

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՆԱՄԱՍԱՐԱՆ

Ադամյան Ռուբեն Օհանի

ՆԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՆԵՐԿՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ
ՆԵՏԱԶՈՏՈՒՄ ԵՎ ԱԿՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄ

Ա.01.09. «Մաթեմատիկական կիրառական և մաթեմատիկական
տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական
գիտությունների թեկնածուի գիտական ասպիրանտի հայցման
արեւնախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2008

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Адамян Рубен Оганович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ И РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ
РАСКРАСКИ ГРАФОВ СРАВНЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.09. «Математическая
кибернетика и математическая логика»

Ереван 2008

Արենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	Ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր Ս.Ե. Մարկոսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	Ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր Յու.Մ. Մովսիսյան Ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Ռ.Ն. Տոնոյան
Առաջարկար կազմակերպություն՝	ՏՏ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2008թ. հունիսի 10-ին, ժամը՝ 14⁰⁰-ին, ԵՊՏ-ում գործող ԲՈՏ-ի 044 "Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն" մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 375025, Ալեք Մանուկյան 1:

Արենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2008թ. մայիսի 10-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝	Ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Ժ. Դումանյան
--	--

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук С.Е. Маркосян
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук Ю.М. Мовсисян кандидат физ.-мат. наук Р.Н. Тоноян
Ведущая организация:	Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита состоится 10-го июня 2008г. в 14⁰⁰ часов на заседании специализированного совета 044 "Математическая кибернетика и математическая логика" ВАК, при ЕГУ по адресу: 375025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 10-го мая 2008г.

Ученый секретарь специализированного совета	кандидат физ.-мат. наук В.Ж. Думанян
--	---

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴԿԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի հրապարությունը: Գրաֆների ներկման և գրաֆում ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդիրները դիսկրետ մաթեմատիկայի ամենաշար ուսումնասիրված խնդիրներից են: Մա պայմանավորված է նրանց սերպ կապով բազմաթիվ կիրառական խնդիրների հետ: Մասնավորապես՝ կարգավորումների տեսության մեջ տրված աշխարհաքները նվազագույն քանակի աշխարհներով կարարելու կամ տրված քանակի աշխարհներով տրված աշխարհներից առավելագույն քանակով աշխարհները կարարելու խնդիրները, գերմեծ ինտերգրալային սխեմաների ֆիզիկական նախագծման մեջ տրված շղթաներն ուղեգծելու համար անհրաժեշտ ամենափոքր տարածքը գտնելու կամ տրված տարածքում տրված շղթաներից հնարավորինս ամենաշար ուղեգծելու խնդիրները, ծրագրի արդյունավետ աշխարհների համար պրոցեսորի ռեգիստրների անհրաժեշտ նվազագույն քանակը գտնելու կամ ռեգիստրների տրված քանակը հնարավորինս արդյունավետ օգտագործելու խնդիրները բերվում են ներկման խնդիրներին:

Գրաֆի մինիմալ ներկում և գրաֆում ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդիրները հայրնի և բավականաչափ լավ ուսումնասիրված \mathcal{NP} -դժվար խնդիրներ են: Այս խնդիրների համար նաև ուսումնասիրված է նրանց համար լավ մոտավոր ալգորիթմների գոյության հարցը և ապացուցված է, որ նրանց համար կամայական ֆիքսված շեղման գնահատական ունեցող մոտավոր ալգորիթմներ գտնելը նույնպես \mathcal{NP} -դժվար է:

Գրաֆի ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրում պահանջվում է այդ գրաֆում գտնել առավելագույն քանակով զագաթներ պարունակող ենթագրաֆ, որը q -ներկելի է: Այս խնդիրը հանդիսանում է գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմություն ($q = 1$) և մինիմալ ներկում ($q = \chi(G)$, որտեղ $\chi(G)$ -ն G գրաֆի ներկման թիվն է) գտնելու խնդիրների ընդհանրացումը: Ռեպրի այն $q = 1$ և $q = \chi(G)$ դեպքերում \mathcal{NP} -դժվար է: Լևիսի և Յանակակիսի կողմից ապացուցված է, որ այն \mathcal{NP} -դժվար է նաև q -ի բոլոր $q = 1, 2, \dots, \chi(G)$ արժեքների համար: Նայրնի է, որ ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը հեշտությամբ բերվում է ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդրին և հակառակը:

Ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆի q գույներից յուրաքանչյուրով ներկված զագաթները կազմում են անկախ բազմություն, այդ պարագայում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը նաև անվանում են q -ամենամեծ անկախ բազմություններ (q -MIS, q -maximum independent sets) գտնելու խնդիր: Եթե դիտարկենք G -ի լրացում \overline{G} գրաֆը, ապա G -ում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելը համարժեք է \overline{G} -ում այնպիսի K_1, K_2, \dots, K_q լրիվ ենթագրաֆներ գտնելուն, որ $|\bigcup_{1 \leq j \leq q} K_j|$ -ն լինի հնարավորինս չափով մեծ (քանի որ G -ի ցանկացած անկախ բազմության զագաթներով \overline{G} -ում ծնվում է լրիվ ենթագրաֆ): Այս խնդիրը *ամենամեծ q լրիվ ենթագրաֆներ գտնելու* խնդիրն է: Օրինակ, եթե G -ն տեղադրության գրաֆ է, ապա G -ում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու համար ավելի նպատակահարմար է \overline{G} գրաֆում (որը համեմատությունների գրաֆ է) լուծել ամենամեծ q լրիվ ենթագրաֆներ գտնելու խնդիրը: Քանի որ համեմատությունների

գրաֆում այն լուծվում է ավելի պարզ ալգորիթմի միջոցով:

Առաջին անգամ ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը ձևակերպվել և էֆեկտիվորեն լուծվել է ինքերվալաների գրաֆների համար: Տեղադրյալում մշակվել են ալգորիթմներ այդ խնդրի լուծման համար եռանկյունացված (ֆիքսված q -ի դեպքում), համեմատությունների և կոհամեմատությունների գրաֆների դասերի համար: Կարարյալ գրաֆների դասի համար այս խնդրի լուծումը կամայական q -ի դեպքում ՆՔ-դժվար է, իսկ եթե q -ն համարենք ֆիքսված պարամետր, ապա դեռևս հայտնի չէ այդ խնդրի ՆՔ-դժվար լինելը: Կարարյալ գրաֆները յուրահավույթ են նրանով, որ նրանց համար հայտնի են ամենամեծ անկախ բազմություն և նվազագույն քանակի գույներով ներկում գտնող բազմանդամային ալգորիթմներ: Շրջանագծի աղեղների գրաֆի համար գոյություն ունեն ամենամեծ անկախ բազմություն գտնող ալգորիթմներ, բայց մինչև անկախ ներկում գտնելու խնդիրը ՆՔ-դժվար է: Տեղաբար քիչ հավանական է, որ կամայական q -ի դեպքում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի համար գոյություն ունենա բազմանդամային ալգորիթմ շրջանագծի աղեղների գրաֆների համար: Մինչ այժմ հայտնի են բազմանդամային ալգորիթմներ $q = 1$ և $q = 2$ դեպքերի համար, այսինքն ամենամեծ անկախ բազմություն և ամենամեծ երկկողմանի ենթագրաֆ գտնող ալգորիթմներ:

Տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆներում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը հանդիսանում է q հար անփիշղթաների ամենամեծ միավորումը գտնելու խնդիրը: Շղթաների և անփիշղթաների ամենամեծ միավորումը գտնելու խնդիրների ուսումնասիրման մեջ կենտրոնական տեղ է գրավում Գրին-Կլեյմանի թեորեմը և նրա երկակի թեորեմը: Այնուհետև Ֆոմինը և Ֆրանկը ընդհանրացրել են Գրին-Կլեյմանի թեորեմը և նրա երկակի թեորեմն աջիկի կողմնորոշված գրաֆների համար, նրանց կողմից փրված ապացույցը հիմնված է գրաֆում պոպտեցիայի գաղափարի և գրաֆում նվազագույն արժեքով շրջանառություն և հոսք գտնելու վրա: Այդ կոնստրուկտիվ ապացույցները թույլ են փայլի կառուցել փրված քանակով շղթաների և անփիշղթաների առավելագույն միավորումները գտնող բազմանդամային ալգորիթմներ:

Օպտիմալ (ամենամեծ) q -ներկելի ենթագրաֆի որոշ հատկություններ՝ կապված \max հարաբերությունների հետ ուսումնասիրված են Բերթի և Կամերոնի աշխատանքներում:

Աշխարանքի նպատակն ու խնդիրները: Աշխարանքի նպատակն է հետազոտել գրաֆում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը, նրա համար գտնել ավելի արդյունավետ ու ավելի պարզ ճշգրիտ ալգորիթմներ և ավելի փոքր շեղման գնահատական ունեցող մոդավոր ալգորիթմներ: Աշխարանքում ուսումնասիրված է նաև համեմատությունների գրաֆների ամենամեծ անկախ բազմությունների ամենափոքր փրանսվերսալի հզորության և այդ փրանսվերսալը գտնելու հարցը:

Տեղագրաման օբյեկտը: Աշխարանքի հետազոտման օբյեկտ են հանդիսանում q -ներկելի ենթագրաֆները և չհատվող ամենամեծ անկախ բազմությունների բազմությունները:

Վերագրման մեթոդները: Աշխարանքում լայնորեն օգտագործված են գրաֆների փոխության մեթոդները, հատկապես, գրաֆում մաքսիմալ հոսք, նվազագույն

արժեքով շրջանառություն գտնելու, գրաֆը նվազագույն քանակով շղթաների բաժանելու մեթոդները:

Արդյունքների գիտական նորությունը: Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են.

- Մասսիմալ հոսք գտնելու ալգորիթմի վրա հիմնված և հեղուկաբարձ գոյություն ունեցող ալգորիթմից ավելի արդյունավետ ալգորիթմի կառուցումը՝ $q = \omega - 2$ դեպքում (որտեղ ω -ն գրաֆի ամենամեծ լրիվ ենթագրաֆի գագաթների քանակն է) ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու համար.
- ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու համար ընդհանրացված ազահ ալգորիթմի կառուցումը և նրա համար շեղման գնահատականի գտնելը, որը լավացնում է սովորական ազահ ալգորիթմի համար հայտնի շեղման գնահատականը.
- համեմատությունների գրաֆների ամենամեծ անկախ բազմությունների տրանսվերսալային թվի և նրանց անկախության թվի հավասարության ապացույցը, ամենափոքր տրանսվերսալ գտնող ալգորիթմի կառուցումը:

Արենախոսության բոլոր արդյունքները նոր են և սրացված են հեղինակի կողմից առաջին անգամ:

Սրացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը: Աշխատանքում սրացված արդյունքները ունեն կարևոր տեսական և գործնական նշանակություն: Արդեն նշել ենք ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի մի քանի կիրառություններ, իսկ համեմատությունների գրաֆների ամենամեծ անկախ բազմությունների տրանսվերսալային թվի համար սրացված արդյունքը դիսկրետ մաթեմատիկայի՝ գոյության $\min\max$ տիպի արդյունքների դասին պարկանող հեղաբեկիչ արդյունք է:

Սրացված արդյունքների ապրոբացիան: Արենախոսությունում սրացված արդյունքները զեկուցվել են Երևանի պետական համալսարանի դիսկրետ մաթեմատիկայի ամբիոնի, ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի սեմինարներում:

Նրադարակությունները: Աշխատանքի թեմայով հրատարակվել է երեք աշխատանք, որոնց ցուցակը բերված է սեղմագրի վերջում:

Արենախոսության կառուցվածքը և ծավալը: Աշխատանքը բաղկացած է ցանկից, ներածությունից, չորս գլուխներից, ամփոփումից և օգրագործված գրականության ցանկից: Աշխատանքի ծավալն է 113 էջ՝ ներառյալ 163 անվանում պարունակող օգրագործված գրականության ցանկը:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ներածության մեջ հիմնավորված է պրենախոսության հրատարակությունը և հակիրճ ներկայացված է պրենախոսության ամեն մի գլխի պարունակությունը:

Առաջին գլխում փրված է ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդրի ֆորմալ սահմանումը, ապա բերված են նրա \mathcal{NP} -դժվարության և ամենամեծ անկախ

բազմություն գրնելու խնդրին համարժեք լինելու ապացույցները: Այնուհետև բերված են ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու խնդրի մի քանի կիրառություններ. յուրաքանչյուր կիրառության համար ցույց է տրված, թե ինչպես կարելի այդ խնդրի լուծումը հանգեցնել ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու խնդրին:

Այս գլխում սահմանված են արենախոսության մեջ օգտագործվող գրաֆների՝ ինտերվալների, տեղադրության, համեմատությունների, կոհամեմատությունների, եռանկյունացված, շրջանագծի աղեղների և կապարյալ գրաֆների դասերը:

Սահմանում 1. $G = (V, E)$ սովորական ոչ կողմնորոշված գրաֆը կանվանենք *համեմատությունների (comparability) գրաֆ*, եթե նրա զագաթները կարելի է փոխմիարժեք համապարասխանության մեջ դնել որևէ մասնակի կարգավորված բազմության էլեմենտների հետ այնպես, որ նրա երկու զագաթներին միջև գոյություն ունենա կող այն և միայն դեպքում, եթե այդ զագաթներին համապարասխանող մասնակի կարգավորված բազմության էլեմենտները համեմատելի են:

Յուրաքանչյուր գրաֆների դասի համար նշված են այդ դասի գրաֆները ճանաչող ալգորիթմների բարդությունները, ինչպես նաև այդ դասի համար ամենամեծ անկախ բազմություն, մինիմալ ներկում և ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնող բազմանդամային ալգորիթմների հայտնի լինելու փաստերը: Բերված են սահմանված գրաֆների դասերի միջև գոյություն ունեցող կապերը:

Ներկայացված է ինտերվալների գրաֆներում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնող մի ալգորիթմ: Ապա ներկայացված են ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու խնդրի առանձնահատկությունները փրանգիպիվ կողմնորոշված գրաֆների համար և օգրվելով Գրին-Կլեյբանի թեորեմի կոստրուկտիվ ապացույցից՝ կառուցված է համեմատությունների գրաֆում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնող բազմանդամային ալգորիթմ:

Երկրորդ գլխում ուսումնասիրված է ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնող մի ալգորիթմի օպրիմալության հարցն ու առաջարկված է ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնող օպրիմալ ալգորիթմ՝ $q = \omega - 2$ դեպքի համար, որպեղ ω -ն գրաֆի ամենամեծ լրիվ ենթագրաֆի զագաթների քանակն է:

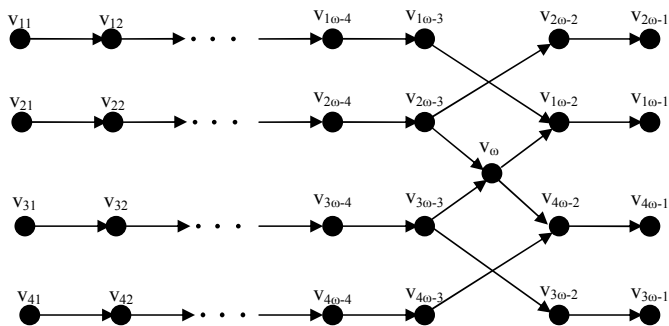
Առաջին հարցին պարասխանելու համար կառուցված է փրանգիպիվ կողմնորոշված գրաֆների ենթադաս, որի համար այդ ալգորիթմը չի գրնում ամենամեծ $\omega - 2$ -ներկելի ենթագրաֆը (տեն պարկեր 1):

$q = \omega - 2$ դեպքում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու համար առաջարկված է հետևյալ ալգորիթմը:

Ալգորիթմ

Դիցուք տրված է G համեմատությունների գրաֆը:

1. G գրաֆը որևէ ձևով փրանգիպիվ կողմնորոշել, ապա ստացված \vec{G}_ω գրաֆը շերտավորել:



Պատկեր 1

2. Ավելացնելով s և t նոր գագաթներ՝ կառուցել N_ω ցանցը, ուր մասնակցում են շերտավորված \vec{G}_ω գրաֆի միայն հարևան շերտերի գագաթները միացնող աղեղները, իսկ s և t գագաթները միացված են համապարասխանաբար առաջին և վերջին շերտերի բոլոր գագաթներին:
3. N_ω ցանցում գրնել մինիմալ $s - t$ Y_ω գագաթային կտրվածք:
4. Կառուցել $\vec{G}_{\omega-1} = \vec{G}_\omega - Y_\omega$ փրանգիփիվ կողմնորոշված և շերտավորված գրաֆը:
5. $\vec{G}_{\omega-1}$ շերտավորված գրաֆից կառուցել $N_{\omega-1}$ ցանցը N_ω ցանցի կառուցմանը համանման ձևով:
6. $N_{\omega-1}$ -ին ավելացնել հանված Y_ω գագաթները հետևյալ ձևով: Դիցուք $N_{\omega-1}$ ցանցում ունենք $X_0 = \{s\}, X_1, \dots, X_{\omega-1}, X_\omega = \{t\}$ շերտերը: $y \in Y_\omega$ գագաթն ավելացնենք այն X_k և X_{k+1} շերտերի միջև, որ $\vec{G}_\omega - (Y_\omega \setminus \{y\})$ գրաֆում y -ին նախորդող բոլոր գագաթները գրնվեն X_0, X_1, \dots, X_k շերտերում, իսկ y -ին հաջորդող բոլոր գագաթները գրնվեն $X_{k+1}, \dots, X_{\omega-1}, X_\omega$ շերտերում: Պարզ է, որ $\forall y \in Y_\omega$ գագաթի համար գոյություն ունի միակ k թիվ այնպիսին, որ y գագաթը կարելի է ավելացնել X_k և X_{k+1} շերտերի միջև:
 X_k և X_{k+1} շերտերի միջև ավելացված ամեն մի $y \in Y_\omega$ գագաթի հետ ավելացնել \vec{G}_ω գրաֆի այն աղեղները, որոնք y գագաթը կապում են X_k և X_{k+1} շերտերի գագաթների հետ: Ստացված ցանցը նշանակել $N_{\omega-1}^+$:
7. $N_{\omega-1}^+$ ցանցին ամեն $y_i \in Y_\omega$ գագաթի համար ավելացնել s_i և t_i գագաթները և $(s, s_i), \{(s_i, u) \mid u \in \Gamma y_i\}, (t_i, t), \{(v, t_i) \mid v \in \Gamma^{-1} y_i\}$ աղեղները: Ստացված ցանցը նշանակել $N_{\omega-1}^{++}$:
8. $N_{\omega-1}^{++}$ -ում գրնել մինիմալ $s - t$ $Y_{\omega-1}$ գագաթային կտրվածք:

9. $Y_{\omega-1}$ -ը փրոհել երկու մասի. $Y_{\omega-1} = Y'_{\omega-1} \cup Y_{st}$, որպես

$$Y_{st} = Y_{\omega-1} \cap \{s_i, t_i \mid y_i \in Y_{\omega}\}, \quad Y'_{\omega-1} = Y_{\omega-1} \setminus Y_{st}$$

Այնուհետև կառուցել $Y = Y'_{\omega-1} \cup Y'_{\omega}$ բազմությունը, որպես

$$Y'_{\omega} = \{y_i \in Y_{\omega} \mid \{s_i, t_i\} \cap Y_{st} \neq \emptyset\}$$

Արենախոսությունում ցույց է փրված, որ $Y_{\omega} \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$, և որ, եթե $Y_{st} \cap \{s_i, t_i\} \neq \emptyset$, ապա $|Y_{st} \cap \{s_i, t_i\}| = 1$: Ներկայացրեք $|Y'_{\omega}| = Y_{st}$, հետևաբար $|Y| = |Y_{\omega-1}|$:

$\vec{G}_{\omega-2} = \vec{G}_{\omega} - Y$ -ը կլինի ամենամեծ $\omega - 2$ -ներկելի ենթագրաֆը:

Ապացուցված է այս ալգորիթմի օպտիմալությունը և բերված են նրա աշխարհանքը պարզաբանող օրինակներ:

Ալգորիթմի օպտիմալության ապացույցում էական դեր են խաղում ալգորիթմի ընթացքում կառուցվող $N_{\omega-1}^+$ և $N_{\omega-1}^{++}$ ցանցերի համար ապացուցված հետևյալ հարկությունները:

1. Եթե $N_{\omega-1}^{++}$ ցանցում գոյություն ունի $y \in Y_{\omega}$ գագաթ, որ $\Gamma^{-1}y = \{s\}$ կամ $\Gamma y = \{t\}$, ապա $y \in Y$:
2. $N_{\omega-1}^+$ -ում գոյություն ունեն $|Y_{\omega}|$ հար գագաթներով չհափվող ω երկարության շղթաներ, որոնցից յուրաքանչյուրն անցնում Y_{ω} -ի ճիշտ մեկ գագաթով:
3. $N_{\omega-1}^+$ -ում գոյություն չունի y_i -ից y_j շղթա, որպես $y_i, y_j \in Y_{\omega}$ ու $y_i \neq y_j$:
4. $N_{\omega-1}^{++}$ ցանցում s -ից t գնացող ցանկացած շղթա կարող է անցնել ամենաշարք մեկ s_i կամ t_j գագաթով, այսինքն $N_{\omega-1}^{++}$ ցանցում s -ից t գնացող ցանկացած շղթա կարող է ունենալ ամենաշարք մեկ թռիչք:
5. $Y_{\omega} \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$
6. Եթե $Y_{st} \cap \{s_i, t_i\} \neq \emptyset$, ապա $|Y_{st} \cap \{s_i, t_i\}| = 1$:
7. Եթե $y_i \in Y_{\omega} \setminus Y$, ապա s -ից y_i գնացող ցանկացած շղթա, ինչպես նաև y_i -ից t գնացող ցանկացած շղթա, պարունակում են գոնե մեկ գագաթ Y -ից:
8. Եթե $y_i \in Y \cap Y_{\omega}$, ապա կան s -ից y_i գնացող ցանկացած շղթա, կան y_i -ից t գնացող ցանկացած շղթա պարունակում է գոնե մեկ գագաթ $Y \setminus \{y_i\}$ -ից,

Արենախոսությունում առաջարկված ալգորիթմի արդյունավետությունը համեմատված է Գրին-Կլեյմանի թեորեմի ապացույցից ստացվող ընդհանուր ալգորիթմի արդյունավետության հետ. ցույց է փրված, որ առաջարկված ալգորիթմի բարդությունը ըստ կարգի $\log n$ անգամ (որպես n -ը գրաֆի գագաթների բանակն է) փոքր է ընդհանուր ալգորիթմի բարդությունից, սա պայմանավորված է նրանով, որ մեր ալգորիթմը հիմնված է գրաֆում մաքսիմալ հոսք գտնելու ալգորիթմի վրա, իսկ ընդհանուր ալգորիթմը՝ նվազագույն արժեքով շրջանառություն գտնելու ալգորիթմի վրա:

Երրորդ գլխում առաջարկված է ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնող մոդավոր ալգորիթմ և գտնված է նրա առավելագույն հնարավոր շեղումն օպտիմալ ալգորիթմից:

Մինչ մոդավոր ալգորիթմի նկարագրումը այս գլխում սահմանված են մոդավոր ալգորիթմների հիմնական տեսակները, յուրաքանչյուր տեսակի համար բերված են օրինակներ, ու նշված է այդ տեսակի մոդավոր ալգորիթմների գոյության հնարավորությունն ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու խնդրի մասնավոր դեպք հանդիսացող ամենամեծ անկախ բազմություն և մինիմալ ներկում գրնելու խնդրների համար: Այնուհետև ներկայացված է բազմանդամային ժամանակում հաշվարկվող մի մեծություն (Լուվասի թեպա ֆունկցիան), որը հանդիսանում է վերևից գնահատական գրաֆի խտության համար և ներքևից գնահատական՝ ներկման թվի համար, իսկ հետո դիտարկված է այդ մեծության մի ընդհանրացում, որը հանդիսանում է վերևից գնահատական ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆի գազաթների քանակի համար:

Ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու համար առաջարկված մոդավոր ալգորիթմն ունի մոդավոր բնույթ. այն իր յուրաքանչյուր քայլում (իտերացիայի ընթացքում) գտնում է ընթացիկ գրաֆի առավելագույն թվով իրար հետ չհարվող ամենամեծ անկախ բազմություններ: Այս ալգորիթմն անվանել ենք ընդհանրացված ազահ ալգորիթմ, ի տարբերություն այն ալգորիթմի, որն իր յուրաքանչյուր քայլում գտնում է ընթացիկ գրաֆի միայն մեկ ամենամեծ անկախ բազմություն, որը և անվանել ենք սովորական ազահ ալգորիթմ: Սովորական ազահ ալգորիթմը կարելի է կիրառել այնպիսի գրաֆների դասի վրա, որոնց համար գազաթների ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդիրն ունի էֆեկտիվ լուծում: Այդպիսին են, օրինակ, կախարչյալ և շրջանագծի աղեղների գրաֆների դասերը: Իսկ ընդհանրացված ազահ ալգորիթմի համար անհրաժեշտ է, որ առավելագույն թվով ամենամեծ անկախ բազմություններ գտնելու խնդիրն ունենա էֆեկտիվ լուծում: Օրինակ՝ համեմատությունների և կոհանմամբությունների գրաֆների դասերի համար գտնված են առավելագույն թվով ամենամեծ անկախ բազմություններ գտնող ալգորիթմներ:

Ընդհանրացված ազահ ալգորիթմի նկարագրությունը հետևյալն է:

Ընդհանրացված ազահ ալգորիթմ

Դիցուք տրված է G սովորական գրաֆը և q բնական թիվը:

1. Վերցնել $G_1 = G, p = 1$:
2. G_p գրաֆում գրնել մաքսիմալ քանակով զույգ առ զույգ իրար հետ չհարվող ամենամեծ անկախ բազմություններ $I_{p1}, I_{p2}, \dots, I_{pk_p}$:
3. Եթե $\sum_{i=1}^p k_i \geq q$, ապա որպես q -ներկելի ենթագրաֆ վերցնել

$$G' = G \left[\bigcup_{i=1}^{p-1} \bigcup_{j=1}^{k_i} I_{ij} + \bigcup_{j=1}^m I_{pj} \right]$$

գրաֆը, որտեղ $\sum_{i=1}^{p-1} k_i + m = q$, և ավարտել ալգորիթմի աշխատանքը, հակառակ դեպքում կառուցել $G_{p+1} = G_p - \bigcup_{j=1}^{k_p} I_{pj}$ գրաֆը, վերցնել $p = p + 1$ և անցնել 2-րդ քայլին:

Այս ալգորիթմի համար գրնված է նրա առավելագույն հնարավոր շեղումն օգտին ալգորիթմից: Ստացված գնահատականի իսկության ապացույցից հետևում է, որ այդ գնահատականը ճիշտ է նաև սովորական ազահ ալգորիթմի համար, ուստի այս արդյունքը լավացնում է սովորական ազահ ալգորիթմի համար Նարաշիմհանի կողմից ստացված շեղման գնահատականը:

Թեորեմ 1. *Ընդհանրացված ազահ ալգորիթմով ստացված ենթագրաֆի գագաթների քանակի շեղումն ամենամեծ ենթագրաֆի գագաթների քանակից չի գերազանցում $1+1/(e-1)$, այսինքն այն հանդիսանում է $1+1/(e-1)$ -ալգորիթմ:*

Այս թեորեմի ապացույցից անմիջապես ստացվում է հետևյալ հետևանքը, որը թույլ է փախի ստանալ ավելի լավ շեղման գնահատական, եթե հայտնի է, թե քանի քայլ է կատարել ընդհանրացված ազահ ալգորիթմը:

Ներկանք 1. *Եթե ընդհանրացված ազահ ալգորիթմի աշխատանքի ընթացքում ալգորիթմի 2-րդ քայլը կատարվել է ընդամենը p անգամ (այսինքն ալգորիթմն ավարտել է իր աշխատանքը՝ կատարելով ընդամենը p իրերացիա), ապա ստացված q -ներկելի ենթագրաֆի գագաթների քանակը փոքր է ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆի գագաթների քանակից ամենաշատը $\frac{1}{1-(1-1/p)^p}$ անգամ:*

Ընդհանրացված ազահ ալգորիթմի շեղման գնահատականի մասին թեորեմի ապացույցից օգտվելով կառուցված է գրաֆների դաս, որոնց համար ընդհանրացված ազահ ալգորիթմի շեղումն ինչքան ասես մոտ է ստացված շեղման գնահատականին, որպեղից հետևում է, որ ստացված շեղման գնահատականը հնարավոր չէ լավացնել:

Այս գլխի վերջում ուսումնասիրված է ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու խնդրի՝ ամենամեծ անկախ բազմություն գրնելու խնդրին համարժեք լինելու փաստի օգտագործման հնարավորությունն ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու խնդրի համար ճշգրիտ ու մոտավոր ալգորիթմներ կառուցելու համար:

Չորրորդ գլխում ուսումնասիրված է համեմատությունների գրաֆում ամենամեծ անկախ բազմությունների փրանսվերսալային և անկախության թվերի հավասարության հարցը. ապացուցված է, որ նրանք հավասար են, և կառուցված է համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների ամենավոքոր փրանսվերսալ կառուցող ալգորիթմ ու գնահատված է նրա բարդությունը:

Գլխի սկզբում փրված են բազմությունների ընդհանրի փրանսվերսալի և նրա հետ ասնջվող գաղափարների սահմանումները:

Սահմանում 2. *Դիցուք $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ -ն X բազմության ենթաբազմությունների ընդհանր է: Կասենք, որ $T \subseteq X$ բազմությունը հանդիսանում է (A_1, A_2, \dots, A_n) բազմությունների ընդհանրի փրանսվերսալ, եթե $A_i \cap T \neq \emptyset, i = 1, \dots, n$: Ամենափոքր փրանսվերսալի հզորությանն անվանում են փրանսվերսալային թիվ:*

Որոշ աշխարհանքներում, փրանսվերսալ ասելով, հասկանում են փարբեր ներկայացուցիչների համակարգ: Բայց այս սեղմագրում փրանսվերսալը կհասկանանք վերևում սահմանված իմաստով:

Այս գլխում հիմնավորված է ամենափոքր փրանսվերսալը գտնելու խնդրի \mathcal{NP} -դժվարությունը, ապա փրված է փրանսվերսալային հիպերգրաֆի սահմանումը և քերված են նրա հիմնական կիրառությունները:

Այնուհետև ներկայացված է Մարկուսյանի կողմից առաջարկված համեմատությունների գրաֆում առավելագույն քանակով զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող ամենամեծ անկախ բազմություններ գտնող հետևյալ ալգորիթմը (այս և մյուս ալգորիթմների նկարագրության մեջ գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմություններին կանվանենք α -բազմություններ):

Ալգորիթմ

Դիցուք փրված է G համեմատությունների գրաֆը:

1. G գրաֆը փրանզիփիվ կողմնորոշել:
2. G -ն բաժանել մինիմալ քանակով իրար հետ չհատվող լրիվ ենթագրաֆներին $Q_1, Q_2, \dots, Q_\alpha, Q_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_{k_i}^i\}, i = 1, 2, \dots, \alpha$:
3. Վերցնել $S = \{x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^\alpha\}$:
4. Եթե ընթացիկ $S = \{x_{p_1}^1, x_{p_2}^2, \dots, x_{p_\alpha}^\alpha\}$ բազմության գազաթների միջև գոյություն ունի աղեղ, ապա անցնել 5-րդ քայլին, հակառակ դեպքում անցնել 6-րդ քայլին
5. Դիցուք $(x_{p_i}^i, x_{p_j}^j)$ աղեղ է S -ի գազաթների միջև: Եթե $p_i + 1 \leq k_i$, ապա վերցնել $S = (S \setminus \{x_{p_i}^i\}) \cup \{x_{p_i+1}^i\}$ և անցնել 4-րդ քայլին, հակառակ դեպքում ավարտել ալգորիթմի աշխարհանքը:
6. $S = \{x_{p_1}^1, x_{p_2}^2, \dots, x_{p_\alpha}^\alpha\}$ բազմությունը վերցնել որպես հերթական α -բազմություն: Եթե $p_i + 1 \leq k_i, i = 1, 2, \dots, \alpha$, ապա վերցնել $S = \{x_{p_1+1}^1, x_{p_2+1}^2, \dots, x_{p_\alpha+1}^\alpha\}$ և անցնել 4-րդ քայլին, հակառակ դեպքում ավարտել ալգորիթմի աշխարհանքը:

Մանրամասնորեն ապացուցված է այս ալգորիթմի կռռելկությունն ու օպտիմալությունը, և զնահատված է նրա բարդությունը: Այս ալգորիթմը նկարագրված է այս գլխում, քանի որ այն կենտրոնական դեր է խաղում համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների փրանսվերսալային թվի զնահատման մեջ և ամենափոքր փրանսվերսալը կառուցող ալգորիթմում:

Բազմությունների ընդհանրի փրանսվերսալային և անկախության թվերի հավասարության խնդիրը (հարցը) դիսկրետ մաթեմատիկայի հիմնարար խնդիրներից է: Նույն փիլի հարցի են պարասխանում, օրինակ, Մենգերի, Դիվորփի, Քլոնիգի հայտնի թեորեմները:

Թեորեմ 2. *Նամենատությունների գրաֆի համար ամենամեծ անկախ բազմությունների ընդհանրի ամենափոքր փրանսվերսալի գազաթների*

քանակը հավասար է զույգ առ զույգ չհատվող ամենամեծ անկախ բազմությունների առավելագույն քանակին:

Այս թեորեմի ապացույցն ունի կոնստրուկտիվ բնույթ, որը թույլ է փախի կառուցել $O(n + mn^{1/2})$ կարգի՝ ամենափոքր փրանսվերսալ գրանոլ պլզորիթմ, որտեղ n -ը գրաֆի գագաթների քանակն է, իսկ m -ը՝ կողերի:

Ալգորիթմ

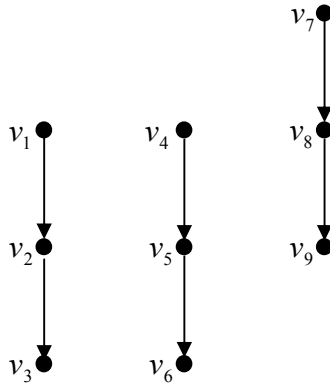
Դիցուք փրված է G համեմատությունների գրաֆը:

1. G գրաֆը փրանզիփիվ կողմնորոշել:
2. G -ն բաժանել մինիմալ քանակով իրար հետ գույգ առ գույգ չհատվող լրիվ ենթագրաֆների $Q_1, Q_2, \dots, Q_\alpha$, $Q_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_{k_i}^i\}$, $i = 1, 2, \dots, \alpha$:
3. Նամեմատությունների գրաֆում առավելագույն քանակով գույգ առ գույգ իրար հետ չհատվող α -բազմություններ գրանոլ պլզորիթմի միջոցով գրնել Y_1, Y_2, \dots, Y_m առավելագույն քանակով գույգ առ գույգ իրար հետ չհատվող α -բազմություններ: Այդ պլզորիթմի 1-ին և 2-րդ քայլերը պետք չէ կատարել, քանի որ այս պլզորիթմի 1-ին և 2-րդ քայլերում դա արդեն արվել է:
4. Շրջել G գրաֆի բոլոր աղեղների ուղղությունները: Արդյունքում նորից կունենանք փրանզիփիվ կողմնորոշված գրաֆ:
5. Վերցնել $k = m$ և $S = \{x_{k_1}^1, x_{k_2}^2, \dots, x_{k_\alpha}^\alpha\}$:
6. Կատարել առավելագույն քանակով α -բազմություններ գրանոլ պլզորիթմի 4-ից 5-րդ քայլերը մինչև $S = \{x_{p_1}^1, x_{p_2}^2, \dots, x_{p_\alpha}^\alpha\}$ -ը դառնա անկախ բազմություն:
7. Վերցնել $Y_k \cap S$ -ից որևէ v գագաթ (ըստ թեորեմ 2-ի $Y_k \cap S \neq \emptyset$), ենթադրենք՝ $v = x_{p_j}^j$:
8. v գագաթն ավելացնել կառուցվող փրանսվերսալին:
9. Եթե $k = 1$, ապա ավարտել պլզորիթմի աշխատանքը, հակառակ դեպքում վերցնել $k = k - 1$, $S = \{x_{p_1}^1, \dots, x_{p_{j-1}}^{j-1}, \dots, x_{p_\alpha}^\alpha\}$ և անցնել 6-րդ քայլին:

Անկախության և փրանսվերսալային թվերի հավասարության մասին ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների հատումների գրաֆն ունի α -ծածկույթ, այսինքն այն կարելի է ծածկել α հատ լրիվ ենթագրաֆներով, որտեղ α -ն այդ հատումների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմության չափն է:

Չնայած, որ α -բազմությունների հատումների գրաֆն ունի α -ծածկույթ, այն կարարյալ չէ: Քանի որ, եթե վերցնենք պարկեր 2-ի համեմատությունների գրաֆը, ապա $S_1 = \{v_1, v_4, v_8\}$, $S_2 = \{v_2, v_4, v_7\}$, $S_3 = \{v_2, v_5, v_9\}$, $S_4 = \{v_3, v_5, v_9\}$, $S_5 = \{v_3, v_6, v_8\}$ անկախ բազմություններով հատումների գրաֆում ծնված ենթագրաֆը 5 երկարությամբ ցիկլ է:

Գլխի վերջում բերված է մենգերյան հիպերգրաֆի սահմանումը և ապացուցված է հետյալ թեորեմը:



Պատկեր 2

Սահմանում 3. $H = (V, \mathcal{E})$ հիպերգրաֆը կանխանենք մենգերյան, եթե H -ի ցանկացած H' զուգահեռացման անկախ կողերի առավելագույն քանակը հավասար է գագաթների մինիմալ քանակին, որոնք ծածկում են բոլոր կողերը:

Թեորեմ 3. Դիցուք $G = (V, E)$ -ն համեմատությունների գրաֆ է: $H = (V, \mathcal{E})$ հիպերգրաֆը, որտեղ \mathcal{E} -ն G գրաֆի α -բազմությունների բազմությունն է, մենգերյան հիպերգրաֆ է:

Նիմնական դրույթներն ու եզրահանգումները

Աշխատանքում ուսումնասիրված է գրաֆում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու խնդիրը, նրա համար ավելի արդյունավետ ու ճշգրիտ ալգորիթմների կառուցման հարցը, և համեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների ամենափոքր փրանսվերսալի հզորության հարցը:

Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են.

1. Նամեմատությունների գրաֆների համար $q = \omega - 2$ դեպքում ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնող ավելի արդյունավետ ալգորիթմի կառուցումը,
2. Ամենամեծ q -ներկելի ենթագրաֆ գրնելու համար ընդհանրացված ազահ ալգորիթմի առաջարկումը և նրա շեղման գնահատումը,
3. Սովորական ազահ ալգորիթմի համար հայրնի շեղման գնահատականի լավացումը,
4. Նամեմատությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների փրանսվերսալային և անկախության թվերի հավասարության ապացույցը,

5. Նամեմաբությունների գրաֆի ամենամեծ անկախ բազմությունների ամենափոքր փրանսվերսալ գրնող ալգորիթմի կառուցումը:

Արենախոսության թեմայի շրջանակներում հրատարակված աշխատությունների ցանկը

1. **Р.О. Адамян и С.Е. Маркосян**, Алгоритм нахождения максимального q -хроматического подграфа, *Известия национальной академии наук Армении, Математика*, vol. 41, no. 3, pp. 12–25, 2006, [English translation: R. O. Adamyan and S. E. Markosyan. "An algorithm for maximal q -colorable subgraph of comparability graph". *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, vol. 41, no. 3, pp. 10–23, 2006].
2. **Ռ.Օ. Ադամյան**, Ընդհանրացված ազաի ալգորիթմի շեղումը q -ներկման խնդրի համար, *Երևանի պետական համալսարանի գիտական տեղեկագիր, բնական գիտություններ*, vol. 2, pp. 53–57, 2007.
3. **R. O. Adamyan and S. E. Markosyan**, Transversal and independence numbers of maximum independent sets of comparability graphs, *Information Technologies and Management*, vol. 6, pp. 66–74, 2007.

**Исследование задач и разработка алгоритмов раскраски графов
сравнения**

Резюме

Диссертационная работа посвящена изучению задач q -раскраски графов сравнения и построению точных и приближенных алгоритмов для нахождения максимального q -хроматического подграфа. Задачи раскраски графов одни из самых изученных задач дискретной математики.

В задаче нахождения максимального q -хроматического подграфа требуется найти q -раскрашиваемый подграф, содержащий наибольшее возможное количество вершин. Эта задача является обобщением задач нахождения наибольшего независимого множества и минимальной раскраски графа.

В диссертации также изучена проблема мощности минимального трансверсала множества наибольших независимых множеств графа сравнения.

В работе получены следующие основные результаты

1. Построен более эффективный алгоритм для нахождения максимального q -хроматического подграфа в графе сравнения при $q = \omega - 2$, где ω - число вершин наибольшего полного подграфа.
2. Построен обобщенный жадный алгоритм для нахождения максимального q -хроматического подграфа и найдено его отклонение от оптимального алгоритма.
3. Улучшена оценка отклонения обычного жадного алгоритма для той же задачи q -раскраски.
4. Доказано равенство чисел трансверсальности и независимости множества наибольших независимых множеств графа сравнения.
5. Предложен алгоритм для нахождения минимального трансверсала множества наибольших независимых множеств графа сравнения.

Ruben Adamyan

**Study and construction of coloring algorithms for comparability
graphs**