ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կարեն Արշալույսի Նավասարդյան

Հաարի, Ուոլշի համակարգերով և նրանց ընդհանրացումներով զուգամիտության և միակության հարցեր

Ա.01.01 «Մաթեմատիկական անալիզ» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2018

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Карен Аршалуйсович Навасардян

Вопросы сходимости и единственности рядов по системам Хаара, Уолша и их обобщениям

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.01- «Математический анализ»

ЕРЕВАН - 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Վ.Ա. Սկվորցով
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Գ.Գ. Օնիանի
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Գ.Ա. Կարագուլյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Բելոռուսիայի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ. նոյեմբերի 20-ին, ժ. 15:00-ին ԵՊՀ-ում գործող ՀՀ ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2018թ. հոկտեմբերի 09-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук В.А. Скворцов
доктор физ.-мат. наук Г.Г. Ониани
доктор физ.-мат. наук Г.А. Карагулян

Ведущая организация: Белорусский государственный университет

Защита диссертации состоится 20 ноября 2018г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 050 ВАК РА, действующего в Ереванском государственном университете, по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 09 октября 2018г.

Ученый секретарь специализированного совета
доктор физ.-мат. наук Т.Н. Арутюнян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются вопросы представления, исправления и единственности для некоторых ортогональных систем. Возможность представления функций разными ортогональными рядами стала рассматриваться еще в начале прошлого века. Первые результаты в этом направлении получены Н.Н. Лузиным и Д.Е. Меньшовым. Вопросы представления функций общими ортогональными рядами исследовались с тридцатых годов прошлого века Марцинкевичем. Фундаментальные результаты в этом направлении получены А.А. Талаляном, Ф.Г. Арутюняном, В.А. Скворцовым, С.В. Конягином, Н.Б. Погосяном и другими математиками. Вопросы представления функций ортогональными рядамы развивались в разных направлениях: возможность представления функций с помощью одного (универсального) ряда (П.Л. Ульянов, А.А. Талалян, А.М. Олевсий, В.Г. Кротов, Г.М. Мушегян и др.); поведение коэффициентов таких рядов (Ф.Г. Арутюнян, О.С. Ивашев–Мусатов, Т. Корнер, Н.Б. Погосян и др.); представление функций абсолютно сходящимися рядами (Ф.Г. Арутюнян, Г.Г. Геворкян, Р.С. Давтян и др.).

Идея “исправления” функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н.Н Лузину (C-свойство Лузина). Затем эта идея развивалась Д.Е. Меньшовым. Теоремы исправления развивались в разных направлениях: 1) возможность выбора “исключительного” множества (на котором “исправляется” функция f некоторого класса функций $\mathscr{F}$) независящим от f; 2) изменить функцию на множестве малой меры с целью а) улучшения свойств коэффициентов разложения новой функции (например, монотонность модулей всех или ненулевых коэффициентов), б) получения сходимости (абсолютной сходимости) ряда Фурье новой функции. Вопросами исправления занимались Кашин Б.С., Олевский А.М., Кисляков С.В., Арутюнян Ф.Г., Григорян М.Г и другие известные математики.

В теории ортогональных рядов вопросам единственности посвящено много работ. Эта тематика, начатая классическими исследованиями Г. Кантора, Ш.Ж. Валле-Пуссена, Н.Н. Лузина, Д.Е. Меньшова и других, в настоящее время активно разрабатывается во многих научных центрах. Были установлены новые теоремы единственности для разных ортогональных систем (А. Зигмунд, Н.К. Бари, В. Шапиро, В.А. Скворцов, А.А. Талалян, Ф.Г. Арутюнян, Ш. Тетунашвили, Г.Г. Геворкян и др.). Одним из первых результатов в этом направлении для п.в. сходящихся тригонометрических рядов является теорема Г.Г. Геворкяна, где появляется некоторое условие на мажоранту частичних сумм. Аналогичные теоремы для некоторых ортогональных систем были получены В.В. Костиным, К.А. Керяном, М.П. Погосяном и другими математиками.

Диссертационная работа посвящена высшеупомянутым темам, которые до сих пор являются актуальными, и получены некоторые новые результаты в этом направлении.

Цель работы и основные результаты: Основной целью диссертации является исследовать некоторых вопросов сходимости и единственности для рядов по системам Хаара, Уолша и их обобщениям. В работе получены следующие основные результаты:

1. Для любой последовательности $a_n \searrow 0$, $\{a_n\} \notin l_2$, существует ряд по системе Уолша

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$, $\delta_n = \pm 1$, который является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

2. Существует универсальный относительно знаков ряд по системе Уолша, коэффициенты которого монотонно убывают и находятся над заранее заданной минорантой.

3. Для любого положительного ε существуют множество E с мерой $\mathrm{mes}(E) < \varepsilon$ и интегрируемая на $[0, 1]$ функция g с монотонно убывающими коэффициентами Фурье–Уолша такие, что любую интегрируемую на $[0, 1]$ функцию можно "исправить" на множестве E так, чтобы ряд Фурье–Уолша полученной функции сходился к нее по L^1-норме, а коэффициенты Фурье–Уолша по абсолютной величине совпадали с коэффициентами функции g.

4. Если кубические частичные суммы кратного ряда по системе Хаара (Франклина) $S_{K_n}(x)$, где отношение $\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$ ограничено, п.в. сходятся к некоторой функции, а мажоранта этих частичных сумм удовлетворяет некоторому необходимому условию, то найдены формулы восстановления коэффициентов этого ряда. Доказано также, что ограниченность отношения $\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$ существенна.

5. Найдены формулы восстановления коэффициентов кратного ряда по общей системе Франклина, соответствующей парно регулярному разбиению, кубические частичные суммы которого по мере сходятся к некоторой функции, а мажоранта частичных сумм этого ряда удовлетворяет некоторому необходимому условию.

6. Для рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара введен новый линейный метод суммирования и доказана регулярность этого метода.

7. Найдены формулы восстановления коэффициентов ряда по системе Виленкина или обобщенной системе Хаара, частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ которого по мере сходятся к п.в. конечной функции, а мажоранта всех частичных сумм удовлетворяет некоторому условию обеспечивающую единственность.

Методика исследования. Применяются общие методы метрической теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Отметим один из них. Для рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара введен новый метод суммирования и с помощью этого метода доказаны теоремы единственности рядов по отмеченным системам. В частности получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы ряд по этим системам был рядом Фурье некоторой интегрируемой функции.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты представляют теоретический интерес. Отметим, что одним из проблем метрической теории функций является вопрос представления функций ортогональными рядами. Другая проблема является единственность представления функций ортогональными рядами.

В работе, в частности, доказаны некоторые теоремы представления функций рядами по системе Уолша с монотонными коэффициентами. Получены также некоторые теоремы единственности. Доказано, что если ряд по системе Хаара, Франклина, Виленкина или обобщенной системе Хаара сходится к некоторой функции f, а мажоранта частичных сумм удовлетворяет некоторому условию, то коэффициенты этого ряда восстановливаются с помощью f.

Результаты и методы работы могут найти применение при изучении аналогичных проблем для других ортогональных рядов.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры численного анализа и математического моделирования ЕГУ, на общем семинаре факультета информатики и прикладной математики ЕГУ, на семинарах академика НАН РА Геворкяна Г.Г., на международных конференциях "Harmonic Analysis and Approximations, I, IV, VI, VII, [22*]–[25*], на ежегодной сессии Армянского математического союза, [26*], на 12-й Саратовской зимней школе, [27*].

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 21 научных статьей, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы, содержащего 148 наименований. Объем – 201 страница.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении диссертации приведены некоторые, хорошо известные, факты, доказанные Н.Н. Лузиным, Д.Е. Меньшовым, С.В. Конягиным, А.А. Талаляном, Ф.Г. Арутюняном, Г.Г. Геворкяном и М.Г. Григоряном. Дано также краткое описание вопросов, рассмотренных в диссертации, а также сформулированы основные результаты. В конце приведен список некоторых обозначеный, которые встречаются в тексте.

В первой главе рассматриваются вопросы представления почти всюду конечных измеримых функций рядамы по системе Уолша и по системам типа Хаара (по $\mathscr{H}$-системам).

В 1915 г. Н.Н. Лузиным (см. [1, ст. 236]) была поставлена задача: можно ли представить почти всюду сходящимся тригонометрическим рядом произвольную измеримую (действительную) функцию, конечную почти всюду или принимающую значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры? Первые результаты, связанные с этой задачей, были получены им же в работе [1]. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены Д.Е. Меньшовым в работах [2] и [3]. Где, в частности, доказана

Теорема (Д.Е. Меньшов [2]). *Для любой почти всюду конечной на $[0, 2\pi]$ измеримой функции f существует тригонометрический ряд, который сходится к ней почти всюду.*

Затем С.В. Конягином (см. [4]) было доказано, что тригонометрический ряд не может сходиться к бесконечности на множестве положительной меры. Тем самым в одномерном случае проблема представления измеримой функции сходящимся почти всюду (п.в.) тригонометрическим рядом была полностью решена.

Вопросы представления функций общими ортогональными рядами исследовались с тридцатых годов прошлого века Марцинкевичем (см. [5, ст. 312]). Подробно об этой тематике можно узнать из обзорных статей А.А. Талаляна [6], [7] и П.Л. Ульянова [8]. Для достаточно широкого класса ортогональных систем (мажоранта частичных сумм которых имеет тип (2,2)) Ф.Г. Арутюняном и Н.Б. Погосяном получен аналог теоремы Д.Е. Меньшова (см., напр., [9, ст. 452]). А.А. Талалян и Ф.Г. Арутюнян (см. [10]) доказали, что ряды по системам Хаара и Уолша не могут стремиться к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Вопросы представления функций ортогональными рядами развивались в разных направлениях: возможность представления функций с помощью одного ряда (универсальный ряд); поведение коэффициентов таких рядов (монотонность, скорость стремления к нулю); представление функций абсолютно сходящимися рядами и т.д.

Напомним некоторые определения:

Определение 1.1.1. *Пусть $\mathscr{F}$ – некоторый класс измеримых функций. Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{1}$$

называется универсальным относительно знаков (подрядов) в классе $\mathscr{F}$, если для любой функции $f \in \mathscr{F}$ существует последовательность $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n = \pm 1$ ($\gamma_n = 0, 1$), для которой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n \varphi_n(x)$ сходится к $f(x)$ п.в.

Определение 1.1.2. *Пусть $\mathscr{F}$ – некоторый класс измеримых функций. Ряд* (1) *называется универсальным относительно перестановок в классе $\mathscr{F}$, если для любой функции $f \in \mathscr{F}$ члены ряда* (1) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился к $f(x)$ п.в.*

Первые примеры (в разных смыслах) универсальных тригонометрических рядов были получены в работах [11]–[15]. Отметим некоторые из них.

Теорема 1.1.A (А.А. Талалян, [13]). *Существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

обладающий следующим свойством: для любой измеримой функции f, определенной на $[0, 2\pi]$, ($f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры), существует подряд этого ряда, который сходится к $f(x)$ п.в. на том множестве, где f конечна, и по мере на $[0, 2\pi]$.

В работе [14] Г.М. Мушегяном отмечен некоторый класс ортогональных систем (в который, в частности, входят системы Хаара, Уолша и тригонометрическая система), для которых существуют универсальные ряды относительно перестановок в классе всех измеримых функций.

Теорема 1.1.B (Н.Б. Погосян [15]). *По любой полной, ортонормированной и равномерно ограниченной системе $\{\varphi_n(x)\}$ существует ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который удовлетворяет следующим условиям:

i) *этот ряд является универсальным относительно перестановок в классе всех измеримых функций;*

ii) *после некоторой перестановки членов полученный ряд становится универсальным относительно знаков в классе всех измеримых функций;*

iii) *для любого числа* $\varepsilon > 0$ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^{2+\varepsilon}$ *сходится.*

Об исследованиях универсальных ортогональных рядов подробно можно узнать из работ [7], [16].

Напомним, что функции системы Радемахера определяются по формулам

$$R_n(x) = \mathrm{sgn}(\sin 2^n \pi x), \quad x \in [0,1], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Функции системы Уолша выражаются через функции системы Радемахера следующим образом (см., например, [9, с. 150]): $W_0(x) \equiv 1$, а для $n \geq 1$, если $2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \cdots + 2^{\nu_p}$ есть двоичное представление числа n $(\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_p)$, то в точках непрерывности функций R_{ν_i+1}, $i = 1, 2, \ldots, p$,

$$W_n(x) := \prod_{i=1}^{p} R_{\nu_i+1}(x),$$

а в остальных точках – среднее арифметическое односторонних пределов функции $W_n(x)$. Система $\left\{W_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ называется системой Уолша (в нумерации Пэли).

В разделах 1.1, 1.2 и 1.4 рассматриваются ряды по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ с монотонными коэффициентами. Справедлива следующая

Теорема 1.1.4 ([1*]). *Пусть* $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ *– монотонная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям* $a_n \to 0$, $n \to \infty$, *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. *Тогда существуют числа* $\delta_n = \pm 1$ *такие, что ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ *является универсальным относительно подрядов в классе почти всюду конечных измеримых на* $[0,1]$ *функций.*

Известно (см. [17], [18], а также [19, с. 165]), что ряд по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ с монотонными коэффициентами является рядом Фурье–Уолша функции $f \in L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, в том и только том случае, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}$ сходится. Из этого факта и из теоремы 1.1.4 следует

Теорема 1.1.5 ([1*]). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} W_n(x)$ *является рядом Фурье–Уолша некоторой функции из класса* $\bigcap\limits_{p<2} L^p(0,1)$, *и для любой п.в. конечной измеримой функции* f *существуют числа* $\delta_n = 0, \pm 1$ *такие, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\delta_n}{\sqrt{n}} W_n(x)$ *п.в. сходится к* $f(x)$.

Для тригонометрической системы в работе [20] Н.С. Погосян анонсировал следующую теорему.

Теорема 1.2.A (Н.С. Погосян, [20]). *Пусть* $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– произвольная последовательность чисел, удовлетворяющая условиям* $\rho_n \searrow 0$, $n \to \infty$, *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 = +\infty$. *Тогда сущест-*

вует функция $f \in \bigcap\limits_{p<2} L^p[0,2\pi]$, *тригонометрический ряд Фурье которой является универсальным одновременно относительно знаков, перестановок и подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций, а коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам* $|c_n(f)| \le \rho_{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогичные вопросы для кратных рядов Уолша были рассмотрены в работах [2*]-[5*].

Пусть d – некоторое натуральное число, а $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел. Для элемента $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d$ и точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in [0,1]^d$ обозначим $W_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) := W_{m_1}(x_1)W_{m_2}(x_2)\cdots W_{m_d}(x_d)$. Как обычно, для $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ через $c_{\mathbf{n}}(f)$ будем обозначать коэффициент Фурье по кратной системе Уолша, т.е.

$$c_{\mathbf{n}}(f) := \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Запись $\mathbf{m} \le \mathbf{n}$ будет означать, что $m_i \le n_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, d$. Справедлива следующая

Теорема 1.1.6 ([5*]). *Пусть последовательность положительных действительных чисел* $\{a_{\mathbf{n}}\}$ *удовлетворяет следующим условиям:* $0 < a_{\mathbf{m}} \le a_{\mathbf{n}}$ *при* $\mathbf{n} \le \mathbf{m}$ *и для любого* $\mathbf{M} := (M, M, \dots, M) \in \mathbb{N}_0^d$ *ряд* $\sum\limits_{\mathbf{n} \ge \mathbf{M}} a_{\mathbf{n}}^2$ *расходится. Тогда существует функция* $f \in \bigcap\limits_{p<2} L^p(0,1)^d$ *с коэффициентами Фурье* $|c_{\mathbf{n}}(f)| \le a_{\mathbf{n}}$, *ряд Фурье которой является универсальным относительно знаков в классе п.в. конечных измеримых функций, а для некоторого набора знаков* $\{\delta_{\mathbf{n}}\}$, $\delta_{\mathbf{n}} = \pm 1$, *ряд*

$$\sum_{\mathbf{n}: n_i \ge 0} \delta_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}(f) W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

Отметим, что в этих теоремах для коэффициентов получены оценки сверху. В разделе 1.2 рассматривается вопрос представления функций рядами по системе Уолша, модули коэффициентов которых находятся над наперед заданной минорантой и не возрастают. Доказывается следующая

Теорема 1.2.1 ([6*]). *Для любой последовательности* $a_n \downarrow 0$ *при* $n \to \infty$ *существует ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ *с монотонно убывающими коэффициентами* $b_n \ge a_n$, *который является универсальным относительно знаков в классе почти всюду конечных измеримых функций.*

В разделе 1.3 рассматриваются системы типа Хаара, построенные на диадических системах пространств однородного типа. Напомним некоторые определения.

Определение 1.3.1. *Пусть* X *– некоторое множество. Неотрицательная симметричная функция* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ *называется квазиметрикой, если*

1. $\rho(x,y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$,

2. *существует постоянная* K *такая, что*

$$\rho(x,y) \le K\left(\rho(x,z) + \rho(z,y)\right) \quad \text{для всех } \ x,y,z \in X.$$

Напомним также, что пространство (X,ρ,μ), где ρ – квазиметрика, а μ – некоторая бореловая σ-конечная мера, определенная на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X, называется пространством однородного типа, если существует постоянная A такая, что

$$\mu(B(x,2r)) \le A\mu(B(x,r)) < +\infty \qquad \text{для всех } x\in X \quad \text{и } r>0,$$

где $B(x,r) := \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$ – шар с центром x и радиусом r.

Известно, что если ρ – квазиметрика с коэффициентом $K>1$, то шар $B(x,r)$ может быть неоткрытым множеством. В работе [21] доказано, что для любой квазиметрики ρ существует такая квазиметрика ρ', которая эквивалентна ρ, и все шары относительно ρ' являются открытыми множествами. В диссертации рассматриваются только такие пространства, где все шары – открытые множества, а мера μ регулярная.

Определение 1.3.2. *Пусть (X,ρ,μ) – некоторое пространство однородного типа. Семейство $\mathscr{D} = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}^j$ называется диадическим семейством с параметром $\delta\in(0,1)$ в пространстве X, если каждое $\mathscr{D}^j$ является семейством бореловых множеств $Q\subset X$, удовлетворяющее условиям:*

- *d1) для каждого $j\in\mathbb{Z}$ множества в $\mathscr{D}^j$ попарно не пересекаются и $X=\bigcup\limits_{Q\in\mathscr{D}^j} Q$;*
- *d2) если $Q\in\mathscr{D}^j$ и $i<j$, то существует множество $\tilde{Q}\in\mathscr{D}^i$ такое, что $Q\subset\tilde{Q}$;*
- *d3) существует натуральное число N такое, что для всех $j\in\mathbb{Z}$ и $Q\in\mathscr{D}^j$ справедливо неравенство $1\le \operatorname{card}\{Q'\in\mathscr{D}^{j+1} : Q'\subset Q\}\le N$;*
- *d4) существуют постоянные a_1 и a_2 такие, что для каждого $Q\in\mathscr{D}^j$, $j\in\mathbb{Z}$, существуют шары $B(x_1,r_1)$ и $B(x_2,r_2)$ такие, что*

$$B(x_1,r_1)\subset Q\subset B(x_2,r_2), \qquad r_1\ge a_1\delta^j, \quad r_2\le a_2\delta^j.$$

Пусть $\mathscr{D}$ – некоторое диадическое семейство с параметром δ в пространстве однородного типа X. Для $Q\in\mathscr{D}^j$, $j\in\mathbb{Z}$, обозначим

$$\mathscr{L}(Q) := \{Q'\in\mathscr{D}^{j+1} :\ Q'\subset Q\}.$$

Положим

$$\tilde{\mathscr{D}}^j := \{Q\in\mathscr{D}^j :\ \operatorname{card}(\mathscr{L}(Q))>1\}, \qquad \tilde{\mathscr{D}} := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathscr{D}}^j.$$

Мы будем предполагать, что в $\mathscr{D}$ не существуют одноточечные множества с положительной мерой. Это означает (см. также *d4)*), что для каждого $Q\in\mathscr{D}$ существует $n(Q)\in\mathbb{N}$ такое, что $Q\in\tilde{\mathscr{D}}^{n(Q)}$, т.е.

$$\mathscr{D}=\tilde{\mathscr{D}}. \tag{2}$$

Напомним определение системы типа Хаара (см. например [22]).

Определение 1.3.3 *Система простых, измеримых функций $\mathscr{H}=\{h\}$, определенных на X, называется системой типа Хаара ($\mathscr{H}$-системой), связанной с системой $\mathscr{D}$, если* *(h1)* *для каждого* $h \in \mathscr{H}$ *существуют единственное* $j = j(h) \in \mathbb{Z}$ *и множество* $Q = Q(h) \in \tilde{\mathscr{D}}^j$ *такие, что* $\{x \in X : \ h(x) \neq 0\} \subset Q$, *и это свойство не выполняется для множеств из* $\mathscr{D}^{j+1}$. *Более того, каждая функция* h *постоянна на каждом множестве* $Q' \in \mathscr{L}(Q(h))$;

(h2) *для каждого* $Q \in \tilde{\mathscr{D}}$ *существуют* $M_Q := \mathrm{card}(\mathscr{L}(Q)) - 1 \geq 1$ *функций* $h \in \mathscr{H}$, *удовлетворяющих (h1). Множество этих функций обозначим через* $\mathscr{H}(Q)$;

(h3) $\int_X h d\mu = 0$ *для каждого* $h \in \mathscr{H}$;

(h4) *если для каждого* $Q \in \tilde{\mathscr{D}}$ *обозначим через* V_Q *линейное пространство тех функций, определенных на* Q, *которые постоянны на каждом* $Q' \in \mathscr{L}(Q)$, *то система* $\left\{ \dfrac{\mathbb{1}_Q}{\sqrt{\mu(Q)}} \right\} \cup \mathscr{H}(Q)$ *является ортонормированным базисом в* V_Q, *где* $\mathbb{1}_Q$ – *характеристическая функция множества* Q.

Заметим, что система типа Хаара, связанная с данной системой $\mathscr{D}$, может быть не единственной.

Н.К. Бари было установлено, что любая п.в. конечная на $[0,1]$, измеримая функция представима рядом по системе Хаара, сходящимся к этой функции п.в. [1, с. 527]. Затем Ф.Г. Арутюняном [23] эта теорема была усилена и доказано, что для любой п.в. конечной на $[0,1]$, измеримой функции f существует абсолютно сходящийся п.в. на $[0,1]$ ряд по системе Хаара, такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } [0,1].$$

В работах [24]–[26] этот результат Арутюняна распространен на другие системы, содержащие в себе систему Хаара. В диссертации рассмотрен вопрос представления функций абсолютно сходящимися рядами по $\mathscr{H}$-системам и получен следующий аналог теоремы Арутюняна.

Теорема 1.3.4 ([7*]). *Пусть* (X, ρ, μ) – *некоторое пространство однородного типа,* $\mathscr{D}$ – *диадическое семейство с параметром* δ *в пространстве* X, *удовлетворяющее условию (2), а* $\mathscr{H} = \{h\}$ – *некоторая система типа Хаара, связанная с системой* $\mathscr{D}$. *Тогда для любой п.в. конечной на* X *измеримой функции* f *существует ряд* $\sum\limits_{h \in \mathscr{H}} a_h h$ *по системе* $\mathscr{H}$, *который п.в. абсолютно сходится и*

$$\sum_{h \in \mathscr{H}} a_h h(x) = f(x) \quad \textit{п.в. на } X.$$

Напомним определения системы Виленкина и обобщенной системы Харра. Пусть $\mathbf{P} := \{p_k\}$ – некоторая последовательность натуральных чисел, с условием $p_k \geq 2$. Положим $m_0 = 1$, $m_k = m_{k-1} p_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда любое неотрицательное целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \quad \text{где} \ \ n_k \in \{0, 1, \ldots, p_k - 1\}.$$

Любое число $x \in [0,1)$ тоже единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \quad \text{где} \quad x_k \in \{0, 1, \dots, p_k - 1\},\ k \in \mathbb{N},$$

и для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ имеет место $x_k \neq p_k - 1$.

Система Виленкина $\Psi := \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется по правилу

$$\Psi_0(x) \equiv 1 \quad \text{и} \quad \Psi_n(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x_k}{p_k}\right).$$

Эта система введена в 1947 году Н.Я. Виленкиным [27]. Когда $p_k = 2,\ k \in \mathbb{N}$, система Виленкина совпадает с системой Уолша.

Для натурального числа $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s - 1$, где $0 \le r \le m_k - 1,\ 1 \le s \le p_{k+1} - 1$, положим

$$\chi_n(x) := \chi_{r,s}^k(x) := \begin{cases} \sqrt{m_k} \exp\left(2\pi i \frac{x_{k+1}}{p_{k+1}} s\right), & \text{когда } x \in \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right), \\ 0, & \text{когда } x \notin \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right). \end{cases}$$

Полагая $\chi_0(x) \equiv 1$, получим обобщенную систему Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порожденную последовательностью натуральных чисел $p_k \ge 2$. При $p_k = 2,\ k \in \mathbb{N}$, эта система совпадает с классической системой Хаара.

Нетрудно заметить, что обобщенная система Хаара $\mathscr{H} = \{\chi_n(x)\}$, порожденная ограниченной последовательностью $\{p_k\}$, является $\mathscr{H}$-системой. Поэтому, из теоремы 1.3.4 следует следующая

Теорема 1.3.6 ([7*]). *Пусть $\mathscr{H} = \{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью $\{p_k\}$. Тогда для любой, п.в. конечной на $[0,1)$ измеримой функции f существует абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ такой, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \textit{п.в. на} \quad [0,1).$$

Много работ посвящены вопросам представленя функций пространства $L^p(0,1)$, $p \in (0,1)$, в смысле сходимости этого пространства. В работе [28] А.А. Талаляном был получен следующий результат: для каждой функции $f \in L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$, существует ряд по любой полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, сходящийся к f в метрике $L^p[0,1]$. Затем М.Г. Григоряном была доказана следующая теорема.

Теорема 1.4.A (М.Г. Григорян, [29]). *По произвольной полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r < +\infty \quad \textit{при всех} \ \ r > 2,$$

который универсален во всех пространствах $L^p[0,1]$, $0 < p \le 1$, одновременно относительно перестановок и подрядов в смысле сходимости пространства L^p.

Для системы Уолша справедлива следующая

Теорема 1.4.1 ([8*]). *Пусть последовательность положительных чисел* $\{a_n\}$ *монотонно стремится к нулю и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$. *Тогда существуют числа* $\gamma_n = \pm 1$ *такие, что для любого* $p \in (0,1)$ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ *является универсальным относительно подрядов в классе* $L^p(0,1)$ *в смысле сходимости пространства* $L^p(0,1)$.

Аналогичные вопросы для системы Хаара были рассмотрены в работе [9*]. Там доказана следующая теорема.

Теорема 1.4.2 ([9 *]). *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *такова, что для почти всех* $x \in [0,1]$ *выполняются условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) = \infty \quad \textit{и} \quad a_n \chi_n(x) \to 0.$$

Тогда для любого $p \in (0,1)$ *ряд по системе Хаара* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ *является универсальным относительно подрядов в классе* $L^p(0,1)$ *в смысле сходимости пространства* $L^p(0,1)$.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам "исправления" функции с целью улучшения ее свойств. Напомним, что эта идея принадлежит Н. Лузину (см. [30]). Им в 1912 г. был получен знаменитый результат (C-свойство Лузина), согласно которому любую измеримую, почти всюду конечную функцию, путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в непрерывную функцию.

Далее в этом направлении получены интересные результаты (см. [31]–[40]). В 1939 г. Д.Е. Меньшов [31] доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема 2.1.В (усиленное C-свойство Меньшова). *Пусть* $f(x)$ *– измеримая функция, конечная почти всюду на* $[0,2\pi]$. *Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *можно определить непрерывную функцию* $g(x)$, *совпадающую с* $f(x)$ *на некотором множестве* E, $\mathrm{mes}(E) > 2\pi - \varepsilon$, *и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $[0,2\pi]$.

Заметим, что в этих теоремах множество E зависит от функции f. Затем теоремы исправления развивались в разных направлениях: 1) возможность выбора "исключительного" множества E_0 (на котором "исправляется" функция f некоторого класса функций $\mathscr{F}$) независящим от f; 2) изменить функцию на множестве малой меры с целью улучшения свойств коэффициентов разложения новой функции (например, монотонность модулей всех или ненулевых коэффициентов).

В 1988 г. М.Г. Григорян доказал, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1-свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,2\pi]$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > 2\pi - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0,2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0,2\pi]$, совпадающую с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0,2\pi]$-норме (см. [36]).

Более того, в работе [38] доказано, что произвольная ортонормированная система обладает усиленным L^1-свойством.

Отметим, что существует функция $f \in L^1(0,1)$, ряд Фурье-Уолша которой не сходится в $L^1(0,1)$ (см., например, [9]). М.Г. Григоряном доказана следующая

Теорема 2.1.С (М.Г. Григорян, [41], [42]). *Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\operatorname{mes}(E) > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E, такую, что ее ряд Фурье–Уолша сходится по норме $L^1(0,1)$ и почти всюду на $[0,1]$, и все ненулевые члены в последовательности модулей коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша расположены в убывающем порядке.*

Для системы Фабера–Шаудера $\{\varphi_n(x)\}$ в [43] доказана следующая

Теорема 2.1.D (М.Г. Григорян, В.Г. Кротов, [43]). *Пусть $b_k \searrow 0$, с $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{b_k}{k} = \infty$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ и для любой измеримой, почти всюду конечной на $[0,1]$ функции $f(x)$ можно определить непрерывную функцию*

$$\tilde{f}(x) \overset{C}{=} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tilde{f})\varphi_k(x)$$

с мерой $\operatorname{mes}\{x : \ f(x) \neq \tilde{f}(x)\} < \varepsilon$ такую, что $|A_k(\tilde{f})| = b_k \quad \forall \ k \in Spec(\tilde{f})$.

В первом разделе второй главы рассматриваются ряды по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$, коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{3}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty. \tag{4}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1.1 ([8*]). *Пусть для последовательности $\{a_n\}$ выполняются (3) и (4). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \in [0,1]$, $\operatorname{mes}(E) > 1 - \varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существуют функция $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ и числа $\delta_n = 0$ или ± 1 такие, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in E$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ сходится к функции $\tilde{f}$ в метрике $L^1(0,1)$.*

Напомним определение жадного (greedy) алгоритма.

Пусть $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – базис в банаховом пространстве X. Для каждого $f \in X$ имеет место разложение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\psi_k.$$

Перестановку неотрицательных целых чисел $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *убывающей*, если

$$|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f, \Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f, \Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. Для каждого элемента $f \in X$

и для любой перестановки $\sigma \in D(f,\Psi)$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f,\Psi,\sigma)\}_{m=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$G_m(x,f) = G_m(x,f,\Psi,\sigma) := \sum_{k=0}^{m} c_{\sigma(k)}(f)\psi_{\sigma(k)}(x).$$

Заметим, что оператор $G_m(x,f)$ зависит от σ. Метод приближения элемента $f \in X$ последовательностью $\{G_m(f,\Psi,\sigma)\}_{m=0}^{\infty}$ называется *жадным алгоритмом*. Говорят, что жадный алгоритм функции f по системе Ψ *сходится* в X, если при некотором $\sigma \in D(f,\Psi)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \|G_m(f,\Psi,\sigma) - f\|_X = 0.$$

Жадные алгоритмы для банаховых пространств относительно нормированных базисов изучены В.Н. Темляковым, С.В. Конягиным, Р. ДеВором, П. Войтащиком, Т.В. Корнером и другими авторами (см. [44]–[56]).

Заметим, что из теоремы 2.1.1 непосредственно следует следующая

Теорема 2.1.2 ([8*]). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существует $\tilde f \in L^1(0,1)$, которая совпадает с f на E и жадный алгоритм которой по системе Уолша сходится к $\tilde f$ по норме $L^1(0,1)$.*

Отметим, что если $f \in L^1(0,1)$, то $G_m(f)$ не обязан сходиться (см. [57]). Поэтому в теореме 2.1.2 “исправление” функции f вне множества E по существу.

Аналогичные теоремы для системы Хаара были получены в работе [9*], где рассматривались ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, для которых почти всюду выполняются условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x) = +\infty \quad \text{и} \quad a_n\chi_n(x) \to 0. \tag{5}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1.3 ([9*]). *Пусть для почти всех $x \in [0,1]$ выполняется* (5). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существует $\tilde f \in L^1(0,1)$ такая, что $\tilde f(x) = f(x)$ для $x \in E$, а ряд Фурье–Хаара функции $\tilde f$ является подрядом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, т.е. существуют числа $\delta_n = 0$ или 1 такие, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n a_n\chi_n(x)$ сходится к функции $\tilde f$ в метрике $L^1(0,1)$.*

Известно (см. [58]), что если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ удовлетворяет первому условию (5). Если, кроме того $a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, когда $n \to \infty$, то выполняется и второе условие (5).

Из теоремы 2.1.3 в частности следующая теорема.

Теорема 2.1.4 ([9*]). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существует $\tilde f \in L^1(0,1)$, которая совпадает с f на E и жадный алгоритм которой по системе Хаара сходится в $L^1(0,1)$.*

Отметим, что если $f \in L^1(0,1)$, то $G_m(f)$ не обязан сходиться (см. [59]). Поэтому в теореме 2.1.4 "исправление" функции f вне множества E по существу.

Рассмотрим такие подсистемы $\{\chi_{n_k}(x)\}$ системы Хаара, для которых

$$\mathrm{mes}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\Delta_{n_k}\Big) = 1, \qquad \Delta_m := \mathrm{supp}(\chi_m). \tag{6}$$

Из теоремы 2.1.3, как следствие, получается также следующая теорема.

Теорема 2.1.5 ([9*]). *Для любой подсистемы* $\{\chi_{n_k}\}$ *системы Хаара с условием* (6) *существует ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\chi_{n_k}(x)$ *с* $a_k \downarrow 0$ *такой, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$, *такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *существует* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, *которая совпадает с* f *на* E *и ряд Фурье–Хаара имеет вид* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k a_{n_k}\chi_{n_k}(x)$, *где* $\delta_k = 0$ *или* 1.

Из этой теоремы, в частности, следует один результат М.Г. Григоряна и С.Л. Гогяна, доказанный в работе [60].

В связи с изучением сходимости жадного алгоритма вновь полученной, исправленной функции возник следующий вопрос, который представляет самостоятельный интерес.

Можно ли изменить значения любой функции $f(x)$ класса $L^p(0,1)$, $p \geq 1$, на множестве малой меры так, чтобы *все члены* в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по классическим системам (в частности по системам Уолша и Хаара и по тригонометрической системе) по модулю были бы расположены в убывающем порядке?

Ряд работ (см., например, [41]–[43], [60]–[62]) были посвящены теоремам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье вновь полученной функции (по системам Хаара, Уолша, Фабера–Шаудера) монотонно убывали. Отметим, что из доказательств результатов этих работ (а также теорем 2.1.C, 2.1.1 и 2.1.3) не ясно, можно ли исправленную функцию выбрать так, чтобы *все члены* в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по модулю были расположены в убывающем порядке. Оказывается, что для системы Уолша это возможно, т.е. исправляемую функцию $\tilde{f}(x)$ можно выбрать так, чтобы

$$|c_k(\tilde{f})| > |c_{k+1}(\tilde{f})|, \quad k = 0,1,2,\dots$$

Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.1 ([10*]). *Для любого* $0 < \varepsilon < 1$ *существуют измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$ *и функция* $g \in L^1(0,1)$ *с коэффициентами Фурье–Уолша*

$$0 < c_{k+1}(g) < c_k(g), \quad k = 0,1,2,\dots,$$

такие, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, *совпадающую с* f *на* E, *такую, что ряд Фурье–Уолша функции* $\tilde{f}(x)$ *сходится к ней по норме* $L^1(0,1)$ *и для всех членов последовательности коэффициентов Фурье–Уолша вновъ полученной функции имеет место*

$$|c_k(\tilde{f})| = c_k(g), \quad k = 0,1,2,\dots$$

Из этой теоремы следует

Теорема 2.2.2 ([10*]). *Для любого* $0 < \varepsilon < 1$ *существует функция* $g(x) \in L^1(0,1)$,

$$\mathrm{mes}\{x : g(x) \neq 0\} < \varepsilon,$$

такая, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ *можно найти числа* $\delta_k = \pm 1$, $k = 0, 1, \ldots$, *и функцию* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, *совпадающую с* f *на множестве* $E = \{x : g(x) = 0\}$, *такие, что жадный алгоритм функции* $\tilde{f}(x)$ *по системе Уолша* $\Phi = \{W_k(x)\}$ *сходится к ней по* $L^1(0,1)$*-норме и*

$$G_m(x, \tilde{f}, \Phi) = \sum_{k=0}^{m} \delta_k c_k(g) W_k(x) = S_m(x, \tilde{f}, \Phi) \ \forall x \in (0,1), \ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение 2.2.3. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– некоторое число. Будем говорить, что функция* $g \in L^1(0,1)$ *и измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$ *образуют универсальную пару* (g, E) *в* $L^1(E)$ *в смысле модификации относительно знаков коэффициентов Фурье по системе* $\{\varphi_k\}$, *если для каждой функции* $f \in L^1(E)$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, *совпадающую с* f *на* E, *ряд Фурье которой по системе* $\{\varphi_k\}$ *сходится к ней по* $L^1(0,1)$*-норме и*

$$|c_k(\tilde{f})| = |c_k(g)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Отметим, что теорему 2.2.1 можно пореформулировать в следующем форме.

Теорема 2.2.4 ([10*]). *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– некоторое число. Тогда существуют функция* $g \in L^1(0,1)$ *с коэффициентами Фурье–Уолша*

$$0 < c_{k+1}(g) < c_k(g), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и измеримое множество $E \subset [0,1]$ *с мерой* $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$, *которые образуют универсальную пару* (g, E) *в* $L^1(E)$ *в смысле модификации относительно знаков коэффициентов Фурье по системе Уолша.*

Плотностью подмножества B неотрицательных целых чисел называется величина

$$\rho(B) = \limsup_{n \to \infty} \frac{B_n}{n},$$

где B_n – число элементов из B, не превышающих n.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.5 ([11*]). *Для любого числа* $\varepsilon \in (0,1)$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ *вида* $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x)$, *совпадающую с* f *на* E, *такую, что*

1) все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции $\tilde{f}(x)$ *по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке;*

2) ряд Фурье–Уолша функции $\tilde{f}_2(x)$ *сходится к ней по норме* $L^1(0,1)$, *а ряд Фурье–Уолша функции* $\tilde{f}_1$ *абсолютно сходится к ней;*

3) плотность $Spec(\tilde f_1)$ равна 1 и

$$Spec(\tilde f_1)\cup Spec(\tilde f_2)=\mathbb{N}\cup\{0\},\quad Spec(\tilde f_1)\cap Spec(\tilde f_2)=\emptyset.$$

Отметим один результат М.Г. Григоряна, доказанный в работе [42].

Теорема 2.3.А (М.Г. Григорян, [42]). *Для любых $0<\varepsilon<1$, $p\ge 1$ и для каждой функции $f\in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde f\in L^p(0,1)$, $\mathrm{mes}\{x: f(x)\ne\tilde f(x)\}<\varepsilon$, чтобы все ненулевые члены в последовательности $\{|c_k(\tilde f)|\}$ были расположены в убывающем порядке (здесь $c_k(\tilde f)$ – коэффициенты Фурье исправленной функции $\tilde f(x)$ по системе Уолша).*

Получается следующее усиление теоремы 2.3.А.

Теорема 2.3.1 ([10*]). *Существует функция $g\in L^1(0,1)$ с коэффициентами Фурье–Уолша*

$$c_{k+1}(g)>c_k(g)>0,\quad k=0,1,2,\cdots,$$

такая, что для каждой функции $f\in L^p(0,1)$, $p\ge1$, и для любого $\varepsilon>0$ можно найти функцию $\tilde f\in L^p(0,1)$ с мерой $\mathrm{mes}\{x\in[0,1]:\ f(x)=\tilde f(x)\}>1-\varepsilon$, ряд Фурье которой по системе Уолша сходится к ней по $L^p(0,1)$-норме и

$$|c_k(\tilde f)|=c_k(g)\quad \textit{для всех } k\in Spec(\tilde f).$$

Функцию g (встречающуюся в фомулировке теоремы 2.3.1) будем назвать *универсальной функцией* в $L^p(0,1)$, $p\ge1$, в смысле модификации относительно знаков коэффициентов Фурье по системе Уолша.

Из теоремы 2.3.1 следует, что *для любых $0<\varepsilon<1$, $p>1$ и для каждой функции $f\in L^p(0,1)$ можно найти числа $\delta_k=\pm1,0$, $k=0,1,...$, и такую функцию $\tilde f\in L^p(0,1)$,* $\mathrm{mes}\{x:\ f(x)\ne\tilde f(x)\}<\varepsilon$, *что*

$$G_m(x,\tilde f,\Phi)=\sum_{k=0}^{m}\delta_k c_k(g)W_k(x)=S_m(x,\tilde f,\Phi),\quad \forall x\in(0,1),\quad \forall m=0,1,2,\dots,$$

где $\Phi=\{W_k\}$ – система Уолша. Следовательно, *жадный алгоритм функции $\tilde f$ по системе Уолша сходится к ней как по $L^p(0,1)$-норме, так и почти всюду на* $[0,1]$.

Отметим, что в работе [49] построены ортонормированная система $\Psi=\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных функций и непрерывная функция g такие, что если при некоторой функции $f\in L^p$, $p>2$, $\mathrm{mes}\{x\in[0,1]:\ f(x)=g(x)\}>0$, то ее жадный алгоритм $\{G_m(x,f,\Psi)\}$ по системе Ψ расходится в $L^p(0,1)$.

Возникает следующий вопрос, ответ на который нам не известен.

Можно ли в теореме 2.3.1 “исключительное” множество выбрать независящим от исправляемой функции $f(x)$?

В третьей главе рассматриваются теоремы единственности некототых ортогональных рядов. Известно, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, за исключением, быть может, некоторого счетного множества, то все коэффициенты ряда равны нулю.

Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортонормированная система. Напомним, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ называется нуль-рядом по этой системе, если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x) = 0$ почти всюду и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \neq 0$. Первый пример тригонометрического нуль-ряда был построен Д.Е. Мемньшовым в 1916 г. (см. [63] или [64, с. 804]). В работах разных авторов (см. [65]–[71]) был рассмотрен вопрос о том, с какой скоростью могут стремиться к нулю коэффициенты тригонометрических нуль-рядов. В работах [65], [68] и [69] доказана следующая теорема, которая дает положительный ответ на соответствующий вопрос, поставленный Ульяновым ([72]).

Теорема 3.1.A. *Пусть $c_n \downarrow 0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 = +\infty$. Тогда существует тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, который почти всюду сходится к нулю, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| > 0$ и $|a_n| \le c_{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Подобные вопросы для систем Хаара и Уолша были рассмотрены в работах [73]–[75]. В [66] Арутюняном отмечено, что для системы Уолша проблема Ульянова также решается положительно. Заметим, что это следует также из теоремы 1.1.4. Нуль-ряды по кратным системам Уолша были построены также в работах [2*]–[5*], где, в частности, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1.1 ([3*], [5*]). *Пусть последовательность положительных действительных чисел $\{c_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d}$ удовлетворяет следующим условиям: $0 < c_{\mathbf{m}} \le c_{\mathbf{n}}$ при $\mathbf{n} \le \mathbf{m}$ и ряд $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} c_{\mathbf{n}}^2$ расходится. Тогда существует кратный ряд $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}} W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, который почти всюду по прямоугольникам сходится к нулю, $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} |a_{\mathbf{n}}| > 0$ и $|a_{\mathbf{n}}| \le c_{\mathbf{n}}$ для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$.*

Рассмотрим следующую задачу. Пусть ортогональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ или некоторая подпоследовательность частичных сумм этого ряда сходится к некоторой функции $f(x)$. Как по $f(x)$ восстановить коэффициенты ряда? В случае сходимости почти всюду таких рядов может быть несколько, например нуль-ряды, отмеченные выше. Поэтому надо накладывать дополнительные условия на ряд, обеспечивающие его единственность. Если же единственность есть, то в общем случае коэффициенты не восстанавливаются по формулам Фурье, поскольку $f(x)$ может оказаться не интегрируемой по Лебегу. В этом случае можно попытаться вместо интеграла Лебега рассматривать его обобщения. Одним из наиболее часто применяемых обобщений интеграла Лебега является A-интеграл, определение которого приведено ниже. Впервые теоремы единственности для п.в. сходящихся тригонометрических рядов были рассмотрены в работах [76], [77]. В первом разделе третьей главы диссертации рассматриваются вопросы единственности для кратных рядов по системе Хаара.

Пусть $\{\chi_n(x)\}$ – классическая система Хаара. Для $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in [0,1]^d$ обозначим $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) := \chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\cdots\chi_{n_d}(x_d)$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\cdots\chi_{n_d}(x_d). \tag{7}$$

Для натурального числа N через $S_N(\mathbf{x})$ обозначим кубические частичные суммы ряда (7), т. е. $S_N(\mathbf{x}) := \sum\limits_{\mathbf{n}:\ n_i\le N} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$.

Для функции $\varphi(x)$ и положительного числа λ через $[\varphi(x)]_\lambda$ будем обозначать следующую функцию

$$[\varphi(x)]_\lambda = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } |\varphi(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{если } |\varphi(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В работе [78] Геворкяном была доказана следующая

Теорема 3.1.B (Г.Г. Геворкян [78]). *Пусть кубические частичные суммы $S_k(\mathbf{x})$ кратного ряда $\sum\limits_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ почти всюду сходятся к $f(\mathbf{x})$ и для некоторой последовательности $\lambda_m \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{m\to+\infty} \lambda_m \cdot \mathrm{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \quad \sup_k |S_k(\mathbf{x})| > \lambda_m\right\} = 0,$$

тогда для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})]_{\lambda_m^{\mathbf{n}}}\, d\mathbf{x},$$

где $\lambda_m^{\mathbf{n}} = \lambda_m \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty$.

Аналогичные вопросы для одномерного ряда по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара были рассмотрены в работах Костина [79], [80], а для рядов по системе Франклина – в работах Геворкяна [81] и [82].

Справедливо следующее усиление теоремы 3.1.B.

Теорема 3.1.2 ([12*]). *Пусть $\{q_j\}$ – некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\dfrac{q_{j+1}}{q_j}$ ограничено, последовательность кубических частичных сумм $S_{q_j}(\mathbf{x})$ ряда (7) почти всюду сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})$ при $j \to \infty$ и для некоторой последовательности $\{\lambda_m\}$, $\lambda_m \to \infty$,*

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \cdot \mathrm{mes}\big\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda_m\big\} = 0. \tag{8}$$

Тогда для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ выполняются

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} \big[f(\mathbf{x})\big]_{\lambda_m} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Напомним следующее определение.

Определение 3.1.3. *Функция $f(x)$ называется A-интегрируемой на множестве G, если $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes\{x \in G : \quad |f(x)| > \lambda\} = 0$ и существует предел*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_G [f(x)]_\lambda dx =: (A) \int_G f(x)dx,$$

которое называется A-интегралом функции f.

Определение 3.1.4. *Пусть $\{\varphi_n\}$ – некоторая ортонормированная система на $[0,1]$. Скажем, что ряд $\sum\limits_n a_n\varphi_n(x)$ является рядом Фурье A-интегрируемой функции, если существует такая A-интегрируемая функция f, определенная на $[0,1]$, что коэффициенты a_n определяются следующим образом:*

$$a_n = (A) \int_{[0,1]} f(x)\varphi_n(x) dx.$$

Из теоремы 3.1.2 немедленно следуют теоремы 3.1.5 и 3.1.6.

Теорема 3.1.5 ([12*]). *Пусть* $\{q_j\}$ *– некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение* $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ *ограничено, последовательность кубических частичных сумм* $S_{q_j}(\mathbf{x})$ *ряда* (7) *почти всюду сходится к некоторой п.в. конечной функции* $f(\mathbf{x})$ *и*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\left\{\mathbf{x}\in[0,1]^d: \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})|>\lambda\right\}=0.$$

Тогда все функции $f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$, *A-интегрируемы и*

$$a_{\mathbf{n}}=(A)\int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d.$$

Теорема 3.1.6 ([12*]). *Пусть* $\{q_j\}$ *– некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение* $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ *ограничено, последовательность кубических частичных сумм* $S_{q_j}(\mathbf{x})$ *ряда* (7) *почти всюду сходится к некоторой функции* $f(\mathbf{x})\in L^1[0,1]^d$ *и для некоторой последователности* $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k\nearrow\infty$,

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \cdot \mathrm{mes}\left\{\mathbf{x}\in[0,1]^d: \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})|>\lambda_k\right\}=0.$$

Тогда

$$a_{\mathbf{n}}=\int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n}\in\mathbb{N}^d.$$

Оказывается, в теоремах 3.1.2 – 3.2.6 ограниченность отношения $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ существенна. Действительно, верна следующая

Теорема 3.1.7 ([12*]). *Пусть* $\{q_n\}$ *– некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что* $\sup\limits_n \frac{q_{n+1}}{q_n}=+\infty$. *Тогда существует ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ *такой, что*

1) $a_1\neq 0, \qquad S_{q_n}(x)\to 0$ *п.в. при* $n\to\infty$;

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mathrm{mes}\left\{x\in[0,1]: \ \sup\limits_n |S_{q_n}(x)|>\lambda\right\}=0.$

Хорошо известно, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье интегрируемой функции, то, вообще говоря, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$, где $\varepsilon_n=\pm1$, может не сходиться в пространстве L^1. Известно, что (см. [9], [83] и [84]) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ безусловно сходится в L^1 тогда и только тогда, когда

$$P(x):=\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right\}^{1/2}\in L^1[0,1]$$

или

$$S^*(x):=\sup_N\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right|\in L^1[0,1].$$

В работе [78] доказано, что для рядов Хаара следующие условия эквивалентны:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot \mathrm{mes}\{x: \quad S^*(x)>\lambda\}=0, \tag{9}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot \mathrm{mes}\{x: \quad P(x)>\lambda\}=0.$$

Там же доказано, что если выполняется условие (9), то для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ является рядом Фурье некоторой A-интегрируемой функции.

В диссертации получено обратное утверждение.

Теорема 3.1.8 ([12*]). *Если для любой ограниченной последовательности* $\{\varepsilon_n\}$ *ряд по системе Хаара* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ *является рядом Фурье A-интегрируемой функции, то выполняется условие* (9).

Отметим, что (см. [78]) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ является рядом Фурье A-интегрируемой функции, то мажоранта частичных сумм этого ряда может не удовлетворять условию (9). Следовательно, существует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$, который является рядом Фурье A-интегрируемой функции, но при некоторых $\varepsilon_n = 0,1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ не является рядом Фурье A-интегрируемой функции.

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ являлся рядом Фурье A-интегрируемой функции.

Справедлива следующая

Теорема 3.1.9 ([12*]). *Для любой ограниченной последовательности* $\{\varepsilon_n\}$ *ряд по системе Хаара* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ *будет рядом Фурье A-интегрируемой функции тогда и только тогда, когда выполняется условие* (9).

Во втором разделе третьей главы рассматриваются вопросы единственности для рядов по системе Франклина. В настоящее время общая система Франклина активно исследуется многими авторами. Начнем с определения общей системы Франклина.

Определение 3.2.1. *Последовательность (разбиение)* $\mathcal{T}=\{t_n: n\geq 0\}$ *называется допустимой на* $[0,1]$, *если* $t_0=0$, $t_1=1$, $t_n\in(0,1)$, $n\geq 2$, $\mathcal{T}$ *всюду плотно в* $[0,1]$ *и каждая точка* $t\in(0,1)$ *встречается в* $\mathcal{T}$ *не более чем два раза.*

Пусть $\mathcal{T}=\{t_n: n\geq 0\}$ – допустимая последовательность. Для $n\geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n:=\{t_i:\ 0\leq i\leq n\}$. Допустим, π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n=\{\tau_i^n: \tau_i^n\leq \tau_{i+1}^n, 0\leq i\leq n-1\}$, $\pi_n=\mathcal{T}_n$. Тогда через $\mathcal{S}_n$ обозначим пространство функций, определенных на $[0,1]$, которые непрерывны слева, линейны на (τ_i^n,τ_{i+1}^n) и непрерывны в τ_i^n, если $\tau_{i-1}^n<\tau_i^n<\tau_{i+1}^n$. Ясно, что $\dim\mathcal{S}_n=n+1$ и $\mathcal{S}_{n-1}\subset\mathcal{S}_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f\in\mathcal{S}_n$, которая ортогональна $\mathcal{S}_{n-1}$ и $\|f\|_2=1$. Эту функцию называют n-ой функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Известно, что $f(t_n)\neq 0$. Следовательно, можно предполагать, что $f(t_n)>0$.

Определение 3.2.2. *Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \geq 0\}$, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$, определяется по правилу $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $x \in [0,1]$, и для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ есть n-ая функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.* При последовательности $t_n = \dfrac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$, $k = 0,1,2,\ldots$, получается классическая система Франклина, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином в работе [88]. Исследованию системы Франклина посвящены много работ. Систематическое исследование этой системы началось с работ [89] и [90].

Для рядов по классической системе Франклина доказана теорема единственности, в условиях которой присутствует одно необходимое условие на мажоранту частичных сумм ряда (см. [81], теорема 3).

Теорема 3.2.A (Геворкян Г.Г., [81]). *Для того чтобы ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$

был рядом Фурье–Франклина некоторой интегрируемой функции f, необходимо и достаточно, чтобы этот ряд п.в. сходился к $f(x)$ и

$$\liminf_{\lambda\to\infty}\left(\lambda\cdot\mathrm{mes}\left\{x\in[0,1]:\sup_N\left|\sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)\right|>\lambda\right\}\right)=0.$$

Аналогичная теорема для общей системы Франклина доказана М. П. Погосяном в работе [91]. В работах [82], [92]–[94] рассмотрены кратные ряды по системе Франклина.

Пусть d – некоторое натуральное число. Рассмотрим кратные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{10}$$

где $\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_k) \in \mathbb{N}_0^d$ – вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_d) \in [0,1]^d$ и $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1)\cdots f_{m_d}(x_d)$. В работах [92]–[94] для ряда (10) по классической системе Франклина введены обозначения

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}:m_i\leq 2^\nu} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad \sigma^*(\mathbf{x}) = \sup_\nu |\sigma_\nu(\mathbf{x})|,$$

и доказаны следующие тоеремы.

Теорема 3.2.B (Геворкян Г.Г., [92], [94]). *Для того чтобы кратный ряд* (10) *по классической системе Франклина был бы рядом Фурье–Франклина некоторой функции $f \in L([0,1]^d)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. *суммы $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ по мере сходились бы к f;*
2. $\liminf\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda\cdot\mathrm{mes}\left\{\mathbf{x}\in[0,1]^d:\sigma^*(\mathbf{x})>\lambda\right\}\right)=0.$

Теорема 3.2.C (Геворкян Г.Г., Погосян М.П., [93]). *Пусть суммы $\sigma_\nu(\boldsymbol{x})$ кратного ряда* (10) *по классической системе Франклина сходятся по мере к некоторой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_k \to \infty$ выполняется*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lambda_k\cdot\mathrm{mes}\left\{\mathbf{x}\in[0,1]^d:\sigma^*(\mathbf{x})>\lambda_k\right\}\right)=0.$$

Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ *имеет место* $a_{\mathbf{m}} = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

В диссертации доказывается аналогичная теорема для рядов по общей системе Франклина, порожденной парно регулярным разбиением отрезка $[0,1]$. При этом вместо частичных сумм $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ и функции $\sigma^*(\mathbf{x})$ приходится рассматривать всю последовательность квадратичных частичных сумм и мажоранту этой последовательности.

При исследовании свойств общей системы Франклина рассматриваются различные условия регулярности разбиения $\mathcal{T}$, введенные в работах [85]–[87] и [95].

Определение 3.2.3. *Допустимая последовательность* $\mathcal{T}$ *регулярная по парам (парно регулярна) с параметром* $\gamma > 1$, *если для каждого* $n \geq 2$ *и* $1 \leq i \leq n$ *имеет место*

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n}{\tau_i^n - \tau_{i-2}^n} \leq \gamma,$$

где $\tau_{-1}^n = \tau_0^n = 0$, $\tau_{n+1}^n = \tau_n^n = 1$.

В теоремах 3.2.4 и 3.2.5 полагается, что разбиение $\mathcal{T}$ регулярное по парам с параметром $\gamma > 1$ и $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ему общая система Франклина. Для ряда (10) введем обозначения

$$S_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}: m_i \leq n} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad S^*(\mathbf{x}) = \sup_n |S_n(\mathbf{x})|.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 3.2.4 ([14*]). *Пусть* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ *– общая система Франклина, соответствующая парно регулярному разбиению* $\mathcal{T}$ *с параметром* $\gamma > 1$. *Далее, пусть кубические частичные суммы* $S_n(\mathbf{x})$ *по мере сходятся к некоторой функции* f *и для некоторой последовательности* $\lambda_k \to \infty$ *выполняется*

$$\lim_{k\to+\infty} (\lambda_k \cdot \mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : S^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\}) = 0.$$

Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ *имеет место* $a_{\mathbf{m}} = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Из теоремы 3.2.4 следует

Теорема 3.2.5 ([14*]). *Пусть* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ *– общая система Франклина, соответствующая парно регулярному разбиению* $\mathcal{T}$ *с параметром* $\gamma > 1$. *Пусть кубические частичные суммы* $S_n(\mathbf{x})$ *по мере сходятся к некоторой функции* f *и выполняется условие*

$$\lim_{\lambda\to\infty} (\lambda \cdot \mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : S^*(\mathbf{x}) > \lambda\}) = 0,$$

тогда функция f *является* A*-интегрируемой и ряд* (10) *является рядом Фурье–Франклина в смысле* A*-интегрирования, т.е. для любого* $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ *имеет место*

$$a_{\mathbf{m}} = (A) \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Отметим, что аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана в работе [93]. Однако из теоремы 3.2.5 не следует результат работы [93], так как там вместо $S^*(\mathbf{x})$ рассматривается $\sigma^*(\mathbf{x})$.

Для классической системы Франклина в работах [13*] и [15*] доказаны теоремы, аналогичные теоремам 3.1.2–3.1.7 (теоремы 3.2.6–3.2.9).

Известно, что ряд Фурье интегрируемой на $[0,1]$ функции по системе Виленкина, а также по обобщенной системе Хаара может расходиться почти всюду (см. [96], [97]). В разделе 3.3 введен новый метод суммирования таких рядов и доказаны некоторые свойства этого метода. В частности доказана почти всюду суммируемость этим методом рядов Фурье интегрируемых функций. Затем с помощью этого метода суммирования доказаны теоремы единственности для этих систем.

Пусть $\mathbf{P} := \{p_k\}$ – некоторая последовательность натуральных чисел с условием $p_k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Систему Виленкина или обобщенную систему Хаара, построенную по последовательности $\mathbf{P}$, будем называть $\mathbf{P}$-системой и обозначим ее через $\{f_n\}$.

Положим $m_0 = 1$, $m_k = m_{k-1}p_k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{I}_k := \left\{ \left[\frac{j}{m_k}, \frac{j+1}{m_k}\right) : \quad j = 0, 1, \ldots, m_k - 1 \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Для интервала $J \in \mathcal{I}_k,\ k \in \mathbb{N}$, обозначим через $\tilde{J}$ тот интервал из $\mathcal{I}_{k-1}$, который содержит J и определим интервалы $(J)_l$, $l \in \mathbb{Z}$, и множества $(J)^q$, $q \in \mathbb{Z},\ 0 \leq q \leq \dfrac{p_k}{2}$, следующим образом:

1) $(J)_0 = J, \quad (J)_l \in \mathcal{I}_k, \quad (J)_l \subset \tilde{J}$;

2) правый конец интервала $(J)_l$ совпадает с левым концом интервала $(J)_{l+1}$, причем концы отрезка $\tilde{J}$ отождествляются, т.е. если правый конец интервала $(J)_l$ совпадает с правым концом $\tilde{J}$ и есть $\dfrac{j}{m_{k-1}}$, то левый конец интервала $(J)_{l+1}$ будет $\dfrac{j-1}{m_{k-1}}$.

а

$$(J)^q := \bigcup_{l=-q}^{q} (J)_l, \qquad (J)^0 = (J)_0 = J.$$

Для каждого натурального числа k и для каждого $x \in [0,1)$ обозначим через $I_{k,x}$ тот интервал из $\mathcal{I}_k$, который содержит точку x и положим

$$\varphi_{k,x}^{(q)}(t) := \begin{cases} \dfrac{m_k}{q}\left(1 - \dfrac{|l|}{q}\right), & \text{если} \quad t \in (I_{k,x})_l, \quad |l| < q, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin (I_{k,x})^{q-1}. \end{cases}$$

Из определения $\mathbf{P}$-системы имеем, что при любом $\varphi_{k,x}^{(q)}$

$$\left(f_n, \varphi_{k,x}^{(q)}\right) := \int_0^1 f_n(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt = 0, \quad \text{когда} \quad n \geq m_k.$$

Поэтому для любого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \tag{11}$$

и любого $x \in [0,1)$, при любых натуральных k и $q,\ 2q \leq p_k$, определены суммы

$$\sigma_{k,q}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 f_n(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt. \tag{12}$$

Нетрудно заметить, что формулами (12) определяется некоторый линейный метод суммирования, т.е.

1. $\sigma_{k,q}(x) = \sum_{n=0}^{m_k-1} \alpha_n^{k,q} a_n \Psi_n(x)$, когда $\{f_n(x)\} = \{\Psi_n(x)\}$;

2. $\sigma_{k,q}(x) = \sum_{n=0}^{m_k-1} \beta_n^{k,q} a_n \chi_n(x)$, когда $\{f_n(x)\} = \{\chi_n(x)\}$,

где числа $\alpha_n^{k,q}$ и $\beta_n^{k,q}$ не зависят от последовательности коэффициентов a_n. Заметим, что этот метод отличается от известных методов суммирования для рядов по **P**-системам (см. [98]).

Пусть $S_m(x) := \sum_{n=0}^{m} a_n f_n(x)$ – частичная сумма ряда (11). Положим

$$S^*(x) := \sup_m |S_m(x)|, \qquad \sigma^*(x) := \sup_{k,q} |\sigma_{k,q}(x)|.$$

Если ряд (11) является рядом Фурье некоторой интегрируемой функции f, то обозначим $\sigma_{k,q}(f,x) := \sigma_{k,q}(x)$ и

$$\mathcal{M}^*(f,x) := \sup_{\substack{k,q:\\ 1\le q\le p_k/2}} \frac{1}{\operatorname{mes}((I_{k,x})^q)} \int_{(I_{k,x})^q} |f(t)|dt.$$

Для рядов Фурье справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.3.2 ([17*]). *Для любого положительного числа λ и для любой функции $f \in L^1(0,1)$ выполняются неравенства:*

1) $\operatorname{mes}\{x \in [0,1) :\ \mathcal{M}^*(f,x) > \lambda\} \le \frac{3}{\lambda}\|f\|_1$;

2) $\operatorname{mes}\{x \in [0,1) :\ \sigma^*(f,x) > \lambda\} \le \frac{3}{\lambda}\|f\|_1$.

Теорема 3.3.3 ([17*]). *Для любой интегрируемой функции f выполняется*

$$\operatorname{mes}\{x \in [0,1) :\ \sigma^*(f,x) > \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \textit{при} \ \ \lambda \to +\infty.$$

Теорема 3.3.4 ([17*]). *Для каждой интегрируемой на $[0,1)$ функции f имеем*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{k,q}(f,x) = f(x) \quad \textit{для п.в.}\ x \in [0,1).$$

Оказывается, что метод суммирования, определенный выше, является регулярным. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.5 ([18*], [19*]). *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого ряда вида (11) (по **P**-системе) выполняется неравенство*

$$\sigma^*(x) \le CS^*(x) \quad \textit{для всех}\ \ x \in [0,1).$$

Более того, если ряд (11) в точке x сходится и $S(x)$ – сумма ряда в этой точке, то

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{k,q}(x) = S(x).$$

Применением описанного метода, доказываются теоремы единственности для рядов вида (11) по **P**-системам. В работах [79] и [80] рассматривались **P**-системы, порожденные ограниченной последовательностью $\{p_k\}$, и для рядов по таким системам, доказан следующий аналог теоремы 3.1.B.

Теорема 3.3.A (В.В. Костин, [79]) *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *– некоторая* **P**-*система, порожденная ограниченной последовательностью* $p_k,\ k \in \mathbb{N}$. *Тогда, если частичные суммы* $S_{m_k-1}(x)$ *ряда* (11) *почти всюду сходятся к некоторой функции* $f(x)$ *и для некоторой последовательности* $\lambda_p \uparrow +\infty$ *выполняется*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \cdot \operatorname{mes}\left\{x \in [0,1):\ \sup_k |S_{m_k-1}(x)| > \lambda_p\right\} = 0, \tag{13}$$

то для всех n *имеют место*

$$a_n = \lim_{p\to\infty} \int_0^1 [f(t)]_{\lambda_p} \overline{f_n(t)}dt. \tag{14}$$

В той же работе [79] приведен пример системы $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порожденной неограниченной последовательностью $p_k,\ k \in \mathbb{N}$, для которой теорема 3.3.A не верна.

Оказывается, что если в теореме 3.3.A в условии (13) мажоранту частичных сумм $S_{m_k-1}(x)$ заменить мажорантой всей последовательности частичных сумм $S^*(x)$, то формулы (14) верны для любой **P**-системы. Точнее, верна следующая

Теорема 3.3.6 ([18*], [19*]). *Если частичные суммы* $S_{m_k-1}(x)$ *ряда* (11) *по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции* f *и для некоторой последовательности* $\lambda_p \uparrow +\infty$ *выполняется*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \cdot \operatorname{mes}\{x \in [0,1):\ S^*(x) > \lambda_p\} = 0,$$

то для всех n *имеют место формулы* (14).

Теорема 3.3.6 следует из теоремы 3.3.5 и следующей, более общей, теоремы.

Теорема 3.3.7 ([18*], [19*]). *Если частичные суммы* $S_{m_k-1}(x)$ *ряда* (11) *по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции* f *и для некоторой последовательности* $\lambda_p \uparrow +\infty$ *выполняется*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \cdot \operatorname{mes}\{x \in [0,1):\ \sigma^*(x) > \lambda_p\} = 0, \tag{15}$$

то для всех n *имеют место формулы* (14). *В частности, если функция* f *интегрируема по Лебегу, то ряд* (11) *является рядом Фурье функции* f.

Из теоремы 3.3.7 следует

Теорема 3.3.8 ([18*], [19*]). *Если частичные суммы* $S_{m_k-1}(x)$ *ряда* (11) *по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции* f *и выполняется*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \operatorname{mes}\{x \in [0,1) : \sigma^*(x) > \lambda\} = 0, \tag{16}$$

то функция f является A-интегрируемой функцией, а ряд (11) *является рядом Фурье этой функции в смысле A-интегрирования.*

Заметим, что из теорем 3.3.3, 3.3.4 и 3.3.7 следует следующая теорема.

Теорема 3.3.9. *Для того чтобы ряд* (11) *являлся рядом Фурье интегрируемой функции f, необходимо и достаточно, чтобы суммы $S_{m_k-1}(t)$ по мере сходились к f и выполнялось* (16).

В последнем разделе диссертации рассматриваются вопросы единственности и восстановления коэффициентов кратных рядов по $\mathbf{P}$-системам. Отметим, что для тригонометрической системы в [99] Геворкяном доказано, что если кратный тригонометрический ряд п.в. методом Римана суммируется к интегрируемой функции f и удовлетворяет одному условию схожему с (15), то он является рядом Фурье функции f.

Пусть $\{f_n(x)\}$ – $\mathbf{P}$-система, порожденная последовательностью p_k, а d – некоторое натуральное число. Для каждого $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in [0,1)^d$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ и $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathbb{N}^d$ $(2q_i < p_{k_i},\ \ i = 1, 2, \ldots, d)$ обозначим

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) := f_{n_1}(x_1) f_{n_2}(x_2) \cdots f_{n_d}(x_d),$$

$$(f_{\mathbf{n}}, \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{x}}^{(\mathbf{q})}) := \prod_{i=1}^{d} (f_{n_i}, \varphi_{k_i,x_i}^{(q_i)}) = \prod_{i=1}^{d} \int_0^1 f_{n_i}(t_i) \varphi_{k_i,x_i}^{(q_i)}(t_i) dt_i$$

и рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}} f_{n_1}(x_1) f_{n_2}(x) \cdots f_{n_d}(x_d). \tag{17}$$

Для такого ряда положим

$$\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}} (f_{\mathbf{n}}, \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{x}}^{(\mathbf{q})}).$$

Теорема 3.4.1 ([20*], [21*]). *Если суммы $\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ ряда* (17) *почти всюду на* $[0,1)^d$ *сходятся к интегрируемой функции $f(\mathbf{x})$ при* $\min\{k_1, k_2, \ldots, k_d\} \to \infty$ *и*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\Big\{ \mathbf{x} \in [0,1)^d : \ \sup_{\mathbf{k},\mathbf{q}} |\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{x})| > \lambda \Big\} = 0,$$

то ряд (17) *является рядом Фурье функции f по системе $\{f_{\mathbf{n}}\}$, т.е.*

$$a_{\mathbf{n}} = \int_{[0,1)^d} f(\mathbf{x}) \overline{f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}.$$

Список литературы

[1] Лузин Н.Н., *Интеграл и тригонометрический ряд*, Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1951.

[2] Menchoff D.E., *Sur la representation des fonctions mesurables par des series trigonometriques*, Мат. сборник, 1941, т. 9(51), No 3, 667–692.

[3] Меньшов Д.Е., *О сходимости по мере тригонометрических рядов*, Тр. МИАН СССР, 1950, т. 32, 3–98.

[4] Конягин С.В., *О пределах неопределенности тригонометрических рядов*, Мат. заметки, 1988, т. 44, No 6, 770–784.

[5] Marcinkiewicz J., *Collected papers*, Warszawa, PWN, 1964.

[6] Талалян А.А., *Вопросы представления и единственности в теории ортогональных рядов*, Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал., 1970, 1971, 5–64.

[7] Талалян А.А., *Представление измеримых функций рядами*, Успехи мат. наук, 1960, т. 15, No 5, 77–141.

[8] Ульянов П.Л., *Представление функций рядами и классы* $\varphi(L)$, УМН, 1972, т. 27, No 2(164), 3–52.

[9] Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды,* Москва, АФЦ, 1999.

[10] Талалян А.А., Арутюнян Ф.Г., *О сходимости рядов по системе Хаара к* $+\infty$, Мат. сборник., 1965, т. 66(108), No 2, 240–247.

[11] Меньшов Д.Е., *Об универсальных тригонометрических рядах,* Докл. АН СССР, 1945, т. 49, 79–82.

[12] Меньшов Д.Е., *О частных суммах тригонометрических рядов*, Мат. сборник, 1947, т. 20(62), 197–237.

[13] Талалян А.А., *Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов*, Изв. АН СССР, Сер. матем. 1963, т. 27, No 3, 621–660.

[14] Мушегян Г.М., *Об универсальных рядах относительно перестановок*, Изв. АН Арм. ССР, 1977, т. 12, No 4, 278–302.

[15] Погосян Н.Б., *Представление измеримых функций ортогональными рядами*, Мат. сборник, 1975, т. 98(140), 102–112.

[16] Талалян А.А., Овсепян Р.И., *Теоремы Д.Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функций*, Успехи матем. наук, 1992, т. 47, No 5, 15–42.

[17] Тиман М.Ф.,Рубинштейн А.И., *О вложении классов функций, определенных на нульмерных группах*, Изв. ВУЗов, Математика,1980, No 8, 66–76.

[18] Moricz F., *On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1981, vol. 38, No 1–4, 183–189.

[19] Голубов Б.И., Ефимов А.Ф., Скворцов В.А., *Ряды и преобразования Уолша,* Москва, Наука, 1987.

[20] Погосян Н.Б., *Об универсальных рядах Фурье*, УМН, 1983, т. 38, No 1, 185 – 186.

[21] Macias R., Segovia C., *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type,* Adv. in Math. 1979, vol. 33, 271–309.

[22] Aimar H., Bernardis A., Nowak L., *Dyadic Fefferman–Stein Inequalities and the Equivalence of Haar Bases on Weighted Lebesgue Spaces*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Math. 2011, vol. 141, No. 1, 1–22.

[23] Арутюнян Ф.Г., *О рядах по системе Хаара,* Докл. АН АрмССР, 1966, т. 42, No 3, 134–140.

[24] Давтян Р. С., *О представлении функций ортогональными рядами, обладающими мартингальными свойствами*, Матем. заметки. 1976, т. 19, No 5, 673–680.

[25] Gevorkyan G. G., *On the Representation of Measurable Functions by Martingales* Analysis Math. 1982, vol. 8, No 4, 239–256.

[26] Gevorkyan G. G., *Representation of Measurable Functions by Absolutely Convergent Series of Translates and Dilates of One Function*, East J. Approx. 1996, vol. 2, No 4, 439–458.

[27] Виленкин Н. Я., *Об одном классе полных ортонормальных систем*, Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, т. 11, No 4, 363–400.

[28] Талалян А. А., *Представление функций классов* $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$, *ортогональными рядами*, Acta. Math., Scientiarum Hungaricae Tomus, 1970, т. 21, No 1–2, 1–9.

[29] Григорян М. Г., *Об ортогональных рядах, универсальных в* $L^p[0,1]$, $p > 0$, Изв. НАН Армении, Матем., 2002, т. 37, No 2, 3–18.

[30] Лузин Н. Н., *К основной теореме интегрального исчисления,* Мат. сборник, 1912, т. 28, No 2, 266–294.

[31] Меньшов Д. Е., *О равномерной сходимости рядов Фурье*, Мат. сборник, 1942, т. 11(53), No 1-2, 67–96.

[32] Осколков К. И., *Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры,* ДАН СССР, 1976, т. 228, No 2, 304–306.

[33] Кашин Б. С., Кошелева Г.Г., *Об одном подходе к теоремам об исправлении,* Вестник МГУ, Сер. мат. мех., 1988, т. 1, No 4, 6–8.

[34] Price J.J., *Walsh series and adjustment of functions on small sets,* Illinois J. Math., 1969, vol. 13, 131–136.

[35] Хеладзе Ш. В., *Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики* L^1, Мат. сборник, 1978, т. 107, No 2, 245–258.

[36] Grigorian M. G., *On the convergence of Fourier series in the metric of* L^1. Analysis Math., 1991, vol. 17, No 3, 211–237.

[37] Гоголадзе Л. Д., Зерекидзе Т. Ш., *О сопряженных функциях нескольких переменных,* Сообщ. АН Груз. ССР, 1979, т. 94, No 3, 541–544.

[38] Григорян М. Г., *Об усиленном* L^p_μ *свойстве,* Матем. сборник, 2003, т. 194, No 10, 77–106.

[39] Кисляков С. В., *Количественный аспект теории об исправлении,* Иссл. по линейным операторам и теории функций. Записки научных семинаров ЛОМИ, 1979, т. 92, 182–191.

[40] Олевский А. М., *Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана,* ДАН СССР, 1978, т. 238, No 4, 796–799.

[41] Григорян М. Г., *Об усиленном* L^1*-greedy свойстве системы Уолша*, Изв. ВУЗ-ов, 2008, No 5, 26–37.

[42] Григорян М. Г., *Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация,* Математический сборник, 2012, т. 203, No 3, 49–78.

[43] Григорян М. Г., Кротов В. Г., *Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложения Фурье по системе Фабера-Шаудера*, Мат. заметки, 2013, т. 93, No 2, 172–178.

[44] Temlyakov V. N., *Nonlinear Methods of Approximation,* Found. Comput. Math., 2003, vol. 3, No 1, 33–107.

[45] DeVore R. A., Temlyakov V. N., *Some remarks on greedy algorithms,* Advances in Computational Math. 1996, vol. 5, No 1, 173–187.

[46] Konyagin S. V., Temlyakov V.N., *A remark on Greedy approximation in Banach spaces,* East Journal on Approximations, 1999, vol. 5, No 1, 1–15.

[47] Wojtaszczyk P., *Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems,* Journal of Approximation Theory, 2000, vol. 107, No 2, 293–314.

[48] Körner T. W., *Decreasing rearranged Fourier series,* J. Fourier Analysis and Applications, 1999, vol. 5, No 1, 1–19.

[49] Grigorian M. G., Kazarian K.S., Soria F., *Mean convergence of orthonormal Fourier series of modified functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 2000, vol. 352, No 8, 3777–3799.

[50] Геворкян Г. Г., Камонт А., *Два замечания о квази-гриди базисах в пространстве L^1,* Изв. НАН Армении, Матем., 2005, т. 40, No 1, 5–17.

[51] Лившиц Е. Д., *Об оптимальности жадного алгоритма для некоторых классов функций,* Мат. сборник, 2007, т. 198, No 5, 95–114.

[52] Gogyan S. L., *Greedy algorithm with regard to Haar subsystems,* East J. on Approx., 2005, vol. 11, No 2, 221–236.

[53] Grigorian M. G., Zink R. E., *Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system,* Proc. of the Amer. Mat. Soc., 2006, vol. 134, No 12, 3495–3505.

[54] Григорян М. Г., Саргсян А. А., *Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера,* Мат. сборник, 2008, т. 199, No 5, 3–26.

[55] Сильниченко А. В., *О скорости сходимости жадных алгоритмов,* Матем. заметки, 2004, т. 76, No 4, 628–632.

[56] Амирханян Г. М., *О сходимости гриди алгоритма по ситеме Уолша в пространстве L^p,* Изв. НАН Армении, Матем., 2008, т. 43, No 3, 3–12.

[57] Episkoposian S. A., *On the divergense of greedy algorithms with respect to Waish subsystems in L.* Nonlinear Analysis, 2007, vol. 66, 1782–1787.

[58] Ульянов П. Л., *О рядах по системе Хаара,* Матем. сборник, 1964, т. 63, No 3, 356–391.

[59] Wojtaszczyk P., *Greedy Type Bases in Banach Spaces,* Constructive Theory of Functions, DARBA, Sofia, 2003, 136–155.

[60] Григорян М. Г., Гогян С. Л., *О переставленных рядах по системе Хаара,* Изв. НАН Армении, Матем., 2007, т. 42, No 2, 44–64.

[61] Grigoryan M. G., Gogyan S. L., *On nonlinear approximation with respect to the Haar system and modifications of functions*, Analysis Mathematica, 2006, vol. 32, No 1, 49–80.

[62] Grigorian M. G., *On the Fourier-Walsh coefficients,* Real Analysis Exchange, 2010, vol. 35, No 1, 157–166.

[63] Menchoff D. E., *Sur l'unicite du developpement trigonometrique* C. R. Acad. Sci. (Paris). 1916, vol. 163, 433–436.

[64] Бари Н. К., *Тригонометрические ряды*, Москва.: Физматгиз, 1961.

[65] Арутюнян Ф. Г., *Представление функций из L^p, $0 < p < 1$, тригонометрическими рядами с быстро убывающими коэффициентами*, Изв. АН Арм.ССР, матем., 1984, т. 19, No 6, 448–466.

[66] Арутюнян Ф. Г., *Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами*, Докт. дисс., Тбилиси, 1986.

[67] Ивашев-Мусатов О. С., *О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, т. 21, No 4, 559–578.

[68] Körner T. W., *Uniqueness for trigonometric series*, Annals of Mathematics, 1987, vol. 126, No 1, 1–34.

[69] Погосян Н. Б., *О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов*, Anal. Math. 1985, vol. 11, 139–177.

[70] Salem R., *On singular monotonic functions of Cantor type*, J. Math. Phys., 1942, vol. 21, 69–82.

[71] Gevorkian G.G., *On coefficients of null-series and on sets of uniqueness of trigonometric and Walsh systems,* Anal. Math., 1988, vol. 14, 219–251.

[72] Ульянов П. Л., *Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов*, Успехи мат. наук, 1964, т. 19, No 1, 3–69.

[73] Скворцов В. А., *Об одном примере нуль-ряда по системе Уолша*, Матем. заметки, 1976, т. 19, No 2, 179–186.

[74] Скворцов В. А., *О h-мере M-множеств для системы Уолша*, Матем. заметки, 1977, т. 21, No 3, 335–340.

[75] Скворцов В. А., *О скорости стремления к нулю коэффициентов нуль-рядов по системам Хаара и Уолша*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977, т. 41, No 3, 703–716.

[76] Александров А. Б., *Об А-интегрируемости граничных значеный гармонических функций*, Мат. заметки, 1981, т. 30, No. 1, 59–72.

[77] Геворкян Г. Г., *О единственности тригонометрических рядов*, Мат. сборник, 1989, т. 180, No 11, 1462–1474.

[78] Геворкян Г. Г., *О единственности аддитивных функций двоичных кубов и рядов по системе Хаара*, Изв. НАН Армении, сер. мат., 1995, т. 30, No 5, 7–21.

[79] Костин В. В., *К вопросу о восстановлении коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций*, Мат. заметки, 2003, т. 73, No 5, 704–723.

[80] Костин В. В., *Обобщение теоремы Л.А.Балашова о подрядах ряда Фурье–Хаара*, Мат. заметки, 2004, т. 76, No 5, 740–747.

[81] Геворкян Г. Г., *О единственности рядов по системе Франклина*, Мат. заметки, 1989, т. 46, No 2, 51–58.

[82] Геворкян Г. Г., *Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина*, Мат. заметки, 1996, т. 59, No 4, 521–545.

[83] Burkholder D. L., Gundy R. F., *Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales*, Acta Math., 1970, vol. 124, 249–304.

[84] Davis B., *On the integrability of the martingale square function*, Israel J. Math., 1970, vol. 8, 187–190.

[85] Gevorkyan G. G., Kamont A., *On general Franklin systems*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), 1998, vol. 374, 1 – 59.

[86] Gevorkyan G. G., Kamont A., *Unconditionality of general Franklin system in* $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$, Studia Math., 2004, vol. 164, No 2, 161–204.

[87] Gevorkyan G. G., Kamont A., *General Franklin system as bases in* $H^1[0,1]$, Studia Math., 2005, vol. 167, No 3, 259–292.

[88] Franklin Ph., *A set of continuous orthogonal functions*, Math. Annalen, 1928, vol. 100, 522–529.

[89] Ciesielski Z., *Properties of the orthonormal Franklin system*, Studia Math., 1963, vol. 23, 141 – 157.

[90] Ciesielski Z., *Properties of the orthonormal Franklin system II*, Studia Math., 1966, vol. 27, 289 – 323.

[91] Погосян М. П., *О единственности рядов по общей системе Франклина*, Изв. НАН Армении, сер. матем., 2000, т. 35, No 4, 75 – 81.

[92] Геворкян Г. Г., *Теоремы единственности для рядов по системе Франклина*, Мат. заметки, 2015, т. 98, No 5, 786 – 789.

[93] Геворкян Г. Г., Погосян М. П., *О восстановлении коэффициентов ряда Франклина с "хорошей" мажорантой частичных сумм*, Изв. НАН Армении, сер. матем., 2017, т. 52, No 5, 25 – 35.

[94] Геворкян Г. Г., *Теорема единственности для кратных рядов Франклина*, Мат. заметки, 2017, т. 101, No 2, 199 – 210.

[95] Gevorkyan G. G., Kamont A., *On the trigonometric conjugate to the general Franklin system*, Studia Math., 2009, v. 193, No 3, 203 – 239.

[96] Хеладзе Ш. В., *О расходимости всюду рядов Фурье–Уолша.* Сообщ. АН Груз. ССР, 1975, т. 77, No 2, 305–307.

[97] Хеладзе Ш. В., *О расходимости всюду рядов Фурье по ограниченным системам Виленкина.* Труды Тбил. матем. инст. АН Груз. ССР, 1978, т. 58, 225–242.

[98] Weisz F., *Summation of Fourier series*, Acta Math. Acad. Paedagag. Nyhazi., 2004, vol. 20, 239–266.

[99] Геворкян Г. Г., *О единственности кратных тригонометрических рядов*, Матем. сборник, 1993, т. 184, No 11, 93–130.

Работы автора по теме диссертации

[1*] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А., *О рядах Уолша с монотонными коэффициентами*, Изв. РАН., сер. матем., 1999, т. 63, No 1, 41–60.

[2*] Навасардян К. А., *О коэффициентах нуль-рядов и множествах единственности для двойных рядов Уолша*, Докл. НАН Армении, 1993, т. 94, No 4, 206–209.

[3*] Навасардян К. А., *О нуль-рядах по двойной системе Уолша*, Изв. НАН Армении, Математика, 1994, т. 29, No 1, 59–78.

[4*] Навасардян К. А., *Об универсальных рядах по двойной системе Уолша с быстро убывающими коэффициентами*, Докл. НАН Армении, 1995, т. 95, No 4, 220–223.

[5*] Навасардян К. А., *Универсальные ряды по кратной системе Уолша*, Изв. НАН Армении, Математика, 1995, т. 30, No 5, 22–40.

[6*] Навасардян К. А., *Универсальные ряды по системе Уолша*, Изв. НАН Армении, Математика, 2002, т. 37, No 4, 45–62.

[7*] Навасардян К. А., *О представлении функций абсолютно сходящимися рядами по $\mathscr{H}$-системам*, Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика, Механика, Информатика. 2018, т. 18, No 1, 49–61.

[8*] Навасардян К. А., *О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами*, Изв. НАН Армении, Математика, 2007, т. 42, No 5, 51–64.

[9*] Навасардян К. А., Степанян А. А., *О рядах по системе Хаара*, Изв. НАН Армении. Математика, 2007, т. 42, No 4, 53–66.

[10*] Григорян М. Г., Навасардян К. А., *Универсальные функции в задачах "исправления", обеспечивающего сходимость рядов Фурье–Уолша*, Изв. РАН., Сер. матем., 2016, т. 80, No 6, 65–91.

[11*] Григорян М. Г., Навасардян К. А., *О поведении коэффициентов Фурье по системе Уолша*, Изв. НАН Армении, Математика, 2016, т. 51, No 1, 3–20.

[12*] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А., *О рядах Хаара А-интегрируемых функций*, Изв. НАН Армении, Математика, 2017, т. 52, No 3, 30–45.

[13*] Navasardyan K. A., *Uniqueness theorems for multiple Franklin series*, Proceedings of YSU, Math., 2017, vol. 51, No 3, 241–249.

[14*] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А., *О единственности рядов по общей системе Франклина*, Изв. НАН Армении, Математика, 2018, т. 53, No 4, 3–14.

[15*] Navasardyan K. A., *On a uniqueness theorem for the Franklin system*, Proceedings of YSU, Math., 2018, vol. 52, No 2, 93–100.

[16*] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А., *Об одном методе суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара*, Док. НАН Армении, Математика, 2017, т. 117, No 1, 20–25.

[17*] Gevorkyan G. G., Navasardyan K. A., *On a summation method for Vilenkin and generalized Haar systems*, Proceedings of YSU, Math., 2017, vol. 51, No 1, 13–17.

[18*] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А., *Теоремы единственности для обобщенной системы Хаара*, Матем. заметки, 2018, т. 104, No 1, 11–24.

[19*] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А., *Теоремы единственности для системы Виленкина*, Изв. НАН Армении, Математика, 2018, т. 53, No 2, 15–30.

[20*] Навасардян К. А., *Теоремы единственности для кратных рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара*, Док. НАН Армении, Математика, 2017, т. 117, No 4, 292–296.

[21*] Navasardyan K. A., *Uniqueness Theorems for Multiple Series by Vilenkin and Generalized Haar Systems*, Armenian Journal of Mathematics, 2018, vol. 10, No 6, 1–15.

Тезисы

[22*] Gevorkian G. G., Navasardyan K. A., *On Walsh Series with Monotone Coefficients*, Harmonic Analysis and approximations, 18–25 September, 1998, Nor Amberd, Armenia.

[23*] Navasardyan K., *On Series With Monotone Coefficients by Walsh System*, Harmonic Analysis and approximations, IV, 19–26 September, 2008, Tsaghkadzor, Armenia.

[24*] Navasardyan K., Grigoryan M., *Universal functions in a sense of modification with respect to Fourier coefficients*, Harmonic Analysis and approximations, VI, 12–18 September, 2015, Tsaghkadzor, Armenia.

[25*] Navasardyan K., *Uniqueness theorems for Vilenkin and generalized Haar systems*, Harmonic Analysis and approximations, VII, 16–22 September, 2018, Tsaghkadzor, Armenia.

[26*] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А., *О рядах Хаара A-интегрируемых функций*, Armenian Math. Union, Annual Session, Dedicated to the 110th Anniversary of A. Shahinyan, 30 May – 01 June, 2016.

[27*] Navasardyan K. A., *Universal series by Walsh system with monotone coefficients*, Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января – 3 февраля, 2004.

Ամփոփում

Ատենախոսությունում հետազոտվում են որոշ դասական համակարգերով զուգամիտության և միակության հարցեր:

Տարբեր օրթոգոնալ համակարգերով ֆունկցիաների ներկայացման հարցեր սկսվել են քննարկվել դեռևս նախորդ դարի սկզբներից և մինչ այժմ ակտիվորեն ուսումնասիրվում են տարբեր գիտական կենտրոններում: Առաջին գլխում դիտարկված են ըստ Ուոլշի համակարգի մոնոտոն գործակիցներով շարքեր և ապացուցված է, որ կամայական այդպիսի շարքի գործակիցները եթե չեն պատկանում l_2-ին, ապա այդ շարքի անդամները որոշակի նշաններով (±1-ով) բազմապատկելով կարելի է ստանալ ենթաշարքերի նկատմամբ ունիվերսալ շարք համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիաների դասում: Ապացուցված է նաև, որ այդ եղանակով կարելի է ստանալ շարք, որը ունիվերսալ է ենթաշարքերի նկատմամբ բոլոր L_p, $p \in (0,1)$, տարածություններում այդ տարածության զուգամիտության իմաստով:

Ապացուցված է, որ գոյություն ունի մոնոտոն գործակիցներով Ուոլշի շարք, որը ունիվերսալ է նշանների նկատմամբ, իսկ գործակիցները գտնվում են նախապես տրված մինորանտից վերև:

Դիտարկված են նաև Հաարի տիպի համակարգեր և ապացուցված է, որ համարյա ամենուրեք վերջավոր կամայական չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի ըստ այդ համակարգի բացարձակ զուգամետ շարք, որի գումարը տրված ֆունկցիան է:

Երկրորդ գլուխը նվիրված է «ուղղման» հարցերին. այն է, փոխելով ֆունկցիան փոքր չափի բազմության վրա, ստանալ ավելի «լավ» հատկություններով օժտված ֆունկցիա: Ապացուցված է, որ մոնոտոն և l_2-ին չպատկանող գործակիցներով ըստ Ուոլշի համակարգի կամայական շարքի համար գոյություն ունի ինչքան ասես փոքր դրական չափի բազմություն այնպես, որ յուրաքանչյուր ինտեգրելի ֆունկցիա այդ բազմության վրա փոխելով, կարելի է ստանալ նոր ինտեգրելի ֆունկցիա, որի Ֆուրիե-Ուոլշի շարքը զուգամետ է $L_1(0,1)$-ում, իսկ Ֆուրիե-Ուոլշի ոչ զրոյական գործակիցների մոդուլները համընկնում են տրված շարքի համապատասխան գործակիցների հետ:

Ապացուցված է նաև, որ գոյություն ունի ինչքան ասես փոքր դրական չափի բազմություն և Ֆուրիե-Ուոլշի մոնոտոն գործակիցներով ինտեգրելի g ֆունկցիա այնպես, որ կամայական ինտեգրելի ֆունկցիա, փոխելով այդ բազմության վրա, կարելի է ստանալ նոր ֆունկցիա, որի Ֆուրիե-Ուոլշի շարքը L_1-նորմով զուգամիտում է ստացված ֆունկցիային, իսկ Ֆուրիե-Ուոլշի բոլոր գործակիցների մոդուլները համընկնում են g-ի համապատասխան գործակիցների հետ (հետևաբար բոլոր գործակիցների մոդուլներից կազմված հաջորդականությունը մոնոտոն նվազող է):

Ստացված են նաև «ուղղման» թեորեմներ $L_p,\ p \geq 1$, տարածությունների համար:

Երրորդ գլխում ստացվել են միակությանը վերաբերվող արդյունքներ: Ստացվել է այնպիսի պայման, որ եթե Հաարի կամ Ֆրանկլինի դասական համակարգով բազմապատիկ շարքի որոշակի համարներով քառակուսային մասնակի գումարները բավարարում են այդ պայմանին և ըստ չափի զուգամիտում են ինչ որ f ֆունկցիայի, ապա այդ շարքի գործակիցները հնարավոր է վերականգնել f-ի միջոցով:

Դիտարկվել են նաև զույգերով ռեգուլյար տրոհմանը համապատասխանող Ֆրանկլինի ընդհանուր համակարգերով բազմապատիկ շարքեր, որոնց քառակուսային մասնակի գումարները ըստ չափի զուգամիտում են ինչ որ ֆունկցիայի, իսկ այդ գումարների մաժորանտը բավարարում է անհրաժեշտ պայմանի: Ստացվել են գործակիցների վերականգնման բանաձևեր:

Վիլենկինի և ընդհանրացված Հաարի համակարգերի համար ներմուծվել է մի նոր գծային գումարման մեթոդ և ապացուցվել է, որ այն ռեգուլյար է: Այդ մեթոդի օգնությամբ ապացուցվել են միակության թեորեմներ և ստացվել գործակիցների վերականգնման բանաձևեր:

Ստացվել է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում Վիլենկինի կամ ընդհանրացված Հաարի համակարգով շարքը կլինի ինչ որ ինտեգրելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք:

Resume

In the thesis we study various problems of convergence and uniqueness for some classical orthogonal systems.

Investigations of representation problems of functions by different orthogonal systems were initiated since the beginning of the last century, and they are actively studied in different scientific centers so far. In Chapter 1 of the thesis series by the Walsh system with monotonic coefficients are considered. It is proved that for any such series, whose coefficients do not belong to l_2, by taking the terms of this series with some signs (multiplying by ± 1) one obtains a new series which is universal with respect to the subseries in the class of almost everywhere finite measurable functions. It is also proved, that in the same manner one can obtain a series, which is universal with respect to the subseries in all spaces $L_p,\ p \in (0,1)$, in the sense of convergence in L_p space.

Then the existence of a series by the Walsh system with decreasing coefficients is shown, which is universal with respect to the signs, and the coefficients are located above than a pregiven decreasing minorant.

Next the Haar type systems are considered and it is proved that for any almost everywhere finite measurable function there exists an absolutely convergent series by this system, whose sum is the given function.

The second chapter is devoted to the "correction" problems, i.e., by changing a function on a set with small measure, obtain a new function with "better" properties. It is proved that for any series by the Walsh system, whose coefficients are monotonically decreasing and do not belong to l_2, there exists a set with measure less than any pregiven any positive number, such that from each integrable function by correcting on this set, one can obtain a new integrable function, whose Fourier-Walsh series is convergent in $L_1(0,1)$, and the absolute values of the non-zero Fourier-Walsh coefficients coincide with the corresponding coefficients of the given series.

It is also proved, that there exists a set with the measure less than any pregiven positive number and an integrable function g with monotonically decreasing Fourier-Walsh coefficients, such that from each integrable function, by correcting on this set, one can obtain a new integrable function, whose Fourier-Walsh series is convergent to the obtained function in $L_1(0,1)$, and the absolute values of all Fourier-Walsh coefficients coincide with the corresponding coefficients of g (therefore the sequence of absolute values of all coefficients is monotonically decreasing).

"Correction" theorems for the space $L_p(0,1),\ p \geq 1$, are also obtained.

The third chapter is devoted to the uniqueness theorems. A condition is obtained, such that if a certain subsequence of the square partial sums of a multiple series by the Haar or classical Franklin systems satisfies the mentioned condition and converges in measure to some function f, then the coefficients of that series can be recovered by using f.

Then multiple series by the general Franklin system, corresponding to a regular by pairs partition of the segment [0,1], are considered. If the sequence of the square partial sums converges in measure to certain function and the majorant of these sums satisfies some necessary condition, then the recovery formulas for the coefficients are obtained.

A new linear method of summation for series by the Vilenkin and generalized Haar systems is defined and the regularity of this method is proved. Some uniqueness theorems and recovery formulas for the coefficients are obtained, by using this method.

At the end a necessary and sufficient condition for the series by the Vilenkin or generalized Haar system to be the Fourier series of some integrable function is obtained.