներմուծեց գրաֆի նոր ինվարիանտ՝ գրաֆի Լովասի թիվը, որը հանդիսանում է բավականին հաջող վերին գնահատական Շենոնի թողունակության համար: Լովասի թիվը 5 գագաթանի պարզ ցիկլի համար համընկավ վերը նշված ստորին գնահատականի հետ և հնարավորություն տվեց գտնելու երկար ժամանակ անհայտ 5 գագաթանի ցիկլի Շենոնի թողունակությունը:

Գրաֆների և մասնավորապես ցիկլերի Շենոնի թողունակության համար ավելի լավ ստորին և վերին գնահատականներ ստանալու բազմաթիվ փորձեր են արվում: Այսպես, 2000 թվականին Վեսելի և Զեռովնիկի կողմից համակարգչային փնտրման միջոցով 7 գագաթանի ցիկլի 4-րդ աստիճանի գրաֆում գտնվեց 108 գագաթանի անկախ բազմություն, որը հնարավորություն տվեց լավացնելու Շենոնի թողունակության ստորին գնահատականը 7 գագաթանի ցիկլի համար, 2007 թվականին Բրիմկովի կողմից բացահայտ բանաձևով տրվեց որոշ ցիրկուլանտ գրաֆների Լովասի թիվը և այլն:

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը և տրվում է բանաձև կամայական երկու ցիրկուլանտ գրաֆի ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը հաշվելու համար: Ցիրկուլանտ գրաֆները հանդիսանում են սովորական ցիկլերի ընդհանրացում և ստացված արդյունքը բնական ձևով ընդհանրացնում է մինչ այդ Ա. Գ. Մարկոսյանի, Ռ. Ս. Հալեսի և այլոց կողմից ստացված արդյունքը ցիկլերի համար: Աշխատանքում նկարագրվում է նաև ալգորիթմ, որը հնարավորություն է տալիս կառուցելու ցիրկուլանտ գրաֆների արտադրյալի ամենամեծ անկախ բազմություններից մեկը: Ինչպես կտեսնենք, այս խնդիրը համարժեք է ուղղանկյունները օպտիմալ ձևով տորում փաթեթավորելու խնդրին: Ստացված արդյունքը հնարավորություն է տալիս նաև ստանալ ոչ տրիվիալ ստորին գնահատական ցիրկուլանտ գրաֆների Շենոնի թողունակության համար:

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է նաև ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ծածկույթի թիվը և ցիկլերի աստիճանների անկախության թվերը: Որոշակի պայմանների առկայության դեպքում տրվում է բանաձև ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ծածկույթի թիվը գտնելու համար:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը և խնդիրները. Ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թվի որոշումը, ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ամենամեծ անկախ բազմության կառուցումը, ցիրկուլանտ գրաֆների համար Շենոնի թողունակության ստորին գնահատական ստանալը, ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ծածկույթի թվի ուսումնասիրությունը, ցիկլերի աստիճանների անկախության թվերի ուսումնասիրությունը:

Հետազոտման օբյեկտը. Ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվ, տորի ծածկույթ և փաթեթավորում, ցիրկուլանտ գրաֆների Շենոնի թողունակություն, ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ամենամեծ անկախ բազմություն, ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ծածկույթի թիվ, ցիկլերի աստիճանների անկախության թիվ:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են գրաֆների անկախ բազմությունների տեսության մեթոդները, բազմությունների տեսության մեթոդները, կոմբինատոր օպտիմիզացիայի մեթոդները:

Գիտական նորույթը. Տրվել է բանաձև կամայական երկու ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թվի համար, նկարագրվել է ալգորիթմ ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ամենամեծ անկախ բազմություններից մեկը կառուցելու համար, ինչպես նաև, ուղղանկյուն տորում մաքսիմալ քանակով ուղղանկյուններ փաթեթավորելու համար, ստացվել է ստորին գնահատական ցիրկուլանտ գրաֆների Շենոնի թողունակության համար, տրվել է բանաձև որոշ ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ծածկույթի թվի համար:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքները ունեն և տեսական, և կիրառական նշանակություն: Անսխալ կապուղու թողունակությունը գտնելու խնդիրը հանդիսանում է ինֆորմացիայի տեսության հիմնարար խնդիրներից մեկը, որը բերվում է գրաֆների ուժեղ արտադրյալով աստիճանների անկախության թվերը գտնելու խնդրին, որն էլ գրաֆի Շենոնի թողունակությունը գտնելու խնդիրն է: Ստացված արդյունքը թույլ է տալիս որոշել կամայական երկու ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը և տալ ստորին գնահատական ցիրկուլանտ գրաֆների Շենոնի թողունակության համար:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

- Կամայական երկու ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թվի համար ստացված արտահայտությունը: Օժանդակ դիսկրետ օպտիմիզացիայի խնդրի լուծումը:

- Ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ամենամեծ անկախ բազմություններից մեկը կառուցելու ալգորիթմը:

- Ցիրկուլանտ գրաֆների Շենոնի թողունակության համար ստացված ստորին գնահատականը:

- Որոշ ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ծածկույթի թվի համար ստացված արտահայտությունը:

- 5 գագաթանի պարզ ցիկլի աստիճանների անկախության թվերի որոշման համար առաջարկված եղանակը:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան և հրապարակումները. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի գիտական սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի դիսկրետ մաթեմատիկայի և տեսական ինֆորմատիկայի ամբիոնի սեմինարներում, միջազգային CSIT-2009, Երևան, 2009 կոնֆերանսում: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են հինգ գիտական հոդվածներում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է երեք գլխից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 35 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 87 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Աշխատանքի 1-ին գլխում նկարագրվում է ատենախոսությունում ուսումնասիրվող խնդիրը, հիմնավորվում է դրա ակտուալությունը, կիրառական նշանակությունը: Համառոտ նկարագրվում են ատենախոսությունում ստացված արդյունքները, դրանց տեղը և դերը մինչ այժմ հայտնի արդյունքների կողքին: Տրվում է նաև ստացված արդյունքների մեկնաբանություն տորի ծածկույթի և փաթեթավորման խնդիրների լեզվով:

Պարագրաֆ 1.1-ում նկարագրվում է Շենոնի խնդիրը[1], որտեղից սկիզբ է առել գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թվերի ուսումնասիրությունը:

$G_1 = (V_1, E_1)$ և $G_2 = (V_2, E_2)$ գրաֆների ուժեղ արտադրյալ է կոչվում (և նշանակվում է $G_1 \times G_2$) $G = (V, E)$ գրաֆը, որի գագաթների բազմությունը G_1 և G_2 գրաֆների գագաթների բազմությունների դեկարտյան արտադրյալն է՝ $V = V_1 \times V_2$ և $e = [(u_1, u_2), (v_1, v_2)] \in E$ այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը.

- $u_1 = v_1$ և $[u_2, v_2] \in E_2$
- $u_2 = v_2$ և $[u_1, v_1] \in E_1$
- $[u_1, v_1] \in E_1$ և $[u_2, v_2] \in E_2$:

G գրաֆի $\Theta(G)$ Շենոնի թողունակությունը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$\Theta(G) = \sup_{n\geq 1} \sqrt[n]{\alpha(G^n)},$$

[1] C. E. Shannon, “The zero-error capacity of a noisy channel”. Transactions on Information Theory, Inst. Radio Eng., IT-2, 1956, pp. 8-19.

որտեղ $\alpha(G)$-ով նշանակված է G գրաֆի անկախության թիվը: Ինչպես երևում է սահմանումից, ընդհանուր դեպքում Շենոնի թողունակությունը գտնելը բերվում է գրաֆի ուժեղ արտադրյալով աստիճանների անկախության թվերը որոշելուն:

Գրաֆի Շենոնի թողունակությունը գտնելը ունի մեծ կիրառական նշանակություն ինֆորմացիայի տեսությունում, քանի-որ այն բնութագրում է համապատասխան կապուղու թողունակությունը: Դրա բացահայտ արժեքը գտնելը բավականին բարդ խնդիր է նույնիսկ այնպիսի պարզ գրաֆների համար, ինչպիսիք են կենտ ցիկլերը: Մինչ այժմ հայտնի չէ 7-գագաթանի պարզ ցիկլի Շենոնի թողունակությունը:

Պարագրաֆ 1.2-ում նկարագրվում է ունիվերսալ գրաֆների դասը, որի համար Շենոնի թողունակությունը հայտնի է: Բերվում է նաև Ռոզենֆելդի[1] և Հալեսի[2] կողմից ստացված վերին գնահատականները գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թվի համար:

G գրաֆը կոչվում է ունիվերսալ, եթե կամայական H գրաֆի համար տեղի ունի.

$$\alpha(G \times H) = \alpha(G)\alpha(H):$$

Հեշտ է նկատել, որ ունիվերսալ գրաֆների համար $\Theta(G) = \alpha(G)$: Ինչպես ցույց է տվել Շենոնը, որպեսզի գրաֆը լինի ունիվերսալ, բավական է, որ այն ունենա α-ծածկույթ (գրաֆի գագաթների բազմությունը հնարավոր լինի ծածկել α հատ լրիվ ենթագրաֆներով): Մասնավորապես, զույգ ցիկլերը ունեն α-ծածկույթ և հետևաբար հանդիսանում են ունիվերսալ գրաֆներ:

Այնուհետև, Ռոզենֆելդը ներմուծելով գրաֆի $\rho(G)$ ինվարիանտը (կամ Ռոզենֆելդի թիվը), ցույց տվեց, որ գրաֆը ունիվերսալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha(G) = \rho(G)$: Ռոզենֆելդի և Հալեսի կոմից են ստացվել նաև հետևյալ անհավասարությունները գրաֆների ուժեղ արտադրյալների անկախության և ծածկույթի թվերի համար.

$$\alpha(G \times H) \leq \rho(G)\alpha(H), \tag{1}$$

$$\sigma(G \times H) \geq \rho(G)\sigma(H), \tag{2}$$

որտեղ $\sigma(G)$-ով նշանակված է G գրաֆի ծածկույթի թիվը:

Պարագրաֆ 1.3-ում համառոտ նկարագրվում են Լովասի[3] արդյունքները, մասնավորապես θ թվի սահմանումը, որը հանդիսանում է բավականին լավ վերին գնահատական Շենոնի թողունակության համար:

Պարագրաֆ 1.4-ում բերվում են ցիկլերի ուժեղ արտադրյալի (կամ ուժեղ արտադրյալով աստիճանների) անկախության և ծածկույթի թվի համար հայտնի արդյունքները: Սահմանվում է ցիրկուլանտ գրաֆը (ընդհանրացված ցիկլ), պարզ դատողություններով հաշվվում է գրաֆի ուսումնասիրվող ինվարիանտների արժեքները ցիրկուլանտ գրաֆների համար: Բերվում է ստացված առնչությունը ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի համար:

---

1 M. Rosenfeld, “On a problem of C. E. Shannon in graph theory”. Proc. Amer. Math. Soc., 18, 1967, pp. 315-319.

2 R. S. Hales, “Numerical Invariants and the Strong Product of Graphs”. Combinatorial Theory (B), 15, 1973, pp. 146-155.

3 L. Lovasz, “On the Shannon capacity of a graph”. IEEE Transactions on Information Theory, IT-25, 1979, pp. 1-7.

Ա. Գ. Մարկոսյանը[1] և ավելի ուշ Ռ. Ս. Հալեսը[2] ցույց են տվել, որ (1) և (2) –ում տեղի ունի հավասարություն սովորական ցիկլերի համար.

$$\alpha(C_{2n+1} \times C_{2k+1}) = [\rho(C_{2n+1})\alpha(C_{2k+1})],\ k \leq n, \tag{3}$$

$$\sigma(C_{2n+1} \times C_{2k+1}) =]\rho(C_{2n+1})\sigma(C_{2k+1})[,\ k \leq n: \tag{4}$$

Հեշտ է համոզվել, որ ցիկլերի համար տեղի ունեն $\alpha(C_n) = \left[\frac{n}{2}\right]$, $\sigma(C_n) = \left]\frac{n}{2}\right[$ և $\rho(C_n) = \frac{n}{2}$ հավասարությունները և հետևաբար զույգ ցիկլերը իրոք ունիվերսալ են: Ունենալով կենտ ցիկլերի ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը, կարող ենք տալ հետևյալ ստորին գնահատականը Շենոնի թողունակության համար՝ $\Theta(C_{2n+1}) \geq \sqrt{\alpha\left({C_{2n+1}}^2\right)} = \sqrt{n^2 + [n/2]}$:

C_n^k ցիրկուլանտ գրաֆ է կոչվում (կամ ընդհանրացված ցիկլ) n-գագաթանի այն գրաֆը, որի գագաթները կարելի է դասավորել շրջանագծի վրա այնպես, որ ամեն գագաթ կից լինի իրենից առաջ և հետո եկող $(k-1)$ գագաթներին և միայն նրանց ($n > 3,\ 2 \leq\ k \leq [n/2]$):

Հասկանալի է, որ $k = 2$ դեպքում ցիրկուլանտ գրաֆները հանդիսանում են սովորական ցիկլեր: Կարելի է համոզվել, որ ցիրկուլանտ գրաֆների համար ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝ $\alpha(C_n^k) = \left[\frac{n}{k}\right]$, $\sigma(C_n^k) = \left]\frac{n}{k}\right[$ և $\rho(C_n^k) = \frac{n}{k}$:

Ցիրկուլանտ գրաֆների քառակուսու ծածկույթի թվի համար Էլիսը և Թեյլորը[3] ստացել են հետևյալ արտահայտությունը՝ $\sigma\left({C_n^k}^2\right) = [\rho(C_n^k)\sigma(C_n^k)]$:

Մենք 2-րդ գլխում ապացուցում ենք, որ կամայական C_n^k և C_m^p ցիրկուլանտ գրաֆներ համար տեղի ունի.

$$\alpha\left(C_n^k \times C_m^p\right) = min(\left[\rho(C_n^k)\alpha\left(C_m^p\right)\right], \left[\alpha(C_n^k)\rho\left(C_m^p\right)\right]), \tag{5}$$

Որը փաստորեն $k = p = 2$ դեպքում սովորական ցիկլերի ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվն է (տես (3) հավասարությունը): (5) հավասարությունը, մասնավորապես թույլ է տալիս ստանալ հետևյալ ստորին գնահատականը Շենոնի թողունակության համար.

$$\Theta(C_n^k) \geq \sqrt{\alpha\left({C_n^k}^2\right)} = \sqrt{\left[\left[\frac{n}{k}\right]\frac{n}{k}\right]}: \tag{6}$$

(5)-ը ապացուցելու համար ձևակերպվում և լուծվում է նաև հետևյալ դիսկրետ օպտիմիզացիայի խնդիրը.

---

1 А. Г. Маркосян, “Число внутренней устойчивости в декартовом произведении простых циклов”. Известия Академии Наук Армянской ССР, Серия Математика 6:5, 1971, стр. 386-392.

2 R. S. Hales, “Numerical Invariants and the Strong Product of Graphs”. Combinatorial Theory (B), 15, 1973, pp. 146-155.

3 R. J. McEliece, H. Taylor, “Covering tori with squares”. Journal of Combinatorial Theory (A), Vol. 14, Issue 1, 1973, pp. 119-124.

Դիցուք $m, p, \alpha \in N$, $p \leq m$: Գտնել $x_1, x_2, \dots, x_m \in N \cup \{0\}$ անհայտները այնպես, որ $\sum_{i=1}^{m} x_i \to max$ և բավարարվեն հետևյալ անհավասարությունները.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p \leq \alpha \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{p+1} \leq \alpha \\ \dots \\ x_m + x_1 + \cdots + x_{p-1} \leq \alpha \end{cases}$$

3-րդ գլխում որոշակի պայմանների առկայության դեպքում ստանում ենք $\sigma\left(C_n^k \times C_m^p\right) = \max\left(\left]\rho(C_n^k)\sigma\left(C_m^p\right)\right[, \left]\sigma(C_n^k)\rho\left(C_m^p\right)\right[\right)$ հավասարությունը ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ծածկույթի թվի համար և ցույց ենք տալիս, որ այն հանդիսանում է (4)-ի ընդհանրացում (այսինքն թեորեմի պայմանները բավարարվում են սովորական ցիկլերի համար մասնավորապես):

Պարագրաֆ 1.5-ում ցիկլերի և ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության և ծածկույթի թվերը մեկնաբանվում են տորի ծածկույթի և փաթեթավորման խնդիրների լեզվով:

Կարելի է համոզվել, որ ցիկլերի ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը գտնելու խնդիրը համարժեք է ուղղանկյուն տորում մեծագույն թվով 2x2 քառակուսիներ փաթեթավորելու խնդրին, իսկ ծածկույթի թիվը գտնելու խնդիրը համարժեք է տորը 2x2 քառակուսիներով ծածկելու խնդրին:

Նմանապես ապացուցվում է, որ ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը գտնելու խնդիրը համարժեք է ուղղանկյուն տորում մեծագույն թվով կամայական նախորոք ֆիքսված չափի ուղղանկյուններ փաթեթավորելու խնդրին, իսկ ծածկույթի թիվը գտնելու խնդիրը համարժեք է տորը նվազագույն թվով ուղղանկյուններով ծածկելու խնդրին:

2-րդ գլուխը նվիրված է (5) առնչության ապացույցին: Ապացույցը արվում է մի քանի էտապով, նախ դիտարկվում է սովորական ցիկլերի և ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալը, ապա տրվում է ստորին գնահատական ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թվի համար, այնուհետև ձևակերպվում և լուծվում են դիսկրետ օպտիմիզացիայի մի քանի օժանդակ խնդիրներ, որոնց օգնությամբ ստացվում է (5) վերջնական արդյունքը: Ապացույցը կատարվում է կոնստրուկտիվ եղանակով, մասնավորապես, նկարագրվում են ալգորիթմներ օժանդակ խնդիրները լուծելու և արտադրյալ գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմություններից մեկը կառուցելու համար:

Պարագրաֆ 2.1-ում ուսումնասիրվում է սովորական ցիկլի և ցիրկուլանտ գրաֆի ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը: Ապացուցվում է, որ եթե $\alpha(C_{2n+1})\rho(C_m^p) \geq \rho(C_{2n+1})\alpha(C_m^p)$, ապա.

$$\alpha\left(C_{2n+1} \times C_m^p\right) = \left[\rho(C_{2n+1})\alpha(C_m^p)\right]:$$

Պարագրաֆ 2.2-ում ուսումնասիրվում է ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը ընդհանուր դեպքում և ստացվում է հետևյալ ստորին գնահատականը.

$$\alpha\left(C_m^p \times C_n^k\right) \geq \alpha\left(C_m^p\right)\alpha(C_n^k) + \min\left(r_{nk}\left[\alpha(C_m^p)/k\right], r_{mp}\left[\alpha(C_n^k)/p\right]\right), \tag{7}$$

որտեղ $r_{mp} = m(mod\ p), r_{nk} = n(mod\ k)$: Մյուս կողմից կարելի է համոզվել, որ (1) անհավասարությունը ցիրկուլանտ գրաֆների համար տալիս է հետևյալ վերին գնահատականը.

$$\alpha\left(C_m^p \times C_n^k\right) \leq \alpha\left(C_m^p\right)\alpha(C_n^k) + \min\left(\left[r_{nk}\alpha(C_m^p)/k\right], \left[r_{mp}\alpha(C_n^k)/p\right]\right): \tag{8}$$

Ապացուցվում են մի քանի հետևանքներ, որոնց պայմանների դեպքում (7) և (8) անհավասարությունները միասին ((7) անհավասարության ապացույցի մեջ անելով որոշ փոփոխություններ) տալիս են (5) արդյունքը: Մասնավորապես, դժվար չէ նկատել, որ սովորական ցիկլերի դեպքում (7) և (8)-ով տրվող ստորին և վերին գնահատականները հավասար են, ասինքն, (7)-ը արդեն իսկ հանդիսանում է Հալեսի (3) արդյունքի ընդհանրացում:

Պարագրաֆ 2.3-ում ձևակերպվում և լուծվում են օժանդակ դիսկրետ օպտիմիզացիայի խնդիրները, որոնք այնուհետև օգտագործվում են հիմնական թեորեմի ապացույցում:

Դրվում է հետևյալ հիմնական խնդիրը (նշ. $S(m, p, \alpha)$).

1. Դիցուք $m, p, \alpha \in N,\ p \leq m$: Գտնել $x_1, x_2, \dots, x_m \in N \cup \{0\}$ անհայտները այնպես, որ $\sum_{i=1}^m x_i \to max$ և բավարարվեն հետևյալ անհավասարությունները.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p \leq \alpha \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{p+1} \leq \alpha \\ \dots \\ x_m + x_1 + \cdots + x_{p-1} \leq \alpha \end{cases}$$

Այնուհետև դրվում է սրան անալոգ 0-1 օպտիմիզացիայի խնդիրը՝ $S_{0,1}(m, p, \alpha)$.

2. Դիցուք $m, p, \alpha \in N,\ \alpha \leq p \leq m$: Գտնել $x_1, x_2, \dots, x_m \in \{0,1\}$ անհայտները այնպես, որ $\sum_{i=1}^m x_i \to max$ և բավարարվեն հետևյալ անհավասարությունները.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p \leq \alpha \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{p+1} \leq \alpha \\ \dots \\ x_m + x_1 + \cdots + x_{p-1} \leq \alpha \end{cases}$$

Ապացուցվում է հետևյալ պնդումը.

Պնդում 2.1. Եթե կամայական $m, p, \alpha \in N$-ի համար ($\alpha \leq p \leq m$) $S_{0,1}(m, p, \alpha)$ խնդիրը ունի $[m\alpha/p]$ արժեքով լուծում, ապա $S(m, p, \alpha)$ խնդիրը նույնպես ունի $[m\alpha/p]$ արժեքով լուծում կամայական $m, p, \alpha \in N$-ի համար ($p \leq m$):

Կարելի է համոզվել, որ բերված արժեքներով լուծումները հանդիսանում են օպտիմալ լուծումներ համապատասխանաբար $S(m, p, \alpha)$ և $S_{0,1}(m, p, \alpha)$ խնդիրների համար: Այնուհետև, $S_{0,1}(m, p, \alpha)$ խնդիրը լուծելու համար ձևակերպվում են հետևյալ 2 խնդիրները.

Դիցուք $p, r, \alpha, \beta \in N,\ \ r < p$: Կասենք, որ $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+r})$ 0-1 վեկտորը թույլատրելի է, եթե բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} x_i = \alpha \le p \\ \sum_{i=p+1}^{p+r} x_i = \beta \le r \end{cases}$$

Դիտարկենք հետևյալ անհավասարությունների համակարգերը.

3. Դիցուք $\beta/r \le \alpha/p$, գտնել $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+r})$ թույլատրելի 0-1 վեկտոր այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ անհավասարությունները (նշանակենք այս խնդիրը $H_1(p, r, \alpha, \beta)$).

$$\begin{cases} \sum_{i=p+1}^{p+k} x_i \le \sum_{i=1}^{k} x_i; & k = 1, \dots, r \\ \sum_{i=p+r-k}^{p+r} x_i \le \sum_{i=p-k}^{p} x_i; & k = 0, \dots, r-1 \\ \sum_{i=p+1}^{p+r} x_i \le \sum_{i=k}^{k+r-1} x_i; & k = 1, \dots, p-r+1 \end{cases}$$

4. Դիցուք $\beta/r \ge \alpha/p$, գտնել $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+r})$ թույլատրելի 0-1 վեկտոր այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ անհավասարությունները (նշանակենք այս խնդիրը $H_2(p, r, \alpha, \beta)$).

$$\begin{cases} \sum_{i=p+1}^{p+k} x_i \ge \sum_{i=1}^{k} x_i; & k = 1, \dots, r \\ \sum_{i=p+r-k}^{p+r} x_i \ge \sum_{i=p-k}^{p} x_i; & k = 0, \dots, r-1 \\ \sum_{i=p+1}^{p+r} x_i \ge \sum_{i=k}^{k+r-1} x_i; & k = 1, \dots, p-r+1 \end{cases}$$

Կասենք $H_1(p, r, \alpha, \beta)$ խնդիրը կոռեկտ է տրված $p, r, \alpha, \beta \in N$ պարամետրերի համար, եթե դրանք բավարարում են H_1 խնդրի պայմաններին՝ $\alpha \le p, \beta \le r$ և $\beta/r \le \alpha/p$:
Նմանապես, $H_2(p, r, \alpha, \beta)$ խնդիրը կոռեկտ է տրված $p, r, \alpha, \beta \in N$ պարամետրերի համար, եթե դրանք բավարարում են H_2 խնդրի պայմաններին՝ $\alpha \le p, \beta \le r$ և $\beta/r \ge \alpha/p$:

Կասենք H_1 խնդիրը (H_2 խնդիրը) ունի լուծում, եթե ունեն լուծում բոլոր կոռեկտ $H_1(p, r, \alpha, \beta)$ խնդիրները ($H_2(p, r, \alpha, \beta)$ խնդիրները) $p, r, \alpha, \beta \in N$:

Այնուհետև ապացուցվում են հետևյալ պնդումները.

Պնդում 2.2. եթե H_1 խնդիրը ունի լուծում, ապա $S_{0,1}(m,p,\alpha)$ խնդիրը ունի $[m\alpha/p]$ արժեքով լուծում:

Պնդում 2.3. Որպեսզի $H_1(p,r,\alpha,\beta)$ կոռեկտ խնդիրը ունենա լուծում, բավական է, որ $H_2(r,p(mod\ r),\beta,\alpha-\beta[p/r])$ խնդիրը լինի կոռեկտ և ունենա լուծում:

Պնդում 2.4. Որպեսզի $H_2(p,r,\alpha,\beta)$ կոռեկտ խնդիրը ունենա լուծում, բավական է, որ $H_1(r,p(mod\ r),\beta,\alpha-\beta[p/r])$ խնդիրը լինի կոռեկտ և ունենա լուծում:

Պնդում 2.5. H_1 և H_2 խնդիրները ունեն լուծում:

Այսպիսով, բոլոր 4 ձևակերպված խնդիրները լուծվել են կոնստրուկտիվ եղանակով:

Պարագրաֆ 2.4-ում ապացուցվում է հիմնական թեորեմը (տես (5) առնչությունը): Թեորեմի ապացույցը բաղկացած է երկու հիմնական մասից: 1-ին մասում օգտվելով $S(m,p,\alpha)$ խնդրի լուծումից, որոշվում են արտադրիչ գրաֆներից մեկում համապատասխան անկախ բազմությունների հզորությունները, իսկ 2-րդ մասում կառուցվում է անկախ բազմություն արտադրյալ գրաֆում և ապացուցվում է, որ այն ամենամեծն է:

Բերվում է (6) ստորին գնահատականը Շենոնի թողունակության համար և հաշվվում է մի քանի ցիրկուլանտ գրաֆների համար Շենոնի թողունակության ստորին և վերին գնահատականները օգտվելով (6)-ից և ցիրկուլանտ գրաֆների համար Լովասի ϑ թվից (վերին գնահատականի արտահայտությունը ճիշտ է k =3 դեպքում).

$$\sqrt{\left[\frac{[n/k]n}{k}\right]} \le \Theta(C_n^k) \le n\left(1-\frac{\frac{1}{2}-\cos(\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{k}\right])-\cos(\frac{2\pi}{n}(\left[\frac{n}{k}\right]+1))}{\left(\cos(\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{k}\right])-1\right)\left(\cos(\frac{2\pi}{n}(\left[\frac{n}{k}\right]+1))-1\right)}\right):$$

Որոշ ցիրկուլանտ գրաֆների համար ստորին և վերին գնահատականները համընկնում են ստորակետից հետո 2 նիշի ճշտությամբ, ինչը նշանակում է Շենոնի թողունակության արժեքը նշված գրաֆների համար 2 նիշի ճշտությամբ գտնվել է:

Պարագրաֆ 2.5-ում նկարագրվում են ալգորիթմներ, որոնք կառուցում են վերը ձևակերպված օպտիմիզացիայի խնդիրների լուծումները, ինչպես նաև, ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալում ամենամեծ անկախ բազմություններից մեկը: Ինչպես նշվեց վերևում, կառուցված ամենամեծ անկախ բազմությանը համապատասխանում է մեծագույն թվով տվյալ չափի ուղղանկյունների փաթեթավորում համապատասխան ուղղանկյուն տորում:

3-րդ գլխում ուսումնասիրվում է ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ծածկույթի թիվը: Որոշ պայմանների առկայության դեպքում, ապացուցվում է, որ $\sigma\left(C_n^k\times C_m^p\right)=$ max $(]\rho(C_n^k)\sigma\left(C_m^p\right)[,]\sigma(C_n^k)\rho\left(C_m^p\right)[)$: Ուսումնասիրվում են նաև C_5 ցիկլի աստիճանների անկախության թվերը: Ապացուցվում է պնդում, որը թույլ է տալիս ${C_5}^{2n+1}$ գրաֆի անկախության թիվը գտնելու փոխարեն գտնել համապատասխան տիպի ամենամեծ ենթագրաֆը ${C_5}^{2n}$ գրաֆում: Նշված եղանակով հաշվվում է $\alpha({C_5}^3)$-ը:

Պարագրաֆ 3.1-ում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3.1. Եթե C_m^p և C_n^k ցիրկուլանտ գրաֆների համար բավարարվում են հետևյալ պայմանները (նշ. $r_{mp}=m(mod\ p), r_{nk}=n(mod\ k)$).

1. $p\ge 2r_{mp},\ r_{mp}\ne 0,\ r_{nk}\ne 0$

2. $(\sigma(C_m^p)-1)(k-r_{nk}) \le k\left[\frac{\sigma(C_n^k)}{2}\right]$

ապա $\sigma(C_m^p \times C_n^k) =]\sigma(C_m^p)\times\rho(C_n^k)[$:

Ցույց ենք տալիս, որ եթե $p = 2r_{mp}$ և $k = 2r_{nk}$, ապա թեորեմի պայմանները բավարարվում են, այսինքն $\sigma(C_n^k \times C_m^p) = \max(]\rho(C_n^k)\sigma(C_m^p)[,]\sigma(C_n^k)\rho(C_m^p)[)$: Հասկանալի է, որ կենտ ցիկլերի համար $p = 2r_{mp} = 2$ և $k = 2r_{nk} = 2$, հետևաբար ստացված արդյունքը հանդիսանում է սովորական ցիկլերի համար ստացված համանման արդյունքի ընդհանրացում:

Պարագրաֆ 3.2-ում ուսումնասիրվում են C_5 գրաֆի աստիճանների անկախության թվերը: Առաջարկվում է մոտեցում, որը կարող է օգնել C_5 գրաֆի աստիճանների անկախության թվերը հաշվելիս:

Դիցուք տրված է G գրաֆը: Դիտարկենք G-ի գագաթների կամայական անկախ բազմություններով տրոհում $S_1, S_2, \dots, S_n$: Դիտարկենք S գրաֆը, որի գագաթները $S_1, S_2, \dots, S_n$ –ն են և S_i, S_j գագաթները միացնում ենք կողով այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի կող G գրաֆում, որը միացնում է S_i-ի որևէ գագաթ S_j-ի որևէ գագաթի: G-ն անվանենք S գրաֆի անկախ ընդլայնում:

Ապացուցվում է, որ ${C_5}^{2n+1}$ գրաֆի ամեն մի անկախ բազմությանը համապատասխանում է նույն հզորության ենթագրաֆ ${C_5}^{2n} \times K_2$ գրաֆում, որը հանդիսանում է C_5-ի կամ դրա որևէ սեփական ենթագրաֆի անկախ ընդլայնում: Տեղի ունի նաև հակառակ պնդումը, ընդ-որում, եթե ${C_5}^{2n+1}$-ի անկախ բազմության հզորությունը մեծ է $2 \cdot 5^n$-ից, ապա ${C_5}^{2n} \times K_2$-ում դրան համապատասխանող ենթագրաֆը պարունակում է կենտ ցիկլ: Օգտվելով նշված եղանակից ապացուցվել է, որ $\alpha({C_5}^3) = 10$:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

1. Գտնված է կամայական երկու ցիրկուլանտ գրաֆների (ընդհանրացված ցիկլերի) ուժեղ արտադրյալի անկախության թիվը: Լուծված է օժանդակ դիսկրետ օպտիմիզացիայի խնդիրը և նկարագրված է ալգորիթմ դրա լուծումը կառուցելու համար:
2. Նկարագրված է ալգորիթմ ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ամենամեծ անկախ բազմություններից մեկը կառուցելու համար: Այս խնդիրը համարժեք է մեծագույն թվով տրված չափի ուղղանկյունները տրված ուղղանկյուն տորում փաթեթավորելու խնդրին:
3. Ստացված է ստորին գնահատական ցիրկուլանտ գրաֆների Շենոնի թողունակության համար:
4. Գտնված է որոշ ցիրկուլանտ գրաֆների ուժեղ արտադրյալի ծածկույթի թիվը:
5. Առաջարկված է եղանակ, որը կարող է օգտակար լինել 5 գագաթանի ցիկլի աստիճանների անկախության թվերը հաշվելիս:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՊԱՐԱԿՎԱԾ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

[1] S. H. Badalyan, S. E. Markosyan, “The Stable Set Number for the Strong Product of Generalized Cycles”. Transactions of IIAP of NAS RA: Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 32, 2009, pp. 27-34.

[2] S. H. Badalyan, “The Clique Covering Number for the Strong Product of Generalized Cycles”. Transactions of IIAP of NAS RA: Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 32, 2009, pp. 35-38.

[3] S. H. Badalyan, S. E. Markosyan, “Numerical Invariants for the Strong Product of Generalized Cycles”. Proceedings of the Conference CSIT-2009, Yerevan, 2009, pp. 81-84.

[4] S. H. Badalyan, S. E. Markosyan, “On independence number of strong generalized cycles product”. Proceedings of YSU, Vol. 2, 2010, pp. 35-40.

[5] S. H. Badalyan, A. J. Mnatsakanyan, “On the independence numbers of the powers of C_5 graph”. Proceedings of YSU, Physical and Mathematical sciences, N1, 2012, pp. 38-42.

РЕЗЮМЕ

Бадалян Севак

О ЧИСЛЕ НЕЗАВИСИМОСТИ СИЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ЦИКЛОВ

В 1956 г., С. Шеннон сформулировал одну из фундаментальных проблем теории информации - нахождение пропускной способности шумного канала [см. “C. E. Shannon, The zero-error capacity of a noisy channel, Transactions on Information Theory, Inst. Radio Eng., IT-2, 1956, pp. 8-19”]. Проблема оказалась тесно связанной с числами независимости сильного произведения графов. $\Theta(G)$ пропускная способность графа G определяется следующим образом:

$$\Theta(G) = sup_{n\geq 1} \sqrt[n]{\alpha(G^n)},$$

где $\alpha(G^n)$ - число независимости n-ой степени графа G (определенной сильным произведением графов). Пропускная способность шумного канала выражается пропускной способностью графа соответствующего этому каналу.

Проблема нахождения пропускной способности графа сложна и известны всего лишь несколько классов графов для которых определение пропускной способности не представляет трудности (например универсальные графы). Проблема сложна даже для таких простых графов как нечетные циклы. Пропускная способность C_5 была неизвестна около 20 лет до того, как Л.Ловас оригинальным подходом доказал $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$ и ввел $\vartheta(G)$ число Ловаса – достаточно хорошая верхняя граница для $\Theta(G)$ [see “L. Lovasz, On the Shannon capacity of a graph, IEEE Transactions on Information Theory, IT-25, 1979, pp. 1-7”].

Так как определение значения $\Theta(G)$ является достаточно сложным, различные верхние и нижние границы были найдены для $\Theta(G)$. Следующие результаты получены Розенфельдом [see “M. Rosenfeld, On a problem of C. E. Shannon in graph theory, Proc. Amer. Math. Soc., 18, 1967, pp. 315-319”] для чисел независимости и покрытия графов G и H:

$$\alpha(G \times H) \leq \rho(G)\alpha(H),$$
$$\sigma(G \times H) \geq \rho(G)\sigma(H),$$

где $\rho(G)$ - число Розенфельда графа G (или дробное число независимости).

Позднее Маркосян [см. “А. Г. Маркосян, Число внутренней устойчивости в декартовом произведении простых циклов, Известия Академии Наук Армянской ССР, Серия Математика 6:5, 1971, стр. 386-392”] и Халес [см. “R. S. Hales, Numerical Invariants and the Strong Product of Graphs, Combinatorial Theory (B), 15, 1973, pp. 146-155”] показали что для циклов имеют место равенства (в неравенствах выше):

$$\alpha(C_{2n+1} \times C_{2k+1}) = \min\left([\rho(C_{2n+1})\alpha(C_{2k+1})], [\alpha(C_{2n+1})\rho(C_{2k+1})]\right),$$

$$\sigma(C_{2n+1} \times C_{2k+1}) = \max\left(]\rho(C_{2n+1})\sigma(C_{2k+1})[,]\sigma(C_{2n+1})\rho(C_{2k+1})[\right).$$

Мы установили тот же результат для числа независимости сильного произведения циркулянтных графов (или обобщенных циклов):

$$\alpha\left(C_n^k \times C_m^p\right) = min(\left[\rho(C_n^k)\alpha\left(C_m^p\right)\right], \left[\alpha(C_n^k)\rho\left(C_m^p\right)\right]),$$

где циркулянтный граф C_n^k – граф, полученный от -цикла путем добавления всех диагоналей соединяющих вершины на расстоянии меньше чем k. Циркулянтные графы очевидно являются обобщением обычных циклов (для $k = 3$).

Полученное равенство позволяет оценить пропускную способность Шеннона циркулянтных графов следующим образом: $\Theta(C_n^k) \geq \sqrt{\alpha\left({C_n^k}^2\right)} = \sqrt{\left[\left[\frac{n}{k}\right]\frac{n}{k}\right]}$.

Легко увидеть, что нахождение наибольшего независимого множества в $C_n^k \times C_m^p$ сильном произведении циркулянтных графов эквивалентна проблеме упаковки максимального числа $p \times k$ прямоугольников в $m \times n$ прямоугольном торусе.

В частности, для установления выше упомянутого равенства, решена следующая задача дискретной оптимизации:

Пусть $m, p, \alpha \in N,\ p \leq m$. Найти $x_1, x_2, \dots, x_m \in N \cup \{0\}$ неизвестные, так чтобы выполнялись следующие неравенства и $\sum_{i=1}^{m} x_i \to max$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p \leq \alpha \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{p+1} \leq \alpha \\ \dots \\ x_m + x_1 + \cdots + x_{p-1} \leq \alpha \end{cases}$$

Описаны алгоритмы для построения наибольшего независимого множества в сильном произведении циркулянтных графов а также для построения решения оптимизационной задачи.

А также, получено $\sigma\left(C_n^k \times C_m^p\right) = \max\left(\right]\rho(C_n^k)\sigma\left(C_m^p\right)\left[, \right]\sigma(C_n^k)\rho\left(C_m^p\right)\left[\right)$ равенство для некоторых n, k, m, p (в частности, условия выполняются для обычных циклов).

Основные результаты полученные в диссертационной работе:

1. Найдено число независимости сильного произведения любых двух циркулянтных графов (обобщенных циклов). Решена вспомогательная задача дискретной оптимизации и описан алгоритм для построения его решения.
2. Описан алгоритм для построения наибольшего независимого множества сильного произведения циркулянтных графов. Тот же алгоритм может быть использован для упаковки максимального числа прямоугольников данного размера в соответствующем прямоугольном торусе.
3. Получена нижняя граница для пропускной способности циркулянтных графов основываясь на найденном соотношении для числа независимости сильного произведения циркулянтных графов.
4. Найдено число покрытия сильного произведения циркулянтных графов при наличии определенных условий (в частности эти условия выполняются для обычных циклов).
5. Предложен метод который может помочь найти числа независимости степеней C_5.

ABSTRACT

Badalyan Sevak

ON THE INDEPENDENCE NUMBER OF THE STRONG PRODUCT OF GENERALIZED CYCLES

In 1956, C. Shannon formulated one of the fundamental problems in information theory, finding the capacity of a noisy channel [see "C. E. Shannon, The zero-error capacity of a noisy channel, Transactions on Information Theory, Inst. Radio Eng., IT-2, 1956, pp. 8-19"]. The problem proved to be tightly connected with the problem of finding independence numbers of the strong products of graphs. $\Theta(G)$ Shannon capacity of a graph G is defined as follows:

$$\Theta(G) = sup_{n\geq 1} \sqrt[n]{\alpha(G^n)},$$

where $\alpha(G^n)$ is the independence number of the n-th degree of G (defined through the strong product of graphs). Capacity of a noisy channel is expressed through the Shannon capacity of a graph corresponding to the channel.

The problem of finding the Shannon capacity of a graph is a difficult problem and there are only few classes of graphs with known capacities (e.g. universal graphs). The problem is difficult even for such simple graphs as odd cycles. $\Theta(C_5)$ was unknown for about 20 years until L. Lovasz proved $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$ with an original approach and introduced the Lovasz number $\vartheta(G)$ of a graph, an upper bound for $\Theta(G)$ [see "L. Lovasz, On the Shannon capacity of a graph, IEEE Transactions on Information Theory, IT-25, 1979, pp. 1-7"].

Different lower and upper bounds have been found for $\Theta(G)$ taking into account that finding the explicit value of $\Theta(G)$ is quite difficult. The following results were obtained by Rosenfeld [see "M. Rosenfeld, On a problem of C. E. Shannon in graph theory, Proc. Amer. Math. Soc., 18, 1967, pp. 315-319"] for the independence and clique covering numbers of any G and H graphs:

$$\alpha(G \times H) \leq \rho(G)\alpha(H),$$
$$\sigma(G \times H) \geq \rho(G)\sigma(H),$$

where $\rho(G)$ is the Rosenfeld number of a graph (or otherwise known as fractional independence number).

Later Markosyan [see "А. Г. Маркосян, Число внутренней устойчивости в декартовом произведении простых циклов, Известия Академии Наук Армянской ССР, Серия Математика 6:5, 1971, стр. 386-392"] and Hales [see "R. S. Hales, Numerical Invariants and the Strong Product of Graphs, Combinatorial Theory (B), 15, 1973, pp. 146-155"] showed that for cycles equality takes place (in inequalities above):

$$\alpha(C_{2n+1} \times C_{2k+1}) = \min\left([\rho(C_{2n+1})\alpha(C_{2k+1})], [\alpha(C_{2n+1})\rho(C_{2k+1})]\right),$$

$$\sigma(C_{2n+1} \times C_{2k+1}) = \max\left(]\rho(C_{2n+1})\sigma(C_{2k+1})[,]\sigma(C_{2n+1})\rho(C_{2k+1})[\right).$$

We establish the same result for the independence number of the strong product of circulant graphs (or generalized cycles):

$$\alpha\left(C_n^k \times C_m^p\right) = min(\left[\rho(C_n^k)\alpha\left(C_m^p\right)\right], \left[\alpha(C_n^k)\rho\left(C_m^p\right)\right]),$$

where C_n^k circulant graph is a graph obtained from n-length cycle by adding all chords connecting vertices at distance less than k. Circulant graphs are obviously a generalization for ordinary cycles (for $k = 3$ case).

Obtained equality allows estimating the Shannon capacity of circulant graphs in the following way: $\Theta(C_n^k) \geq \sqrt{\alpha\left({C_n^k}^2\right)} = \sqrt{\left[\left[\frac{n}{k}\right]\frac{n}{k}\right]}$.

It can be easily seen that finding the maximum independent set in $C_n^k \times C_m^p$ strong product of circulant graphs is equivalent to finding the maximum packing of $p \times k$ rectangles into $m \times n$ rectangular torus.

Particularly, the following discrete optimization problem is solved for proving the equality:

Let $m, p, \alpha \in N,\ p \leq m$. Find $x_1, x_2, \dots, x_m \in N \cup \{0\}$ unknowns so that $\sum_{i=1}^{m} x_i \to max$ and the following inequalities are satisfied:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p \leq \alpha \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{p+1} \leq \alpha \\ \quad \dots \\ x_m + x_1 + \cdots + x_{p-1} \leq \alpha \end{cases}$$

Algorithms are described for constructing the solution of the optimization problem and the maximum independent set in the strong product of circulant graphs.

In the end, it is proved that $\sigma\left(C_n^k \times C_m^p\right) = \max\left(\left]\rho(C_n^k)\sigma\left(C_m^p\right)\right[, \left]\sigma(C_n^k)\rho\left(C_m^p\right)\right[\right)$ in the presence of some conditions on n, k, m, p numbers (particularly, the conditions hold for cycles).

The following main results are obtained in the thesis:

1. The independence number of the strong product of any two circulant graphs (generalized cycles) is found. The auxiliary discrete optimization problem is solved and an algorithm is described for constructing its solution.
2. An algorithm is described for constructing a maximum independent set in the strong product of two circulant graphs. The problem is equivalent to packing the maximum number of rectangles of a given size into the corresponding rectangular torus.
3. Based on the found independence number of the strong product of circulant graphs, a lower bound is suggested for the Shannon capacity of circulant graphs.
4. The clique covering number of the strong product of circulant graphs is found in the presence of some conditions (the conditions particularly hold for ordinary cycles). The problem is equivalent to covering rectangular torus by the minimum number of rectangles of a given size.
5. A method is suggested that can be of help when determining independence numbers of powers of 5-length cycle.