ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Սարգսյան Հովհաննես Էլֆիկի

Օրիենտացված գրաֆների գագաթային համարակալում

Ա.01.09 <<Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն>> մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2014

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Саргсян Оганнес Элфикович

Нумерация вершин ориентированных графов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван – 2014

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ռ. Ռ. Քամալյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու. Գ. Գրիգորյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ն. Կ. Խաչատրյան
Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2014թ. հունիսի 10-ին, ժ. 14^{00}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044“Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա” մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2014 թ. մայիսի 9-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր՝ Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Нау чный руководитель: кандидат физ.-мат. наук Р.Р. Камалян
Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук Ю. Г. Григорьян
кандидат физ.-мат. наук Н. К. Хачатрян
Ведущая организация: Институт информатики и проблем автоматизации НАН РА

Защита состоится 10-го июня 2014 г. В 1400 часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 9-го мая 2014 г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук В. Ж. Думанян

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Թեմայի արդիականությունը. Կարգացուցակների տեսության խնդիրների կարևոր դաս են կազմում այսպես կոչված «Minimizing of total weighted completion time» (MTWTC) խնդիրները, որոնցում պահանջվում է տրված աշխատանքների մասնակի կարգավորված T բազմության համար գտնել աշխատանքների կատարման այնպիսի պլանավորում, որը բավարարում է T -ի վրա սահմանված մասնակի կարգին և մինիմիզացնում է աշխատանքների ավարտման պահերի որոշակի կշռված գումար: Հայտնի է, որ նշված խնդիրը համարժեք է ատենախոսությունում հետազոտվող կողմնորոշված գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության (MINLAD) խնդրին[1] և, հետևաբար, կամայական արդյունք, որը կիրառելի է MTWTC խնդիրների համար, վերաբերվում է նաև MINLAD խնդրին:

Կողմնորոշված գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրում տրված է կողմնորոշված գրաֆ, որի համար պահանջվում է գտնել նրա գագաթների բազմության այնպիսի ինյեկտիվ արտապատկերում թվային առանցքի ամբողջաթիվ աբսցիսներով կետերի բազմության վրա, որի դեպքում գրաֆի կողերի երկարությունների գումարը կլինի մինիմալ: Գրաֆների գագաթների գծային համարակալման խնդիրները լայնորեն կիրառվում են գերմեծ ինտեգրալային սխեմաների նախագծման փուլում: Սխեման կարելի է ներկայացնել գրաֆի տեսքով, որի գագաթները մոդուլներն են, իսկ կողերը՝ միացումները: Նախագծման տարբեր փուլերում առաջանում է անհրաժեշտություն մոդուլները տեղավորել հարթակի վրա այնպես, որ սխեմայի որոշակի պարամետրեր, ինչպիսիք են, օրինակ, ամենաերկար միացման երկարությունը, բոլոր միացումների երկարությունների գումարը և այլն, լինեն ինչքան հնարավոր է օպտիմալին մոտ: Գծային համարակալման խնդիրները նաև լայն կիրառություններ ունեն գրաֆների՝ մարդու աչքի համար ընկալելի ձևով պատկերման խնդիրներում, որտեղ նպատակներից մեկն է պատկերվող գրաֆի կողերի հատումների քանակի նվազեցումը: Հայտնի է նաև, որ երկկողմանի գրաֆների լայն դասի համար կողերի հատումների քանակի նվազեցումը համարժեք է գրաֆի գագաթների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրին:

---

[1] Lawler E. L., 1978, subject to precedence constraints, Annals of Discrette Mathematics, 75-90. Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints, Annals of Discrette Mathematics, 75-90.

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը և խնդիրները. Ուսումնասիրել գրաֆի գագաթների գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների դասում: Կառուցել օպտիմալ կամ էվրիստիկ ալգորիթմներ խնդիրը տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների դասում գործնականում արդյունավետ լուծելու համար:

Հետազոտման օբյեկտը. Տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրի ալգորիթմական բարդությունը, գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների դասում լուծող մոտավոր ալգորիթմներ:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են գրաֆների տեսության և կոմբինատոր օպտիմիզացիայի մեթոդներ:

Գիտական նորությունը. Ապացուցվել է գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրի NP-լրիվությունը երկկողմանի, տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների դասում: Ներկայացվել է էվրիստիկ ալգորիթմ խնդիրը գործնականում արդյունավետ լուծելու համար: Ապացուցվել է գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրի NP-լրիվությունը տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների որոշ ենթդասերում:

Կիրառական նշանակությունը. Աշխատանքում ստացված արդյունքները ունեն գործնական նշանակություն, քանի որ ներկայացված ալգորիթմները կարող են օգտագործվել MTWTC խնդիրը գործնականում լուծող ծրագրային փաթեթների նախագծման և կառուցման ժամանակ:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

- Երկկողմանի, տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը NP –լրիվ է

- Որոշ գագաթների նախապես ֆիքսված դիրքերով գրաֆի մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը NP–լրիվ է տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների դասում

- Գրաֆի գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը բազմանդամային ժամանակում լուծելի է Γ-կողմնորոշված գրաֆների մի շարք ենթադասերի համար

- Տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրի լուծման համար առաջարկված էվրիստիկ ալգորիթմը օպտիմալ է Γ-կողմնորոշված գրաֆների որոշ ենթադասերում

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան և հրապարակումները. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի գիտական սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի դիսկրետ մաթեմատիկայի և տեսական ինֆորմատիկայի ամբիոնի սեմինարներում, միջազգային CSIT-2013, Երևան, 2013 կոնֆերանսում: Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են երեք գիտական հոդվածներում (տես [1, 2, 3]):

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է երեք գլխից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 39 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 83 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Աշխատանքի 1-ին գլխում նկարագրվում է ատենախոսությունում ուսումնասիրվող խնդիրը իր ընդհանրացումներով, բերվում են խնդրի հետ կապված հայտնի հատկություններ, ինչպես նաև հիմնավորվում է խնդրի կիրառական նշանակությունը:

Պարագրաֆ 1.1-ում նկարագրվում է գրաֆի գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը կողմնորոշված գրաֆների դասում:

Կասենք, որ տրված է G գրաֆի գծային համարակալում, եթե տրված է $\varphi: V \to \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ փոխմիարժեք արտապատկերում, կամ, որ նույնն է, եթե գրաֆի գագաթները տեղադրված են ուղղի վրա գտնվող $|V(G)|$ հատ կետերում, որոնց կոորդինատներն են $1, 2, \dots, |V(G)|$ թվերը: Եթե G գրաֆը կողմնորոշված է, ապա կդիտարկենք միայն այնպիսի համարակալումներ (այդպիսի համարակալումները հետագայում կանվանենք թույլատրելի), որոնց համար տեղի ունի հետևյալ պայմանը

$$\forall (u, v) \in E(G) \;\; \varphi(u) < \varphi(v)$$

$F(G)$-ով նշանակենք G կողմնորոշված գրաֆի բոլոր թույլատրելի համարակալումների բազմությունը: G կողմնորոշված գրաֆի (u, v) կողի երկարություն φ թույլատրելի համարակալման դեպքում նշանակենք

$\lambda\big((u,v),\varphi,G\big)=\varphi(v)-\varphi(u)$ թիվը: Եթե G-ն կողմնորոշված գրաֆ է, իսկ φ-ն՝ նրա թույլատրելի համարակալում է, ապա φ համարակալման երկարություն ասելով կհասկանանք

$$\sum_{(u,v)\in E(G)} \lambda\big((u,v),\varphi,G\big)$$

գումարը, որը հետագայում կնշանակենք $LA(G,\varphi)$-ով:

Մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության (Minimum Linear Arrangement, MINLAD):

Տրված է $G(V,E)$ կողմնորոշված գրաֆը: Անհրաժեշտ է գտնել այնպսի $\varphi_0\in F(G)$, որ

$$LA(G,\varphi_0) \;=\; \min_{\varphi\in F(G)} LA(G,\varphi)\equiv MINLAD(G)$$

Կշռված կողերով և որոշ գագաթների նախապես ֆիքսված դիրքերով գրաֆի մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության (MINLAW_K):

Դիցուք տրված է $G(V,E)$ կողմնորոշված գրաֆը և նրա կողերի վրա սահմանած $\omega\colon E\to R$ կշռի ֆունկցիան: Տրված է նաև $U\subset V$ գագաթների ենթաբազմությունը, որտեղ $|U|=K,$ և $f\colon U\to\{1,\dots,|V|\}$ 1-1 արտապատկերումը: Անհրաժեշտ է գտնել այնպիսի $\varphi_0\in F(G)$, որ $\forall u\in U$ գագաթի համար $\varphi_0(u)=f(u)$ և

$$LA(G,\varphi_0)=\min_{\varphi\in F(G)}\sum_{(u,v)\in E(G)}\omega(u,v)\lambda((u,v),\varphi\,,G)\equiv MINLAW\_K(G)$$

Պարագրաֆ 1.2-ում բերվում են խնդրի հետ կապված հայտնի հատկություններ:

Լեմմա 1.2.1: Դիցուք տրված է G գրաֆը, որը բաղկացած է $G_1,G_2,\dots,G_k$ կապակցվածության բաղադրիչներից: Այդ դեպքում

$$MINLAD(G)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} MINLAD(G_i)$$

Դիցուք տրված են G և H գրաֆները: Կասենք, որ H գրաֆը G գրաֆի ծնված ենթագրաֆ է, եթե $V(H)\subseteq V(G)$, $E(H)=\{(u,v)\in E(G)/\ u,v\in V(H)\}$:

Լեմմա 1.2.2: Եթե H գրաֆը G գրաֆի ծնված ենթագրաֆ է, ապա

$$MINLAD(H)\le MINLAD(G)$$

Պարագրաֆ 1.3-ում բերվում են ուսումնասիրվող խնդրի որոշ կիրառություններ:

Գրաֆի գագաթների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը առաջին անգամ առաջադրվել է Հարփերի կողմից: Խնդիրը կիրառվել է նաև աշխատանքների պլանավորման և գրաֆների պատկերման խնդիրներում:

2-րդ գլխում բերված են հայտնի արդյունքներ համարակալման խնդիրների ալգորիթմական բարդությունների մասին:

Պարագրաֆ 2.1-ում բերված են համարակալման որոշ NP-լրիվ խնդիրներ:

Պարագրաֆ 2.2-ում բերված են բազմանդամային ժամանակում լուծվող համարակալման որոշ խնդիրները:

3-րդ գլխում ներկայացված են ատենախոսության հիմնական արդյունքները:

Պարագրաֆ 3.1-ում ապացուցված է երկկողմանի, տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրի NP – լրիվությունը:

Սահմանում 3.1.1
G (V , E) կողմնորոշված գրաֆը կանվանենք տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆ, եթե նրա կամայական $u, v, w \in V(G)$ գագաթների համար տեղի ունի հետևյալ պայմանը

$$(u, v) \in E(G) \text{ և } (v, w) \in E(G) \Rightarrow (u, w) \in E(G)$$

Թեորեմ 3.1.1
Մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը(***MINLAD***) երկկողմանի, տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների դասում NP-լրիվ է:

Պարագրաֆ 3.2-ում ապացուցված է կշռված կողերով և որոշ գագաթների նախապես ֆիքսված դիրքերով գրաֆի մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության (MINLAW_K) խնդրի NP –լրիվությունը տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների դասում:

Թեորեմ 3.2.1.
Կամայական ֆիքսված K բնական թվի համար MINLAWT_K խնդիրը NP-լրիվ է:

Պարագրաֆ 3.3-ում ապացուցված է ***MINLAD*** խնդրի բազմանդամային լուծելիությունը Γ- կողմնորոշված գրաֆների որոշ ենթադասերում:

Կողմնորոշված $G(V,E)$ գրաֆի համար Γ_u^+ -ով և Γ_u^- -ով նշանակենք u գագաթի պատկերների և նախապատկերների բազմությունները, համապատասխանաբար.

$$\Gamma_u^+ = \{v / v \in V(G),\ (u,v) \in E(G)\}$$

$$\Gamma_u^- = \{v / v \in V(G),\ (v,u) \in E(G)\}$$

Սահմանում 3.3.1
Տրված $G(V,E)$ կողմնորոշված գրաֆը կանվանենք Γ- կողմնորոշված, եթե $\forall u, v \in V(G)$ գագաթների համար կամ $\Gamma_u^+ \subseteq \Gamma_v^+$ կամ $\Gamma_v^+ \subseteq \Gamma_u^+$:

Սահմանում 3.3.2
Տրված $G(V,E)$ սովորական ոչ կողմնորոշված գրաֆը կանվանենք Γ- կողմնորոշվող, եթե G գրաֆի կողերը կարելի է կողմնորոշել այնպես, որ ստացված գրաֆը լինի Γ-կողմնորոշված:

Թեորեմ 3.3.1
Կամայական $G(V,E)$ Γ- կողմնորոշված գրաֆ հանդիսանում է տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆ:

Դիցուք տրված է $G(V,E)$ Γ- կողմնորոշված գրաֆը: $MIN(G)$-ով և $MAX(G)$-ով նշանակենք, համապատասխանաբար, G գրաֆի բոլոր մինիմալ և մաքսիմալ գագաթների բազմությունները.

$$MIN(G) = \{v \in V(G) / \Gamma_v^- = \emptyset\}$$

$$MAX(G) = \{v \in V(G) / \Gamma_v^+ = \emptyset\}$$

Սահմանում 3.3.3
Կասենք, որ $V_1, V_2, \dots, V_{k(G)} \subseteq V$ ենթաբազմությունների ընտանիքը հանդիսանում է $G(V,E)$ գրաֆի համար շերտավորում, եթե

$$V_i = MIN(G \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j)$$

Նկատենք, որ տրված գրաֆի համար շերտավորումը միակն է և հանդիսանում է տրոհում $V(G)$ գագաթների բազմության համար:

Սահմանում 3.3.4
Տրված $G(V,E)$ կողմնորոշված գրաֆը կանվանենք երկկողմանի Γ-կողմնորոշված գրաֆ, եթե այն Γ-կողմնորոշված է և $k(G) \le 2$:

Հայտնի է, որ ***MINLAD*** խնդիրը բազմանդամային ժամանակում լուծելի է երկկողմանի Γ-կողմնորոշված գրաֆներ դասում: [2]

$LA(G)$ -ով նշանակենք G գրաֆի մինիմալ համարակալման երկարությունը.

$$LA(G) = \min_{f \in F(G)} LA(G,f)$$

$M(G)$-ով նշանակենք G գրաֆի բոլոր մինիմալ գծային համարակալումների բազմությունը.

$$M(G) = \{f \in F(G) / LA(G) = LA(G,f)\}$$

Քանի որ ամեն մի գծային համարակալման համար գրաֆի կոնկրետ գագաթը ունենում է տարբեր ազդեցություն համարակալման երկարության վրա, սահմանենք հետևյալ $W: V(G)\, x\, F(G) \rightarrow Z_+$ արտապակերումը, որը կբնութագրի տրված $v \in V(G)$ գագաթի և $f \in F(G)$ թույլատրելի համարակալման համար v գագաթի ազդեցության մասնաբաժինը $LA(G,f)$ -ում: Սահմանենք W-ն հետևյալ կերպ.

$$W(v,f) = LA(G,f) - LA(G\backslash v, f_v)$$

որտեղ $G\backslash v$ գրաֆը ստացվում է G գրաֆից v գագաթի և նրան կից բոլոր կողերի հեռացումից, իսկ f_v համարակալումը ստացվում է f համարակալումից հետևյալ կանոնով

$$f_v(u) = \begin{cases} f(u) & , f(u) < f(v) \\ f(u) - 1 & , f(u) > f(v) \end{cases}$$

Նկատենք, որ f_v համարակալումը հանդիսանում է թույլատրելի $G\backslash v$ գրաֆի համար, հետևաբար, W արտապատկերման սահմանումը կոռեկտ է: Սահմանենք մեկ այլ $W_*: V(G) \rightarrow Z_+$արտապատկերում հետևյալ կերպ.

$$W_*(v) = \min_{f \in F(G)} W(v,f)$$

G գրաֆի $v \in V(G)$ գագաթի համար $W_*(v)$ թիվը ցույց է տալիս v գագաթի մինիմալ ազդեցությունը ըստ բոլոր թույլատրելի համարակալումների :

[2] Rafayelyan, L., 2009, The Minimum Linear Arrangement Problem on Bipartite Γ–oriented graphs, Mathematical Problems of Computer Science 32, 23-26

Դիցուք տրված է G կողմնորոշված գրաֆը և $f \in F(G)$ գծային համարակալումը, այնպես, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները

$$\exists\, v \in V(G), \text{այնպես, որ } W(v,f) = W_*(v) \tag{3.3.1}$$

$$f_v \in M(G \backslash v) \tag{3.3.2}$$

Այս դեպքում տեղի ունի հետևյալ լեմման:

Լեմմա 3.3.1
Կամայական կողմնորոշված G գրաֆի $f \in F(G)$ թույլատրելի գծային համարակալում, որը բավարարում է 3.3.1 և 3.3.2 պայմաններին, հանդիսանում է մինիմալ գծային համարակալում G գրաֆի համար:

Դիցուք տրված է Γ-կողմնորոշված $G(V,E)$ գրաֆը և $v \in V(G)$ գագաթը, այնպես, որ

$$v \in MIN(G) \backslash MAX(G) \text{ և } |\Gamma_v^+| = \min_{w \in MIN(G) \backslash MAX(G)} |\Gamma_w^+|$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները

$$MIN_*(G) = \{w \in MIN(G) \backslash MAX(G) / |\Gamma_v^+| = |\Gamma_w^+|\}$$

$$MIN^*(G) = \{w \in MIN(G) / |\Gamma_w^+| = \max_{u \in MIN(G)} |\Gamma_u^+|\}$$

Սահմանում 3.3.5
Կասենք, որ $w \in V(G)$ գագաթը հանդիսանում է Γ_{min}^+ - գագաթ, եթե բավարարվում են հետևյալ պայմանները

$$w \in MIN_*(G) \text{ և } |\Gamma_w^+| = \min_{v \in N(G,w)} |\Gamma_v^+|$$

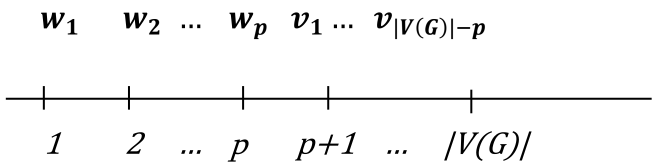
որտեղ $N(G,w) = V(G) \backslash (MAX(G) \cup \Gamma_w^+)$:

Սահմանում 3.3.6
Կասենք, որ Γ-կողմնորոշված $G(V,E)$ գրաֆը հանդիսանում Γ_{min}^+-կարգընթաց, եթե գոյություն ունի $G_0, G_1, \dots, G_p$ Γ-կողմնորոշված գրաֆների հաջորդականություն, այնպես, որ $G_0 = G$, $G_i = G_{i-1} \backslash w_i$, որտեղ w_i գագաթը հանդիսանում է Γ_{min}^+ գագաթ G_{i-1} գրաֆի համար, $i = 1, \dots, p$, և $G_p = G[MAX(G)]$:

Դիցուք տրված է Γ-կողմնորոշված $G(V,E)$ գրաֆը և հայտնի է, որ այն հանդիսանում է Γ_{min}^+-կարգընթաց: Ըստ սահմանում 3.3.6 –ի գոյություն ունեն

$G_0, G_1, \dots, G_p$ Γ-կողմնորոշված գրաֆների հաջորդականություն և $w_1, \dots, w_p$ գագաթներ, այնպես, որ w_i գագաթը հանդիսանում է Γ^+_{min} գագաթ G_{i-1} գրաֆի համար, $i = 1, \dots, p$: Նկատենք, որ G գրաֆի $w_1, \dots, w_p$ գագաթների հետ չհամընկնող գագաթները հանդիսանում են մաքսիմալ գագաթներ: Դիցուք $MAX(G) = \{v_1, \dots, v_{|V(G)|-p}\}$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $\left|\Gamma^-_{v_i}\right| \geq \left|\Gamma^-_{v_{i+1}}\right|, i = 1, \dots, |V(G)| - p - 1$:

Դիտարկենք հետևյալ f գծային համարակալումը



Լեմմա 3.3.2
Կամայական Γ^+_{min}-կարգընթաց $G(V, E)$ գրաֆի համար $f \in F(G)$:

Լեմմա 3.3.3
Կամայական Γ-կողմնորոշված, Γ^+_{min}-կարգընթաց G գրաֆի համար

$$W(w_1, f) = \left|\Gamma^+_{w_1}\right| \frac{\left|\Gamma^+_{w_1}\right| + 1}{2} + N\left|\Gamma^+_{w_1}\right|$$

որտեղ $N = |V(G) \backslash (MAX(G) \cup \Gamma^+_w)|$:

Լեմմա 3.3.4
Կամայական Γ-կողմնորոշված, Γ^+_{min}-կարգընթաց G գրաֆի համար $W_*(w_1) = W(w_1, f)$:

Թեորեմ 3.3.2
Կամայական Γ-կողմնորոշված, Γ^+_{min}-կարգընթաց G գրաֆի համար $f \in M(G)$:

Թեորեմ 3.3.2-ից հետևում է, որ գրաֆի գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը հանդիսանում է բազմանդամային ժամանակում լուծելի Γ^+_{min}-կարգընթաց գրաֆների դասում: Նկատենք նաև , որ թեորեմ 3.3.2–ը հանդիսանում է երկկողմանի Γ-կողմնորոշված գրաֆների հետ կապված հայտնի արդյունքի ընդհանրացում:

Լեմմա 3.3.5
Կամայական ացիկլիկ կողմնորոշված $G(V, E)$ գրաֆի համար, որտեղ $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ և $\{(s, t)/s \in V_1$ *և* $t \in V_2\} \subseteq E(G)$, տեղի ունի

$$LA(G) = LA(G[V_1]) + LA(G[V_2]) + |V_1| * |V_2| * \frac{|V_1| + |V_2|}{2}$$

հավասարությունը:

Սահմանում 3.3.7
Կասենք, որ $G(V,E)$ կողմնորոշված գրաֆը ստացվել է G_1 և G_2 գրաֆների հաջորդական միացումով , եթե $V = V_1 \cup V_2$ և $E = E_1 \cup E_2 \cup \{(s,t)/s \in V_1$ և $t \in V_2\}$:

Լեմմա 3.3.6
Կամայական $G_1(V_1, E_1)$ և $G_2(V_2, E_2)$ Γ-կողմնորոշված գրաֆների հաջորդական միացումով ստացված $G(V,E)$ գրաֆը հանդիսանում է Γ-կողմնորոշված:

$P(\Gamma)$-ով նշանակենք Γ-կողմնորոշված գրաֆների այն ենթադասը, որի համար գրաֆի գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը բազմանդամային ժամանակում լուծելի է: Ըստ թեորեմ 3.3.2-ի $P(\Gamma) \neq \emptyset$:

Թեորեմ 3.3.3
$P(\Gamma)$ բազմությունը փակ է հաջորդական միացում գործողության նկատմամբ:

Այժմ ռեկուրսիվ եղանակով սահմանենք Γ-կողմնորոշված գրաֆների մեկ այլ ենթադաս, որը նշանակենք SC(Γ^+_{min})-ով:

Սահմանում 3.3.8

1. Կամայական Γ^+_{min}-կարգընթաց գրաֆ պատկանում է SC(Γ^+_{min}):
2. Կամայական $G_1, G_2 \in$ SC(Γ^+_{min}) գրաֆներից հաջորդական միացում գործողության կիրառման արդյունքում ստացվող G գրաֆը պատկանում է SC(Γ^+_{min}):
3. SC(Γ^+_{min}) բազմությանը պատկանում են միայն այն գրաֆները, որոնք ստացվում են 2 կետում նկարագրված գործողության՝ վերջավոր քանակով կիրառումների արդյունքում:

Նկատենք, որ 3.3.3 թեորեմից անմիջապես ստանում ենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3.3.4
SC(Γ^+_{min}) $\subseteq P(\Gamma)$:

Պարագրաֆ 3.4-ում ներկայացված է տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրի լուծման էվրիստիկ ալգորիթմ:

Դիցուք տրված է ացիկլիկ կողմնորոշված $G(V, E)$ գրաֆը և նրա հարևանության (a_{ij}) մատրիցը՝

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Համաձայն սահմանման, (v_i, v_j) կողի երկարությունը φ համարակալման դեպքում հավասար է $\varphi(v_j) - \varphi(v_i)$: Նկատենք, որ G գրաֆի φ համարակալման համապատասխան $LA(G,\varphi)$ երկարությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանաձևով.

$$LA(G,\varphi) = \sum_{i=1}^{|V(G)|} \sum_{j=1}^{|V(G)|} a_{ij}\left(\varphi(v_j) - \varphi(v_i)\right)$$

Նշանակելով $C_{v_i} = |\Gamma_{v_i}^-| - |\Gamma_{v_i}^+|$, ստացված գումարի համար կունենանք հետևյալ կրճատ տեսքը.

$$LA(G,\varphi) = \sum_{i=1}^{|V(G)|} \varphi(v_i) C_{v_i}$$

Հայտնի է, որ $\forall$ $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ և $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$ n երկարությամբ հաջորդականությունների և $\forall\varphi: \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ տեղադրության համար տեղի ունի

$$\sum_{i=1}^{n} b_i a_i \ge \sum_{i=1}^{n} b_i a_{\varphi(i)} \ge \sum_{i=1}^{n} b_{n-i+1} a_i$$

անհավասարությունը: Քանի որ մեր նպատակն է գտնել այնպիսի φ տեղադրություն, որ $LA(G,\varphi)$ -ն ընդունի իր մինիմալ արժեքը, բնական է, որ ավելի մեծ C_{v_i} ունեցող գագաթները համարակալվեն ավելի փոքր համարներով: Հենց այս մտքի վրա էլ հիմնված է առաջարկվող էվրիստիկ ալգորիթմը, որը մուտքում ստանում է տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆ և կառուցում է նրա թույլատրելի տեղադրումը գծի վրա:

ԱԼԳՈՐԻԹՄ:

ՄՈՒՏՔ: $G(V, E)$ տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆը , որտեղ $|V(G)| = n$:

1. Հաշվում ենք $C_i = \left(|\Gamma_{v_i}^-| - |\Gamma_{v_i}^+|\right)$ $i = 1, \dots, n$ և կարգավորում ենք ըստ աճման կարգի $C_{i_1} \leq C_{i_2} \leq \cdots \leq C_{i_n}$:

2. Հերթով տեղադրում ենք $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}$ գագաթները ըստ հետևյալ կանոնի. Ընթացիկ v_{i_j} գագաթին տալիս ենք j համարը՝ $\varphi(v_{i_j}) := j$, և սկսում ենք v_{i_j} գագաթի համարը փոքրացնել (քայլ 3.), այնպես, որ տեղադրման թույլատրելիությունը չխախտվի:

3. Քանի դեռ $\exists u$ գագաթ, այնպես, որ $\varphi(v_{i_j}) = \varphi(u) + 1$ և $(u, v_{i_j}) \notin E$ (**տեղափոխման պայման**), փոխում ենք v_{i_j} և u գագաթների համարները հետևյալ կերպ.

$$\varphi(v_{i_j}) := \varphi(v_{i_j}) - 1$$
$$\varphi(u) := \varphi(u) + 1$$

Լեմմա 3.4.1
Ալգորիթմի արդյունքում ստացված տեղադրությունը թույլատրելի է:

Պարագրաֆ 3.5-ում ապացուցված է էվրիստիկ ալգորիթմի օպտիմալությունը Γ-կողմնորոշված գրաֆների որոշ ենթադասերում:

Թեորեմ 3.5.1:
Կամայական երկկողմանի Γ -կողմնորոշված $G(V, E)$ գրաֆի համար ալգորիթմը կառուցում է մինիմալ տեղադրում:

P_{Alg}-ով նշանակենք տրանզիտիվ կողմնորոշված այն գրաֆների ենթադասը, որոնց համար ալգորիթմը կառուցում է մինիմալ գծային համարակալում: Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ $P_{Alg} \neq \emptyset$:

Լեմմա 3.5.1

Կամայական G_1 և G_2 տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆներից հաջորդական միացում գործողության կիրառման արդյունքում ստացվող G գրաֆը հանդիսանում է տրանզիտիվ կողմնորոշված:

Թեորեմ 3.5.2
P_{Alg} բազմությունը փակ է հաջորդական միացում գործողության նկատմամբ:

Ներկայացնենք տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների ենթադաս հանդիսացող SC(Γ_B) դասի ռեկուրսիվ սահմանումը:

Սահմանում 3.5.1

1. Կամայական երկկողմանի, Γ-կողմնորոշված գրաֆ պատկանում է SC(Γ_B):

2. Կամայական $G_1, G_2 \in$ SC(Γ_B) գրաֆներից հաջորդական միացում գործողության կիրառման արդյունքում ստացվող G գրաֆը պատկանում է SC(Γ_B) բազմությանը:

3. SC(Γ_B)բազմությանը պատկանում են միայն այն գրաֆները, որոնք ստացվում են 2 կետում նկարագրված գործողության վերջավոր քանակով կիրառումների արդյունքում:

Թեորեմ 3.5.3
Կամայական $G \in$ SC(Γ_B) գրաֆի համար $G \in P_{Alg}$:

Այսպիսով, ստացանք, որ մեր կողմից ներկայացված էվրիստիկ ալգորիթմը, հանդիսանում է օպտիմալ տեղադրություններ կառուցող ալգորիթմ տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների SC(Γ_B) ենթաբազմության համար:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

- Ապացուցված է երկկողմանի, տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրի NP –լրիվությունը

- Ապացուցված է որոշ գագաթների նախապես ֆիքսված դիրքերով գրաֆի մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրի NP–լրիվությունը տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների դասում

- Ներկայացված է գրաֆի գծային համարակալում ըստ երկարության խնդրի լուծման ռեկուրսիվ մոտեցում, որի շնորհիվ ապացուցված է խնդրի բազմանդամային լուծելիությունը Γ-կողմնորոշված գրաֆների մի շարք ենթադասերի համար

- Ներկայացված է տրանզիտիվ կողմնորոշված գրաֆների մինիմալ գծային համարակալում ըստ երկարության խնդիրը լուծող էվրիստիկ ալգորիթմ և նրա օպտիմալությունը Γ-կողմնորոշված գրաֆների որոշ ենթադասերում, ինչպես նաև ներկայացված են փորձարարական եղանակով ստացված սխալանքի գնահատականներ առաջարկված ալգորիթմի համար:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՊԱՐԱԿՎԱԾ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

1. H. Sargsyan, S.Ye. Markosyan, Minimum linear arrangement of the transitive oriented, bipartite graphs, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, Yerevan 2012, #2, pp. 50-54
2. H. Sargsyan, On an approximation algorithm for MINLA problem restricted to some classes of graphs, Computer Science and Information Technologies (CSIT) conference, 23.09-27.09.2013, Yerevan, pp. 94-96
3. H. Sargsyan, On a recursive approach to the solution of MINLA problem, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, Yerevan 2014, #1, pp. 48-50

РЕЗЮМЕ

Саргсян Оганнес

Нумерация вершин ориентированных графов

Ориентированный граф $G(V,\ E)$ назовем транзитивно ориентированным, если для любых трех вершин u, v, w, которые удовлетворяют условиям $(u, v) \in E$, $(v, w) \in E$, выполняется также и условие $(u, w) \in E$.

Если $G(V,\ E)$ – ориентированный граф, v – его любая вершина, то через Γ_v^+ обозначаем подмножество $\{u \in V /\ (v, u) \in E\}$ вершин графа G.

Ориентированный граф $G(V,\ E)$ назовем Г- ориентированным графом, если для любых двух вершин u, v хотя бы одно из условий $\Gamma_u^+ \subseteq \Gamma_v^+$, $\Gamma_v^+ \subseteq \Gamma_u^+$ является верным.

Диссертационная работа посвящена исследованию задачи минимального линейного размещения по длине ориентированных графов в классе транзитивно ориентированных графов. Эта задача тесно связана с одной из известных важных задач теории расписаний – задачи составления расписания выполнения работ из заданного частично упорядоченного множества работ при необходимости минимизации суммы взвешенных моментов их окончания.

Большое практическое значение задача имеет как для случая ориентированных графов, так и для случая неоринтированниых графов. Основное прикладное значение задачи проявляется в технологических аспектах проектирования сверхбольших интегральных схем. Известно, что в задачах математического моделирования технологических процессов проектирования сверхбольших интегральных схем интегральную схему представляют в виде графа, вершины которого соответствуют модулям, а ребра – соединениям. На различных этапах проектирования интегральной схемы возникает необходимость оптимизации различных параметров схемы, например, длины самого длинного соединения, суммы длин всех соединений и т.д. Из других практических применений можно отметить задачи построения хорошо воспринимаемых глазом человека изображений графов, которые для некоторых классов графов эквивалентны задачам минимизации числа вневершинных пересечений ребер при представлении графов на плоскости. Задачи рассматриваемого типа впервые были применены Харпером(Harper, L. H. (1964). Optimal assignments of numbers to vertices. J. SIAM 12, 1 , 131-135) для решения задач минимизации ошибок при построении кодов, корректирующих ошибки.

Сформулируем основную задачу, исследованную в диссертационной работе.

Задача. Дан ориентированный граф $G(V, E)$. Требуется найти инъективную функцию $\varphi: V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$, которая удовлетворяет условиям:

1. для $\forall(u, v) \in E \;\; \varphi(u) < \varphi(v)$,
2. $\sum_{(u,v)\in E} \big(\varphi(v) - \varphi(u)\big) \to min$

Известно, что сформулированная задача является NP-полной в случае произвольных ориентированных графов, но полиномиально разрешима для классов корневых деревев, а также для двудольных Г- ориентированных графов. В 1978 году Лоулер доказал полиномиальную разрешимость задачи в классе сериально-параллельных графов, что является обобщением результата о полиномиальной разрешимости задачи для класса корневых деревев (Lawler E. L., 1978, subject to precedence constraints, Annals of Discrette Mathematics, 75-90. Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints, Annals of Discrette Mathematics, 75-90.).

В диссертационной работе задача исследована как для транзитивно ориентированных графов, так и для частных подклассов транзитивно ориентированных графов. Для транзитивно ориентированных графов доказана NP-полнота задачи, а для некоторых частных подклассов транзитивно ориентированных графов предложены полиномиальные алгоритмы решения задачи.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- Доказана NP-полнота исследуемой задачи в классе транзитивно ориентированных графов.

- Предложен эвристический алгоритм ее решения.

- Доказана оптимальность предложенного алгоритма для некоторых подклассов Г- ориентированных графов, а также представлены оценки погрешности алгоритма, которые получены экспериментальным путем и свидетельствуют о практической эффективности алгоритма.

- Представлен новый рекурсивный способ решения рассматриваемой задачи, с помощью которого доказана полиномиальная разрешимость задачи для некоторых подклассов Г- ориентированных графов.

Abstract

Sargsyan Hovhannes

“Numbering of vertices of directed graphs”

A directed graph $G(V,\ E)$ is called transitive oriented, if for arbitrary three vertices $u, v, w,$ which satisfy the conditions $(u, v) \in E$, $(v, w) \in E$, the condition $(u, w) \in E$ holds as well.

If $G(V,\ E)$ is a directed graph and v is its arbitrary vertex then we denote by Γ_v^+ the subset $\{u \in V /\ \ (v, u) \in E\}$ of vertices of the graph G.

A directed graph $G(V,\ E)$ is called a Γ-oriented graph, if for arbitrary two vertices $v, u \in V$ at least one of the conditions $\Gamma_u^+ \subseteq \Gamma_v^+, \Gamma_v^+ \subseteq \Gamma_u^+$ is true.

The dissertation is devoted to an investigation of the problem of minimum linear arrangement of directed graphs in the class of transitive oriented graphs. This problem is closely linked with the one of the well known and important problems of scheduling theory — the problem of creation of a schedule of the execution of works from the given partially ordered set of works with the necessity of minimizing of the weighted sum of their completions. The problem has a valuable practical significance for the case of undirected graphs. The main applied significance of the problem is manifested in technological aspects of chip designing. It is known that in mathematical modeling of technological processes of chip designing a chip is usually represented as a graph, the vertices of which correspond to modules, and edges – to connections. On different stages of chip designing the necessity arises to optimize different parameters of the chip, for example, the longest length of a connection, the sum of lengths of all connections and so on. Among other practical applications we can note problems of construction of eye wellperceivable pictures of graphs, which for some classes of graphs are equivalent to problems of minimizing of the number of edge intersections in graph representations on a plane. Problems of considered kind firstly were applied by Harper for a solution of problems of mistake minimizing in construction of mistakecorrecting codes (Harper, L. H. 1964, Optimal assignments of numbers to vertices. J. SIAM 12, 1 , 131-135).

Let us formulate the main problem which is investigated in the dissertation.

Problem. A directed graph $G(V,\ E)$ is given. An injective function $\varphi: V \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V|\}$ must be found which satisfies the conditions:

1. for $\forall (u,v) \in E\ \ \varphi(u) < \varphi(v)$,
2. $\sum_{(u,v)\in E} \big(\varphi(v) - \varphi(u)\big) \rightarrow min$

It is known that the formulated problem is NP-complete for the case of arbitrary directed graphs, but polynomially solvable for the class of rooted trees, and for bipartite Γ-oriented graphs as well. In 1978 Lawler proved the polynomial solvability of the problem in the class of series-parrallel graphs, which is a generalization of the result on the polynomial solvability of the problem for the class of rooted trees (Lawler E. L., 1978, subject to precedence constraints, Annals of Discrette Mathematics, 75-90. Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints, Annals of Discrette Mathematics, 75-90.). In the dissertation the problem is investigated for transitive oriented graphs, and for private subclasses of transitive graphs as well.

In the dissertation the following main results are obtained:

- The NP-completeness of the investigated problem is proved for the class of bipartite, transitive oriented graphs.
- An heuristic algorithm of solution of the problem is suggested.
- The optimality of the suggested algorithm is proved for some subclasses of Γ-oriented graphs, and also estimates of inaccuracy of the algorithm are represented, which are obtained by experimental way and confirm the practical efficiency of the algorithm.
- A new recursive method of solution of the considered problem is represented, with the help of which the polynomial solvability of the problem is proved for some subclasses of Γ-oriented graphs.