ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Սուրեն Կապուշի Պողոսյան

Քվանտային համակարգերի Գիբսյան բաշխումներ. կլաստերային վերլուծություններ և վիճակագրական գումարի ասիմպտոտիկան

Ա.01.05– "Հավանականությունների տեսություն և մաթեմատիկական վիճակագրություն" մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2012

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Погосян Сурен Капушович

Гиббсовские распределения квантовых систем: кластерные разложения и асимптотика статистической суммы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.05 – "Теория вероятностей и математическая статистика"

Ереван 2012

© National Library of Armenia OCR by Portmind

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Մաթեմատիկայի ինստիտուտում:

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, ակադեմիկոս Ռ. Վ. Համբարձումյան
	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Կ. Ա. Բոլդրիգինի, Իտալիա
	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Վ. Ա. Զագրեբնով, Ֆրանսիա
Առաջատար կազմակերպություն՝	Պոտսդամի համալսարանի մաթեմատիկայի ինստիտուտ, Գերմանիա

Պաշտպանությունը կկայանա 2012թթ. նոյեմբերի 30–ին ժ. 15^{00}–ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ–ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2012թ. հոկտեմբերի 29–ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր, դոցենտ Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Институте Математики Национальной Академии Наук Армении.

Официальные оппоненты:	доктор физ–мат. наук, академик Р. В. Амбарцумян
	доктор физ–мат. наук, профессор К. А. Болдригини, Италия
	доктор физ–мат. наук, профессор В. А. Загребнов, Франция
Ведущая организация:	Институт математики Университета Потсдам, Германия

Защита диссертации состоится 30 ноября 2012г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК-а 050 при Ереванском государственном университете (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.
Автореферат разослан 29–го октября 2012г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ–мат. наук, доцент Т. Н. Арутюнян

© National Library of Armenia

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория гиббсовских случайных полей, как ветвь теории вероятностей , возникла в 1960-х годах, благодаря работам Добрушина [14, 15, 16, 17], Ланфорда и Рюэля[31], Минлоса [36, 37], Минлоса и Синая [38, 39, 40, 41], в которых они определили гиббсовские случайные поля как специальные вероятностные меры на пространстве бесконечных конфигураций. Это позволило создать математический фундамент задач статистической физики, в рамках которого удалось получить строгое описание феномена фазовых переходов в равновесных физических системах в терминах неединственности гиббсовского случайного поля. При этом единственности гиббсовского поля отвечает слабая зависимость его компонент.

Теория гиббсовских случайных полей нашла применения не только в физике, но и в теории распознавания образов, теории нейронных сетей и т.д.

Начиная с 1970-х, работы по теории гиббсовских случайных полей велись в отделе "Интегральная и стохастическая геометрия" Института математики НАН Армении. К начальной фазе этих исследований относятся работы Б. Нахапетяна [43, 44] по предельным теоремам для дискретных гиббсовских случайных полей, а также работы автора диссертации по исследованию поведения статистической суммы классических систем при больших обьемах [59, 46, 47] . Значительный и оригинальный вклад составили работы Р. Амбарцумяна по описанию новых классов гиббсовских полей, основанные на комбинаторном (принцип включения-исключения) подходе к построению точечных процессов [2, 3, 4]. (Позже эти работы были продолжены Ж. Лебовитцем [30] и его группой в университете Rutgers, США.)

Отметим также недавние работы Б.Нахапетяна совместно с С. Дашяном [10, 11], в которых решена известная проблема Добрушина об описании случайных полей с заданными одноточечными условными распределениями. Совместно с В. Арзуманяном и Б. Нахапетяном автором диссертации исследовались различные свойства классических решетчатых спиновых систем [50, 51, 52, 53, 54] .

Одним из наиболее мощных методов исследования гиббсовских случайных полей является метод кластерных разложений [13, 34] . Он позволяет представить любую локальную характеристику гиббсовского случайного поля (логарифм статистической суммы, средние локальных функций и т.д.) в виде абсолютно сходящегося ряда, главный член которого соответствует

© National Library of Armenia

системе без взаимодействия, а последующие члены учитывают взаимодействие. Метод эффективен в области малых взаимодействий и позволяет проводить полный анализ. В этом смысле, метод кластерных разложений выступает в виде некоторого варианта теории возмущений. Метод имеет важные применения в статистической физике, квантовой теории поля и т.д.

В диссертации предложен новый общий подход к методу кластерных разложений.

Основным обьектом исследования диссертации являются модели взаимодействующих броуновских петель — квантовые системы в представлении Феймана – Каца. Такие модели впервые были рассмотрены в работах Жинибра [26, 24, 25] .

Главным результатом диссертации является асимптотическое разложение логарифма статистической суммы квантовых систем. Этот результат основан на разработанной в диссертации принципиально новой методике вывода асимптотических разложений, которая использует оценки второго семиинварианта, не прибегая к оценкам старших семиинвариантов. Для получения оценок второго семиинварианта для газа петель вводится ключевое понятие убывания функции, описывающей взаимодействие двух петель при их достаточной "удаленности"[65].

Следует отметить, что полученное разложение может быть рассмотрено как естественное обобщение известной задачи о вычислении асимптотики статистической суммы $\mathrm{Tr}\exp(\beta\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\beta\lambda_n}$ при $\beta\to 0$ [62] (см. также [68]). Здесь λ_n — собственные значения оператора Лапласа $-\Delta$. Эта задача восходит к работам Г. Лоренца и Г. Вейля [28].

Отметим также, что в последнее время модели взаимодействующих броуновских петель привлекают значительный интерес, о чем свидетельствуют, например, работы [5, 19, 35, 23, 69].

Цель работы.

1. Разработать новый абстрактный подход к методу кластерных разложений, применимый как к классическим, так и к квантовым системам (дискретным и непрерывным).

2. Исследовать убывание корреляций в моделях взаимодействующих броуновских петель.

3. Получить асимптотическое разложение логарифма статистической суммы квантовых систем.

Методы исследования. В работе используются методы теории вероятностей, теории интегрирования в функциональных пространствах дифференциальной геометрии, теории графов и комбинаторики.

© National Library of Armenia

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер, однако могут найти применение в статистической физике, квантовой теории поля, а также в теории распознования образов, терии нейронных сетей и т.д.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах: университета Билефелд (Германия); университетов Рим -1, 2, 3 (Италия); университета Аризона (Туссон, США); Института математики университета Потсдам (Германия); в Исследовательском Центре BiBoS Института математики университета Бонн (Германия); отдела интегральной и стохастической геометрии Института математики НАН Армении и др.,

а также на международных конференциях: "Вероятностные методы в математической физике", Нор-Амберд, 1988; "Infinite-dimensional stochastic differential equations in statistical mechanics", Лилль (Франция), 1998; "Cluster expansions in statistical mechanics", Париж, 2000; "Infinite dimensions: The Minlos effect in mathematics and physics", Москва, 2001; "On the Gibbs path: a random field trip", Билефелд (Германия), 2002; "Mathematical problems in Dynamics and statistical physics", Камерино (Италия) 2004; "Problems in statistical mechanics", Потсдам (Германия), 2004 и др.

Основные результаты диссертации опубликованы в 21 статьях, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 153 страницах, состоит из введения,четырех глав и списка литературы, содержащего 112 наименований.

Содержание работы

Во введении (**Глава 1**) дается обзор результатов, связанных с темой диссертации, а также приводится краткое описание ее содержания.

Глава 2 посвящена методу кластерных разложений. Этой тематике посвящено большое количество работ. Отметим, например, обзоры [7, 45, 1]

© National Library of Armenia

и цитированную литературу в монографиях [34, 49, 27]. Все возрастающее их число сделало необходимым создание общих подходов. В этом направлении важным вкладом является работа Котецкого и Прайса [29], в которой даются удобные условия сходимости кластерных разложений, однако их результат применим только к дискретным системам. Следует отметить, что как этот, так и другие общие подходы могли применятся только при условии неотрицательности потенциала взаимодействия.

Подход представленный в этой главе, применим как к классическим так и квантовым системам, с общим устойчивым взаимодействием, вне зависимости от того дискретные эти системы или непрерывные [70].

Пусть $(\mathbb{X}, \mu)$ пространство с конечной комплексной мерой. Рассмотрим измеримые комплексные симметричные функции u и q на пространстве $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$, связанные соотношением

$$q(x, y) = e^{-u(x,y)} - 1. \tag{1}$$

Вещественная часть u может принимать значение $+\infty$, q при этом полагается равным -1. В приложениях, $u(x, y)$ обычно представляет собой взаимодействие между обьектами x и y , а значение $+\infty$ соответствует твердой сердцевине. Определим формально статистическую сумму

$$Z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int \mathrm{d}\mu(x_1) \dots \int \mathrm{d}\mu(x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \bigl(1 + q(x_i, x_j)\bigr). \tag{2}$$

(при $n = 0$, соответствующий член ряда полагается равным единице).

Приведем условия на функцию q, используемые при получения кластерных разложений.

Условие 1. *Существует неотрицательная функция b на $\mathbb{X}$ такая, что для всех n и почти всех $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}$,*

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \bigl|1 + q(x_i, x_j)\bigr| \leq \prod_{i=1}^{n} e^{b(x_i)}.$$

Обычное условие устойчивости получается когда b есть константа.

Условие 2. *Существует неотрицательная функция a на $\mathbb{X}$,такая, что для почти всех $x \in \mathbb{X}$,*

$$\int \mathrm{d}|\mu|(y)\, |q(x, y)| e^{a(y) + 2b(y)} \leq a(x).$$

Мы также будем пользоваться и следующим, более сильным условием.

© National Library of Armenia

Условие 3. *Существует неотрицательная функция a на $\mathbb{X}$ и число p, $0 < p < 1$,такие, что для почти всех $x \in \mathbb{X}$,*

$$\int \mathrm{d}|\mu|(y)\, |q(x,y)| e^{a(y)+2b(y)} \hat{a}(y) \leq pa(x) \tag{3}$$

где $\hat{a}(y) = \max(a(y), 1)$.

Обозначим через $\mathcal{C}_n$ множество всех связных неориентированных простых (без петель) графов с n вершинами. Введем следующую комбинаторную функцию (называемую *функцией Урселла*) на конечных последовательностях $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов из $\mathbb{X}$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, \\ \sum_{G \in \mathcal{C}_n} \prod_{\{i,j\} \in G} q(x_i, x_j) & \text{if } n \geq 2. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь произведение берется по всем ребрам графа G.

Теорема 1(Кластерное разложение). *Пусть выполнены Условия 1 и 2. Предположим также, что* $\int \mathrm{d}|\mu|(y) e^{a(y)+2b(y)} < \infty$. *Тогда*

$$Z = \exp\Big\{ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int \mathrm{d}\mu(x_1) \ldots \mathrm{d}\mu(x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \Big\}. \tag{5}$$

При этом ряд в экспоненте сходится абсолютно. Далее, для почти всех $x_1 \in \mathbb{X}$ *имеет место оценка*

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)!} \int \mathrm{d}|\mu|(x_2) \ldots \int \mathrm{d}|\mu|(x_n)\, |\varphi(x_1, \ldots, x_n)| \leq (e^{a(x_1)} - 1) e^{2b(x_1)}. \tag{6}$$

Введем одночастичные $\varsigma(x_1)$ и двучастичные $\varsigma(x_1, x_2)$ корреляционные функции, определяемые соответственно равенствами

$$\varsigma(x_1) = Z^{-1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \int \mathrm{d}\mu(x_2) \ldots \int \mathrm{d}\mu(x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \big(1 + q(x_i, x_j)\big) \tag{7}$$

(член соответствующий $n = 1$ полагается равным 1) и

$$\varsigma(x_1, x_2) = Z^{-1} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} \int \mathrm{d}\mu(x_3) \ldots \int \mathrm{d}\mu(x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \big(1 + q(x_i, x_j)\big) \tag{8}$$

(член соответствующий $n = 2$ полагается равным $1 + q(x_1, x_2)$).

Далее, определим следующие функции, называемые кластерными :

$$\sigma(x_1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \int \mathrm{d}\mu(x_2) \ldots \int \mathrm{d}\mu(x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n), \tag{9}$$

© National Library of Armenia

и

$$\sigma(x_1,x_2) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!} \int \mathrm{d}\mu(x_3) \ldots \int \mathrm{d}\mu(x_n)\, \varphi(x_1,\ldots,x_n). \tag{10}$$

В диссертации доказано (Раздел 2.3, Теорема 2.2), что в предположениях Теоремы 1, функции $\sigma(x_1)$ и $\sigma(x_1,x_2)$ корректно определены (в смысле абсолютной сходимости этих рядов).

В статистической механике важную роль играет усеченная двучастичная корреляционная функция (аналог второго семиинварианта):

$$\frac{\varsigma(x_1,x_2)}{Z} - \frac{\varsigma(x_1)\,\varsigma(x_2)}{Z^{\,2}}.$$

Теорема 2. *В предположениях Теоремы 1 имеем*

$$\begin{aligned} \frac{\varsigma(x_1)}{Z} &= \sigma(x_1), \\ \frac{\varsigma(x_1,x_2)}{Z} &= \sigma(x_1)\sigma(x_2) + \sigma(x_1,x_2). \end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда следует, что в условиях Теоремы 1, второй семиинвариант совпадает с кластерной функцией $\sigma(x_1,x_2)$. Этот факт существенно используется при выводе различных оценок на $\sigma(x_1,x_2)$.

В **Главе 3** мы изучаем убывание корреляций в квантовых системах, путем сведения их к моделям взаимодействующих броуновских петель (представление Феймана - Каца). Это позволяет использовать метод кластерных разложений, развитый в предыдущей главе. Фундаментальным является вопрос описания убывания корреляций в моделях взаимодействующих петель, которые имеют сложную математическую структуру. В Главе 3 вводится понятие "удаленности " броуновских петель, с помощью которого удается получить эффективные оценки второго семиинварианта.

Приведем общий результат об убывании корреляций, который является основным в этой главе.

Теорема 3 (Убывание корреляций). *В предположениях Теоремы 1, для почти всех $x, y \in \mathbb{X}$,*

$$|\sigma(x,y)| \leq e^{a(y)+2b(y)} \sum_{m\geq 0} \int \mathrm{d}|\mu|(x_1) \ldots \int \mathrm{d}|\mu|(x_m) \prod_{i=0}^{m} |q(x_i,x_{i+1})| \cdot e^{a(x_i)+2b(x_i)} \tag{12}$$

где $x_0 \equiv x$, $x_{m+1} \equiv y$. Член ряда соответствующий $m = 0$ полагается равным $|q(x,y)|e^{a(x)+2b(x)}$. Во многих приложениях присутствует "малый параметер "(обычно это активность z), который обеспечивает абсолютную сходимость ряда (12).

© National Library of Armenia

Результаты главы 2, а также Теорема 3 получены в совместной с Д. Ульчи работе [70]. Теорема 3, в несколько ином виде, доказана ранее в совместной с Г. Цессином статье [65].

Теорема 4 (Интегральная оценка). *Пусть выполнены Условие 1 и 3. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{X}$,*

$$\int \mathrm{d}|\mu|(y)\,|\sigma(x,y)| \le e^{a(x)+2b(x)}a(x)\frac{p}{1-p}. \tag{13}$$

Далее, в этой главе изучается квантовый газ, состоящий из N одинаковых бесспиновых частиц в ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ и взаимодействующих с помощью парного потенциала ϕ. Предполагается, что ϕ — действительная четная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию устойчивости с константой $B \ge 0$. Рассматриваются также устойчивые потенциалы с твердой сердцевиной: $\phi(u) = +\infty$ for $|u| \le c$, где c – радиус твердой сердцевины. В этом случае ϕ предполагается кусочно-непрерывной и суммируемой вне шара $|u| \le c$.

Пусть система описывается гамильтонианом вида

$$H_N(\Lambda) = -\sum_{i=1}^{N}\Delta_i + U, \tag{14}$$

где Δ_i — оператор Лапласа i-ой частицы с граничными условиями Дирихле, а U — оператор умножения, вида

$$U(u_1,\cdots,u_N) = \sum_{1\le i<j\le N}\phi(u_i-u_j).$$

Рассматриваются системы, подчиняющиеся статистикам Максвелла - Больцмана (МБ-статистика), Бозе - Эйнштейна (БЭ-статистика) и Ферми - Дирака (ФД-статистика). Гильбертовым пространством системы с МБ-статистикой служит пространство $L^2(\Lambda^N)$ комплекснозначных квадратично интегрируемых функций от N переменных. Для описания систем с БЭ-статистикой (бозоны) и ФД-статистикой (фермионы), используются подпространства $L^2_\varepsilon(\Lambda^N)$, $(\varepsilon = \pm)$ пространства $L^2(\Lambda^N)$, состоящее из функций симметричных $(\varepsilon = +)$, соответственно, функций антисимметричных $(\varepsilon = -)$ относительно перестановки аргументов.

Обозначим через $S_\varepsilon = S_{\varepsilon,N}$ проектор на подпространство $L^2_\varepsilon(\Lambda^N)$:

$$S_\varepsilon f(u_1,\cdots,u_N) = \frac{1}{N!}\sum_{\pi\in\mathcal{I}_\mathcal{N}}\varepsilon(\pi)f(u_{\pi(1)},\cdots,u_{\pi(N)}),\ \ f\in L^2(\Lambda^N),$$

© National Library of Armenia

где $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ - симметрическая группа перестановок из N элементов, $\varepsilon(\pi) \equiv 1$ для бозонов, для фермионов $\varepsilon(\pi)$ равен 1 на четных ,и -1 на нечетных перестановках .

Статистическая сумма большого канонического ансамбля Гиббса квантового газа в ограниченной области Λ задается формулой

$$Z(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathrm{Tr}\, \exp(-\beta H_n(\Lambda)) \tag{15}$$

в случае статистики МБ, и

$$Z_\varepsilon(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathrm{Tr}\, S_\varepsilon \exp(-\beta H(\Lambda)). \tag{16}$$

в случае статистик БЭ или ФД, где $z > 0$ параметр, называемый активностью. Представления Феймана - Каца статистических сумм имеют вид ([26], [6])

$$Z(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda^n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}u_i \int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}P_\beta^{u_i,u_i}(x_i) 1_\Lambda(x_i) \times$$
$$\exp\Big\{ - \sum_{1 \le i < j \le n} \hat{\phi}(x_i - x_j) \Big\},$$

соответственно

$$Z_\varepsilon(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{I}_n} \varepsilon(\pi) \int_{\Lambda^n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}u_i \int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}P_\beta^{u_i,u_{\pi(i)}}(x_i)$$
$$\cdot \exp\Big\{ - \sum_{1 \le i < j \le n} \hat{\phi}(x_i - x_j) \Big\},$$

где $1_\Lambda(x) = 1$, если $x(t) \in \Lambda$ для всех $0 \le t \le \beta$ и равен нулю в противном случае, $P_\beta^{u,v}$ - ненормированная условная мера Винера на пространстве $\mathcal{X}_\beta^{u,v}$ броуновских траекторий из u в v за время β, $u, v \in \mathbb{R}^d$. Наконец,

$$\hat{\phi}(x - y) = \int_0^\beta \mathrm{d}t\, \phi(x(t) - y(t)), \quad x, y \in \mathcal{X}_\beta^{u,v}. \tag{17}$$

При этом ряд для $Z(\Lambda)$ сходится при любом $z > 0$, а ряд для $Z_\varepsilon(\Lambda)$ только при $z \le e^{-\beta B}$.

Выражения для $Z(\Lambda)$ и $Z_\varepsilon(\Lambda)$ удобно представлять в терминах броуновских петель. Для этого рассмотрим пространство $C([0,\beta], \mathbb{R}^d)$ всех элементарных (броуновских) траекторий в $\mathbb{R}^d$ "длины"$\beta > 0$. Пусть

$$\mathcal{X}_{j\beta} = \{X \in C([0, j\beta], \mathbb{R}^d) \mid X(0) = X(j\beta)\}, \;\; j = 1, 2, \cdots .$$

© National Library of Armenia

Элементы пространства $\mathcal{X}_{j\beta}$ будем называть сложными петлями длины $j\beta$. В топологии равномерной сходимости, пространство $\mathcal{X}_{j\beta}$ является польским пространством, с борелевской σ-алгеброй. Обозначим через $\mathcal{X}$ (дизьюнктную) сумму топологических пространств $\mathcal{X}_{j\beta}$: $\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{j\beta}$.

Будем говорить, что элементарная траектория x является элементарной составляющей сложной петли $X \in \mathcal{X}$ и писать $x \in X$ если существует i, $0 \le i < |X|$ такое, что $x(t) = X(t + i\beta)$, $t \in [0, \beta]$. Здесь $|X| = j$, если $X \in X_{j\beta}$. Для $u \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathcal{X}_{j\beta}^{u,u} = \{X \in \mathcal{X}_{j\beta} \mid X(0) = X(j\beta) = u\}, \quad \mathcal{X}^{u,u} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{j\beta}^{u,u}.$$

Определим меру $P_{\varepsilon,z}^{u,u}$ в пространстве $\mathcal{X}^{u,u}$, формулой

$$P_{\varepsilon,z}^{u,u} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j-1} z^j}{j} P_{j\beta}^{u,u}, \quad 0 < z \le 1, \tag{18}$$

где $\varepsilon = 1$ для бозонов и $\varepsilon = -1$ для фермионов. Пользуясь канонической биекцией τ между пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^{0,0} \times \mathbb{R}^d$ определим меру $\rho_{\varepsilon,z}$ на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ формулой

$$\rho_{\varepsilon,z} = (P_{\varepsilon,z}^{0,0} \times \lambda) \circ \tau^{-1}, \tag{19}$$

где λ мера Лебега на $\mathbb{R}^d$.

Далее, рассмотрим пространство $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{X})$ конечных подмножеств (конфигураций) пространства $\mathcal{X}$ и σ- конечную меру $W_{\rho_{\varepsilon,z}}$ на нем, полагая

$$W_{\rho_{\varepsilon,z}}(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{X}^n} \mathrm{d}\rho_{\varepsilon,z}(X_1) \cdots \mathrm{d}\rho_{\varepsilon,z}(X_n) h(X_1, ..., X_n) \tag{20}$$

где $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$, при этом ряд начинается с $h(\emptyset)$, [65]. Для ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, определим множество $\mathcal{M}(\mathcal{X}(\Lambda)) = \mathcal{M}(\Lambda)$ конечных конфигураций петель в Λ, полагая $\mathcal{M}(\Lambda) = \{\omega \in \mathcal{M} \,|\, \omega \subset \mathcal{X}(\Lambda)\}$, где $\mathcal{X}(\Lambda) = \{X \in \mathcal{X} | X(t) \in \Lambda, \forall t \in [0, \beta|X|]\}$.

Пусть $W_{\rho_{\varepsilon,z,\Lambda}}$ — ограничение меры $W_{\rho_{\varepsilon,z}}$ на $\mathcal{M}(\Lambda)$. Тогда $W_{\rho_{\varepsilon,z,\Lambda}}$ — ограниченная мера с $W_{\rho_{\varepsilon,z,\Lambda}}(\mathcal{M}(\Lambda)) = \exp(\rho_{\varepsilon,z}(\mathcal{X}(\Lambda)))$. Соответствующая вероятностная мера $\exp(-\rho_{\varepsilon,z}(\mathcal{X}(\Lambda)))W_{\rho_{\varepsilon,z,\Lambda}}$ называется *пуассоновским процессом в* $\mathcal{X}(\Lambda)$ *с интенсивностью* $\rho_{\varepsilon,z}$, *или идеальным газом петель в* Λ, *с активностью* z *и со статистиками БЭ или ФД.*

Если вместо $\mathcal{X}$ взять его подпространство $\mathcal{X}_\beta$ а вместо меры $\rho_{\varepsilon,z}$ — его ограничение на $\mathcal{X}_\beta$, равное $z\rho_\beta$, то, по аналогии с вышесказанным, мы придем к определению *идеального газа петель в* Λ *с активностью* z *и МБ-статистикой, как вероятностной меры* $\exp(-z\rho_\beta(\mathcal{X}_\beta(\Lambda)))W_{z\rho_{\beta},\Lambda}$.

© National Library of Armenia

Определим энергию $U(\omega)$ конечной конфигурации сложных петель ω по формуле

$$U(\omega)=\sum_{X\in\omega}U_1(X)+\frac{1}{2}\sum_{X,Y\in\omega}U_2(X,Y), \tag{21}$$

где

$$U_1(X)=\frac{1}{2}\sum_{x,y\in X}\hat{\phi}(x-y),\ \ U_2(X,Y)=\sum_{x\in X,y\in Y}\hat{\phi}(x-y), \tag{22}$$

с $\hat{\phi}$, определенной формулой (17). Тогда распределение Гиббса $Q_{\varepsilon,z,\Lambda}$ на $\mathcal{M}(\Lambda)$ имеет вид

$$Q_{\varepsilon,z,\Lambda}=\frac{\exp(-U)}{Z_\varepsilon(\Lambda,z)}W_{\varepsilon,z,\Lambda}, \tag{23}$$

где большая статистическая сумма

$$Z_\varepsilon(\Lambda,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathcal{X}_\Lambda^n}\rho_{\varepsilon,z}(\mathrm{d}X_1)...\rho_{\varepsilon,z}(\mathrm{d}X_n)\exp(-U(X_1,...,X_n)). \tag{24}$$

Мы называем $Q_{\varepsilon,z,\Lambda}$ *газом петель в Λ с активностью z и взаимодействием ϕ, подчиняющихся БЭ-статистике или ФД-статистике .*

В Разделах 3.4 и 3.5 исследуется убывание корреляций в моделях взаимодействующих петель. Известно [26], что если интегрировать функцию $q(x,y)$ относительно меры $\rho_{\varepsilon,z}$ по множеству петель y, которые вылезают за шар радиуса $R+r$ в $\mathbb{R}^d$, в то время, как петля x остается в шаре радиуса R, то интеграл убывает по r степенным образом. Это свойсво берется за определение степенного убывания функций от двух петель. В Разделе 3.5, рассматривая различные модели газа петель, мы доказываем, что при естественных ограничениях на потенциал ϕ , $\sigma_\Lambda(x,y)$ убывает степенным образом. Этот факт становится главным техническим средством при выводе асимптотического разложения логарифма статистической суммы квантовых систем в Главе 5.

В Разделе 3.4, с использованием Теоремы 3, получены общие оценки двучастичных семиинвариантов для газа петель, при этом случаи абсолютно интегируемых потенциалов и потенциалов с твердой сердцевиной исследованы отдельно.

Пусть $\mathbb{X}=\mathcal{X}(\Lambda)$, $\mathrm{d}\mu(x)=\mathrm{d}\rho_{\varepsilon,z}(x)\,e^{-U_1(x)}$, $q(x,y)=e^{-U_2(x,y)}-1$, где Λ—произвольная ограниченная область.

Условие 4. *Существует неотрицательная функция a на $\mathcal{X}$ и число p, $0<p<1$,такие, что для $l>0$ и $r>0$,*

$$\int_{\mathcal{X}^c(B_0(R+r))}\mathrm{d}|\mu|(y)|\,|q(x,y)|e^{a(y)+2b(y)}\hat{a}(y)\le p\,a(x)\Big(1+\frac{r}{2}\Big)^{-l}, \tag{25}$$

© National Library of Armenia

для почти всех $x \in \mathcal{X}(B_0(R))$, где $B_0(R)$—шар радиуса R в $\mathbb{R}^d$, $\hat{a}(y) = \max(a(y), 1)$.

Имеет место

Теорема 5 (Основная оценка: интегрируемый потенциал). *Пусть выполнены условия 1, 3 и 4 , тогда для всех положительных R, $r > 0$ и для почти всех $x \in \mathcal{X}(B_0(R))$,*

$$\int_{\mathcal{X}^c(B_0(R+r))} \mathrm{d}|\mu|(y)|\sigma_\Lambda(x,y)| \leq C(l,p)e^{a(x)+2b(x)}a(x)(1+r)^{-l}. \tag{26}$$

Далее, будем обозначать все константы через C указывая при необходимости только зависимость от параметров.

Для исследовния убывания корреляций в системах с потенциалом твердой сердцевины нам понадобится следующая модификация Условия 4 .

Условие 5. *Существует неотрицательная функция a на $\mathcal{X}$ и число p, $0 < p < 1$,такие, что для $l > 0$ и всех $r > 2c$, где c - радиус твердой сердцевины,*

$$\int_{\mathcal{X}^c(B_0(R+r))} \mathrm{d}\rho_{+,z}(y)\,|q(x,y)|e^{a(y)+2b(y)}\hat{a}(y) \leq p\,a(x)\Big(1+\frac{r}{2}\Big)^{-l} \tag{27}$$

для почти всех $x \in \mathcal{X}(B_0(R))$, где $\hat{a}(y) = \max(a(y), 1)$.

В случае потенциалов с твердой сердцевиной верна следующая теорема, аналогичная Теореме 5.

Теорема 6 (Основная оценка: твердая сердцевина). *Пусть выполнены условия 1, 3 и 5 , тогда для всех положительных R, $r > 0$ и для почти всех $x \in \mathcal{X}(B_0(R))$,*

$$\int_{\mathcal{X}^c(B_0(R+r))} \mathrm{d}|\mu|(y)|\sigma_\Lambda(x,y)| \leq C(l,p)e^{a(x)+2b(x)}a(x)(1+r)^{-l}. \tag{28}$$

Заметим, что оценки (26) и (28) равномерны по Λ, что делает их полезными при изучении поведения логарифма статсуммы в термодинамическом пределе.

Часто бывают полезными оценки, получающиеся при дополнительном интегрировании по x.

Теорема 7 (Оценка двойного интеграла). *Пусть $h : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ измеримая функция. Предположим, что существует измеримая функция α на $\mathcal{X}^0$ такая что для всех положительных R, $r > 0$ и для почти всех $x \in \mathcal{X}(B_0(R))$,*

$$\int_{\mathcal{X}^c(B_0(R+r))} \mathrm{d}|\mu|(y)|h(x,y)| \leq \alpha(x^0)(1+r)^{-l} \tag{29}$$

© National Library of Armenia

и

$$\int_{\mathcal{X}} \mathrm{d}|\mu|(y)|h(x,y)| \leq \alpha(x^0). \tag{30}$$

Если при этом функция α удовлетворяет условию

$$\int_{M(R)} \mathrm{d}|\mu|(x^0)\alpha(x^0) \leq C(1+R)^{-l}, \tag{31}$$

то

$$\int_{\mathcal{X}^0} \mathrm{d}P^0_{+,z}(x^0) \int_{\mathcal{X}^c(B_0(R))} \mathrm{d}|\mu|(y)|h(x,y)| \leq C(\alpha,l)(1+R)^{-l}. \tag{32}$$

В Разделе 3.5, накладывая различные ограничения на потенциал ϕ мы доказываем степенное убывание усеченной двучастичной корреляционной функции для соответствующих моделей газа петель. При этом, в силу Теорем 5 и 6, доказательства сводятся к проверке соответсвующих Условий 1—5. Мы рассматриваем следующие условия на потенциал парного взаимодействия ϕ :

(1) ϕ - четная функция, определенная на $\mathbb{R}^d$,

(2) ϕ удовлетворяет условию устойчивости с константой $B \geq 0$: для всех различных $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}^d$,

$$\sum_{i<j}^{n} \phi(u_i - u_j) \geq -nB,$$

(3) ϕ имеет имеет сферически симметричную твердую сердцевину радиуса $c \geq 0$, т.е., $\phi(u) = +\infty$ для $|u| \leq c$; ϕ непрерывна вне твердой сердцевины,

(4)

$$||\phi_l||_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}u|\phi_l(u)| < \infty, \;\; l \geq 0,$$

(4')

$$p_{c,l}(\phi) = \int_{|u|>c} du|\phi_l(u)| < +\infty, \;\; l \geq 0,$$

где $\phi_l(u) = \phi(u)(1+|u|)^l, \;\; l \geq 0, \;\; \phi_0 \equiv \phi$.

Рассмотрим сначала случай *отталкивающего потенциала* ($\phi \geq 0$).

Теорема 8 (Отталкивающий интегрируемый потенциал,[61]). *Пусть потенциал $\phi \geq 0$ и выполнены Условия (1) и (4). Пусть $z < e^{-3}$ и*

$$zC(d,l)||\phi_l||_1 \zeta\Big(\frac{d}{2}+1\Big)\beta^{1-\frac{d}{2}}\Big(1+\beta^{\frac{l}{4}-1}\Big) \leq p < 1. \tag{33}$$

© National Library of Armenia

Тогда для всех положотельных R, r и для почти всех $x \in \mathcal{X}(B_0(R))$,

$$\int_{\mathcal{X}^c(B_0(R+r))} \mathrm{d}\rho_{+,z}(Y)|\sigma_\Lambda(X,Y)| \le C(l,p)e^{|X|}|X|(1+r)^{-l}. \qquad (34)$$

Теорема 9 (Устойчивый интегрируемый потенциал). *Пусть выполнены условия (1), (2) и (4). Пусть $z < e^{-3(1+\beta B)}$ и*

$$zC(d,l)||\phi_l||_1\zeta\Big(\frac{d}{2}+1\Big)e^{\frac{3\beta B}{2}}\beta^{1-\frac{d}{2}}\Big(1+\beta^{\frac{l}{4}-1}\Big) \le p < 1. \qquad (35)$$

Тогда для всех положительных R, r и для почти всех $x \in \mathcal{X}(B_0(R))$,

$$\int_{\mathcal{X}^c(B_0(R+r))} \mathrm{d}\rho_{+,z}(Y)|\sigma_\Lambda(X,Y)| \le C(l,p)e^{|X|}|X|(1+r)^{-l}. \qquad (36)$$

Рассмотрим случай газа петель, взаимодействующих с помощью устойчивого потенциала с твердой сердцевиной. Заметим, что наличие твердой сердцевины заметно осложняет ситуацию, т.к. приходится оценивать интегралы от т.н. винеровских сосисок, что, само по себе, сопряжено с определенными трудностями. Мы рассмотрим случай МБ статистики в предположении, что потенциал ϕ удовлетворяет условиям (1), (2), (3) и (4').

Винеровская сосиска $S(x)$, порожденная петлей $x \in \mathcal{X}_\beta$, определяется формулой

$$S(x) = \{u \in \mathbb{R}^d \;\big|\; |x(t)-u| \le c \text{ for some } t \in [0,\beta]\}.$$

Пусть

$$E_j(k) = \int_{\mathcal{X}^{00}} \mathrm{d}P_\beta^{00}(y^0)\, e^{k|S(y^0)|}\, |S(y^0)|^j \;\; j,k = 0,1,2,\cdots, \qquad (37)$$

где через $|S(x)|$ обозначен обьем сосиски $S(x)$. (Сходимость этих интегралов доказана в Лемме 3.13 диссертации, см. также [63]). Положим

$$E = \max(E_j(1), \sqrt{E_j(2)}, j = 0,1,2), \qquad (38)$$

а также

$$\xi = e^{2\beta B+1}E, \;\; \eta = e^{2\beta B}\beta p_{c,l}(\phi), \qquad (39)$$

где $p_{c,l}(\phi)$ определено в условии (4').

Теорема 10 (Устойчивый потенциал с твердой сердцевиной [63]). *Пусть выполнены условия (1), (2) , (3) и (4') на потенциал ϕ и пусть z удовлетворяет соотношению*

$$zC(d,l)Ee^{2\beta B+1}(b_c^{-1} + e^{2\beta B}\beta p_{c,l}(\phi))\left(1+\beta^{\frac{l-d}{4}}\right) \le p < 1, \qquad (40)$$

© National Library of Armenia

где b_c - объем шара радиуса c в $\mathbb{R}^d$. Тогда для всех $R > 0, r > 2c$ и почти всех $x \in \mathcal{X}(B_0(R))$, усеченная двучастичная корреляционная функция удовлетворяет оценке

$$z \int_{\mathcal{X}^c(B_0(R+a))} d\rho(y)|\sigma_\Lambda(x,y)| \le C(l,p)e^{1+2\beta B}e^{|S(x)|}(|S(x)|+1)(1+r)^{-l}.$$

Комбинируя этот результат с Теоремой 7, получаем

Следствие 1. *В условиях Теоремы 10 имеет место следующая оценка*

$$z \int_{\mathcal{X}^0} \mathrm{d}P_\beta^{00}(x^0) \int_{\mathcal{X}^c(B_u(R))} \mathrm{d}\rho(y)|\sigma_\Lambda(x^0+u,y)| \le C(\phi,\beta,z,d,c)(1+R)^{-l}$$

для всех $u > 0$ и $R > 6c$.

В конце Раздела 3.5 мы рассматриваем газ петель в Λ с МБ статистикой и устойчивым интегрируемым потенциалом.

Теорема 11 [68]. *Если ϕ удовлетворяет условиям (1), (2) and (4), а активность z удовлетворяет соотношению*

$$zC(d,l)||\phi_l||_1 e^{1+\beta B}\beta^{1-\frac{d}{2}}(1+\beta^{\frac{l}{2}}) \le p < 1, \tag{41}$$

то для всех $R > 0$, усеченная двучастичная корреляционная функция удовлетворяет оценке

$$z \int_{\mathcal{X}^0} \mathrm{d}P_\beta^{00}(x^0) \int_{\mathcal{X}^c(B_0(R))} \mathrm{d}\rho(y)|\sigma_\Lambda(x^0,y)| \le C(1+R)^{-l}$$

с константой $C = C(\Phi,\beta,z,d)$.

Этот результат является основным техническим средством, используемым при вывода асимптотического разложения для $\ln Z(\Lambda,z)$.

Глава 4 посвящена классическим непрерывным и дискретным спиновым системам. Здесь, в этой сравнительно простой ситуации, мы демонстрируем новый метод изучения асимптотики $\ln Z(\Lambda,z)$ при больших Λ, который затем применяется к моделям взаимодействующих броуновских петель.

Асимптотика $\ln Z(\Lambda,z)$ в случае классических систем изучалась разными авторами. Главный член был получен в работах Ли и Янга [32], Ван-Хова [48], второй член для дискретных систем — в работах Добрушина [18], Фишера и Кагиналпа [22]. Дальнейшие члены асимптотики для классических непрерывных систем были получены автором диссертации [60]. Коле и Данлоп [8], применяя другой метод доказательства, уточнили этот результат. Для классических дискретных спиновых систем с общим взаимодействием

© National Library of Armenia

автором диссертации аналогичный результат был получен в соавторстве с Арзуманяном и Нахапетяном [51, 52]. Асимптотические разложения для $\ln Z(\Lambda, z)$, в случае непрерывных и дискретных спиновых систем, приведены в Разделах 4.2 и 4.3 диссертации. Во всех перечисленных работах, для получения дальнейших членов асимптотики использовались оценки всех семиинвариантов системы. Предлагаемый нами подход использует оценки только второго семиинварианта [68, 62].

Перейдем к спиновым системам. Пусть Y стандартное пространство с σ-алгеброй $\mathcal{Y}$. Это означает, что Y является подпространством некоторого польского пространства и при этом след соответствующей борелевской σ-алгебры совпадает с $\mathcal{Y}$. Введем новое пространство $\widetilde{Y} = \{Y, \emptyset\}$ с элементом $\emptyset$, который мы назовем ***вакуумом.*** Пусть m — мера на $\widetilde{Y}$ такая, что его ограничение на Y есть конечная (для простоты, вероятностная) мера и $m(\emptyset) = 1$. Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех отображений $\eta : \mathbb{Z}^d \to \widetilde{Y}$ таких, что $\eta(u) \neq \emptyset$ только для конечного числа $u \in \mathbb{Z}^d$:

$$\mathcal{M} = \{\eta : \mathbb{Z}^d \to \widetilde{Y} \ \big| \ |s(\eta)| < \infty\}, \tag{42}$$

где $s(\eta) = \operatorname{supp} \eta = \{u \in \mathbb{Z}^d, \eta(u) \neq \emptyset\}$. $\mathcal{M}$ является конфигурационным пространством нашей спиновой модели с пространством спинов Y. Элементы $\mathcal{M}$ мы называем спиновыми конфигурациями. Пусть

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \{\eta : \mathbb{Z}^d \to \widetilde{Y} \ \big| \ s(\eta) \subset \Lambda\}, \ \ \Lambda \subset \mathbb{Z}^d. \tag{43}$$

Рассматриваются спиновые системы с многочастичным потенциалом ϕ, который является действительной измеримой функцией на $\mathcal{M}$. Будем говорить, что ϕ — эвклидово инвариантный потенциал, если $\phi(g\eta) = \phi(\eta)$ для любого автоморфизма g решетки $\mathbb{Z}^d$, где $(g\eta)(u) = \eta(g(u))$. Наконец, потенциал ϕ назовем трансляционно-инвариантным, если $\phi(\eta_a) = \phi(\eta)$, для всех $a \in \mathbb{Z}^d$, где $\eta_a(u) = \eta(u - a)$,

Пусть δ — трансляционно-инвариантная метрика на $\mathbb{Z}^d$. Для конечного подмножества решетки $\mathbb{Z}^d$, обозначим через $L_\delta(\xi)$ минимум длин (относительно метрики δ) деревьев с вершинами на ξ и, возможно, произвольных других точках решетки. Мы полагаем, что ϕ удовлетворяет условию

$$p_\delta(\phi) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}_0,\, 0 \in \xi} \sup_{\eta : s(\eta) = \xi} e^{L_\delta(\xi)} |\phi(\eta)| < \infty \tag{44}$$

с метрикой δ такой, что

$$D_\delta(l) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} (1 + |u|)^l \exp\left(-\frac{1}{2}\delta(0, u)\right) < \infty, \ \ l > d. \tag{45}$$

© National Library of Armenia

Определим энергию конфигурации η формулой:

$$U(\eta) = \sum_{J \subset s(\eta)} \phi(\eta_J) \tag{46}$$

где $\eta_J(t) = \eta(t)$, $t \in J$ и $\eta_J(t) = \emptyset$, $t \in \mathbb{Z}^d \setminus J$.

Распределение Гиббса Q_Λ на пространстве $\mathcal{M}(\Lambda)$, спиновых конфигураций в конечном обьеме $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, задается плотностью $Z^{-1}(\Lambda)\exp(-U)$, относительно меры $m_\Lambda = \prod_{t\in\Lambda} m_t$, $m_t = m$, где нормирующий множитель

$$Z(\Lambda) = \int_{\mathcal{M}(\Lambda)} \prod_{t\in\Lambda} \mathrm{d}m_\Lambda(\eta) e^{-U(\eta)}. \tag{47}$$

В разделе 4.3, применяя оценки семиинвариантов по деревьям [51, 53] (называемые также сильными кластерными оценками [20, 21]) , мы доказываем локальную предельную теорему (л.п.т.) для числа частиц в ограниченной области Λ.

Пусть $|\eta| = |s(\eta)|$ — число частиц в конфигурации $\eta \in \mathcal{M}(\Lambda)$. Мы скажем, что для случайной величины $|\eta|$, $\eta \in \mathcal{M}(\Lambda)$, имеет место л.п.т. если при $|\Lambda| \to \infty$, соотношение

$$Q_\Lambda(\eta \in \mathcal{M}(\Lambda) : |\eta| = N) = (2\pi D|\eta|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(N - E|\eta|)^2}{2D|\eta|}\right](1 + o(1)) \tag{48}$$

имеет место равномерно относительно $N \in \mathbb{Z}_+$, таких,что $N - E(\eta) \sim |\Lambda|^{\frac{1}{2}}$. Здесь

$$E|\eta| = \sum_{N\geq 0} NQ_\Lambda(|\eta| = N), \quad D|\eta| = E(|\eta| - E|\eta|)^2. \tag{49}$$

Формулируемая ниже теорема дает условия на потенциал, при которых л.п.т. для числа частиц следует из соответсвующей центральной предельной теоремы (ц.п.т.) Мы скажем, что случайная величина $|\eta|$ (число частиц в ограниченной области Λ) удовлетворяет ц.п.т. , если $D|\eta| \sim D|\Lambda|$, $D > 0$ и

$$Q_\Lambda\left(\eta \in \mathcal{M}(\Lambda) \;\middle|\; \frac{|\eta| - E|\eta|}{(D|\eta|)^{\frac{1}{2}}} < x\right) \to (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t, \tag{50}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $|\Lambda| \to \infty$.

Ц.п.т. для гиббсовских случайных полей получена, например, в работах [42, 12].

Пусть $z(\eta) = e^{-\phi(\eta)}$, $|s(\eta)| = 1$ и пусть $\hat{z} = \sup_\eta |z(\eta)|$.

Теорема 12 [52, 54]. *Пусть трансляционно инвариантный потенциал ϕ удовлетворяет условиям 44 и 45 с $l > 8d$ и пусть*

$$\hat{z} C_\delta(\phi)(2eD_\delta(l) + 1) < 1 \tag{51}$$

© National Library of Armenia

где
$$C_\delta(\phi) = 2\exp(p_\delta(\phi) + e^{p_\delta(\phi)} - 1). \qquad (52)$$
Тогда л.п.т. для числа частиц следует из ц.п.т..

Комбинируя Теорему 12 с Теоремой 9.5.4 из работы [42], получаем

Теорема 13 (Л.П.Т. [54]) *При условиях Теоремы 12 число частиц $|\eta|$ удовлетворяет л.п.т..*

Следующая теорема дает оценку скорости сходимости в л.п.т. для числа частиц.

Теорема 14 [57]. *Пусть эвклидово инвариантный потенциал ϕ удовлетворяет условиям Теоремы 12. Тогда, для любого параллелепипеда $\Lambda \subset Z^d$ верна следующая оценка*
$$\sup_{N\in\mathbb{Z}_+} \left| (2\pi D|\eta|)^{\frac{1}{2}} P(|\eta| = N) - \exp\left[-\frac{(N - E|\eta|)^2}{2D|\eta|}\right] \right| \le \frac{C}{\sqrt{|\Lambda|}},\ C > 0.$$

Теоремы 12 и 13 получены в совместной с В. Арзуманяном и Б. Нахапетяном статьях [54, 52]. Теорема 14 получена в совместной с Б. Нахапетяном статье [57].

В конце Главы 4 мы рассматриваем классические решетчатые гиббсовские случайные поля в конечном обьеме $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. Мы применяем асимптотическое разложение логарифма статсуммы (см. Теорему 4.2 диссертации, а также работы [51, 52]) для получения л.п.т. для вероятностей больших уклонений числа частиц в большом каноническом ансамбле в Λ при $|\Lambda| \to \infty$. Доказательство использует модификацию хорошо известного метода Крамера [9] для изучения вероятностей больших уклонений для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, а также л.п.т. для числа частиц (Теорему 14). Для простоты мы формулируем результат для случая $d = 2$.

Теорема 15 (Большие уклонения, [59, 58]. *Пусть эвклидово инвариантный потенциал ϕ удовлетворяет условиям Теоремы 12. Положим $\alpha = \alpha(\Lambda, \beta, z) = N - E|\eta|$. Если $\alpha|\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \ge 1$ и $\alpha = o(|\Lambda|)$, то для любого параллелепипеда $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ верна следующая оценка*
$$\Pr\left(\omega \in \mathcal{M}(\Lambda_R) \,\middle|\, |\omega| = N\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Lambda_R|}} \sqrt{\Omega''_{\Lambda_R,z}(0)} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2|\Lambda_R|}\Omega''_{\Lambda_R,z}(0)\right)$$
$$\cdot \exp\left(-|\Lambda_R| \sum_{n\ge3} \frac{\alpha^n}{n!|\Lambda_R|^n}\Omega^{(n)}_{\Lambda_R,z}(0)\right) \left[1 + O\left(\frac{\alpha}{|\Lambda_R|}\right)\right],$$

где $\Omega_{\Lambda_R,z}(x)$ — т.н. функция уклонений [9], *которая является аналитической функцией от x в некоторой окрестности начала координат . Более*

© National Library of Armenia

того, вторая и третья производные функции $\Omega_{\Lambda_R,z}(x)$ по x имеют следующие разложения:

$$\frac{\Omega''_{\Lambda_R,z}(0)}{|\Lambda_R|} = [a_0(\phi,z)R^2|\Lambda| + a_1(\phi,z)R|\partial\Lambda| + a_2(\Lambda,\phi,z) + r(\Lambda,\phi,z)]^{-1}$$

и

$$\frac{\Omega'''_{\Lambda_R,z}(0)}{|\Lambda_R|^2} = -\Big[a_0(\phi,z)R^2|\Lambda| + a_1(\phi,z)R|\partial\Lambda| + a_2(\Lambda,\phi,z) + r(\Lambda,\phi,z)\Big]^{-3} \cdot \Big[\frac{\partial a_0(\phi,z)}{\partial(\ln z)}R^2|\Lambda| + \frac{\partial a_1(\phi,z)}{\partial(\ln z)}R|\partial\Lambda| + \frac{\partial a_2(\Lambda,\phi,z)}{\partial(\ln z)} + \frac{\partial r(\Lambda,\phi,z)}{\partial(\ln z)}\Big],$$

где

$$\frac{\partial^j r(\Lambda_R,\phi,z)}{\partial(\ln z)^j} = o(1), \;\; R\to\infty, \;\; j=0,1.$$

В **Главе 5** мы рассматриваем квантовый газ, состоящий из одинаковых бесспиновых частиц в ограниченной области Λ с гладкой границей. Будем считать, что область Λ — открытое выпуклое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^2$ с конечным числом замкнутых выпуклых дыр. При этом, связные компоненты границы $\partial\Lambda$ области Λ, являются замкнутыми одномерными многообразиями класса C^k, $k=1,2,\ldots$ Пусть $\mathcal{O}_k$ — класс таких областей.

Мы полагаем, что частицы взаимодействуют с помощью парного устойчивого потенциала ϕ , где ϕ — четная непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$.

Основной результат Раздела 5.1 описывает первые два члена асимптотического разложения логарифма статсуммы $\ln Z(\Lambda_R,z)$ квантового газа Больцмана. Первый член имеет порядок площади, а второй — порядок длины границы области Λ_R.

Теорема 16 [68]. *Пусть потенциал ϕ удовлетворяют условиям (1),(2) и (4), с $l\geq 16$. Тогда для всех z из интервала*

$$0 < z < C(\beta,l)\left[\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}u\,|\phi(u)|(1+|u|)^l\right]^{-1} \tag{53}$$

и любой области $\Lambda\in\mathcal{O}_2$, логарифм статистической суммы квантового газа Больцмана имеет следующее разложение

$$\ln Z(\Lambda_R,z) = R^2|\Lambda|\,\beta\,p(\phi,z) + R\,b(\Lambda,\phi,z) + o(R) \tag{54}$$

при $R\to+\infty$, где коэффициенты $p(\phi,z)$ и $b(\Lambda,\phi,z)$ задаются явными выражениями, в терминах винеровских интегралов от функции Урселла. Теорема 16 получена в совместной Г. Цессином статье [68].

© National Library of Armenia

В Разделе 5.2, налагая более ограничительные условия на потенциал ϕ и область Λ, мы выводим третий (порядка константы) член асимптотического разложения логарифма статистической суммы квантового газа Больцмана. Мы требуем, чтобы парный устойчивый потенциал ϕ был дифференцируем и ограничен вместе со своими производными, при этом

$$|\phi(u)| \leq M, \ \ ||\phi_l||_1 = \int_{\mathbb{R}^\nu} du|\phi_l(u)| < +\infty, \ \ l \geq 16 \tag{55}$$

и

$$|\nabla\phi(u)| \leq M', \ \ ||\nabla\phi||_1 = \int_{\mathbb{R}^\nu} du|\nabla\phi(u)| < +\infty. \tag{56}$$

Теорема 17 [62]. *Пусть потенциал ϕ и область Λ удовлетворяют сформулированным выше условиям и пусть активность z удовлетворяет соотношению*

$$0 < z < [2^l \beta\, e^{\beta B+1}\, \lambda\, \max(M, ||\phi_l||_1, ||\nabla\phi||_1)]^{-1}. \tag{57}$$

Тогда для любой области $\Lambda \in \mathcal{O}_3$, логарифм статистической суммы квантового газа Больцмана имеет следующее разложение

$$\ln\, Z(\Lambda_R, z) = R^2|\Lambda|\,\beta\, p(\phi, z) + R\, b(\Lambda, \phi, z) + c(\Lambda, \phi, z) + o(1) \tag{58}$$

при $R \to +\infty$, где коэффициенты $p(\phi, z), b(\Lambda, \phi, z)$ и $c(\Lambda, \phi, z)$ задаются явными выражениями, в терминах винеровских интегралов от функции Урселла. Если потенциал ϕ вдобавок инвариантен относительно вращений, то коэффициенты $b(\Lambda, \phi, z)$ и $c(\Lambda, \phi, z)$ можно упростить:

$$\ln\, Z(\Lambda_R, z) = R^2|\Lambda|\,\beta\, p(\phi, z) + R\,|\partial\,\Lambda| b(\phi, z) + 2\pi\chi(\Lambda)\, c(\phi, z) + o(1). \tag{59}$$

При этом $p(\phi, z)$ имеет смысл давления, $b(\phi, z)$ можно интерпретировать как поверхностное натяжение, а $\chi(\Lambda)$ — характеристика Эйлера - Пуанкаре области Λ .

Заметим, что если положить $\phi = 0$ в разложении (62) то, как частный случай Теоремы 17, получаем результат работы [33] об асимптотическом разложении $\ln Z_{id}(\Lambda_R, z)$ для идеального больцмановского газа.

Раздел 5.3 изучает квантовый газ в ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ со статистикой Бозе - Эйнштейна. Вначале мы выводим асимптотическое разложение логарифма статистической суммы для идеального Бозе газа. Затем, для случая взаимодействующего Бозе газа в ограниченной области, мы получаем явное выражение для главного члена разложения и показываем, что поправка имеет порядок R^{d-1}.

© National Library of Armenia

Логарифм статистической суммы идеального Бозе газа имеет вид:

$$\ln Z_{id}(\Lambda, z) = \int\limits_{\mathcal{X}(\Lambda)} \rho_{+,z,\Lambda}(X).$$

Пусть F — трансляционно инвариантная функция на $\mathcal{X}$ ($F(X+u) = F(X)$, для всех $X \in \mathcal{X}^0$ и $u \in \mathbb{R}^d$), такая,что $F \in L_2(\mathcal{X}^0, P^0_{\overline{z}})$ для некоторого $\overline{z} > 0$.

Теорема 18 [55]. *Для произвольной области $\Lambda \in \mathcal{O}_3$ и всех z из интервала $0 < z \leq \overline{z}$ имеет место следующее разложение*

$$\int\limits_{\mathcal{X}(\Lambda_R)} F(X)\, \mathrm{d}\rho_{+,z,\Lambda_R}(X) = R^d |\,\Lambda|\, a_0(F,z) + R^{d-1}\, a_1(\Lambda, F, z) + R^{d-2} a_2(\Lambda, F, z) + o(R^{d-2})$$

при $R \to \infty$. В случае, когда функция F, инвариантна также относительно вращений, коэффициенты a_1 и a_2 принимают более простой вид:

$$a_1(\Lambda, F, z) = |\partial\Lambda|\, \overline{a}_1(F,z), \;\; a_2(\Lambda, F, z) = \int\limits_{\partial\Lambda} H_\Lambda(r)\, \mathrm{d}\sigma(r)\, \overline{a}_2(F,z).$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, а также $\overline{a}_1, \overline{a}_2$, задаются явными выражениями в терминах винеровских интегралов от функции Урселла.

Заметим, что в частном случае, при $F \equiv 1$, Теорема 18 дает разложение $\ln Z_{id}(\Lambda_R, z)$, в котором при $d = 2$ коэффициент a_2 чисто топологический, как это следует из теоремы Гаусса - Бонне. Он равен характеристике Эйлера - Пуанкаре области Λ.

Следующий результат дает явный вид главного члена асимптотики $\ln Z(\Lambda_R, z)$ для взаимодействующего Бозе газа.

Теорема 19 [67].*Пусть неотрицательный потенциал ϕ удовлетворяет условиям (1) и (4), с $l > 1$, и пусть z принадлежит интервалу*

$$0 < z < \Big[C(d,l)||\phi_l||_1 \beta^{1-\frac{d}{2}} \zeta\Big(\frac{d}{2}+1\Big)\Big]^{-1}. \tag{60}$$

Тогда для любой ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$,

$$\ln Z(\Lambda_R, z) = R^d |\Lambda| p(\phi, z) + O(R^{d-1})$$

при $R \to \infty$, где

$$p(\phi, z) = \int\limits_{\mathcal{X}^0} \mathrm{d}P^{0,0}_{+,z}(X) \int\limits_{\mathcal{M}(\mathcal{X})} \frac{\varphi(\omega, X)}{|\omega|+1} \mathrm{d}W_{\rho_{+,z}}(\omega).$$

© National Library of Armenia

В заключительном разделе 5.4 диссертации мы рассматриваем взаимодействующий Бозе газ в многоугольной области. Применяя метод, отличный от того, который применялся в случае областей с гладкой границей, мы выводим все неубывающие члены асимптотики $\ln Z(\Lambda_R, z)$.

Пусть Λ — выпуклая многоугольная область в $\mathbf{R}^2$ с углами $\theta_1, \dots, \theta_m$.

Теорема 20 [64]. *Пусть неотрицательный и инвариантеный относительно вращений потенциал ϕ удовлетворяет условию (4) с $l > 1$. Тогда для любой выпуклой многоугольной области в $\mathbf{R}^2$ и для всех z из интервала*

$$0 < z < [C(l)||\phi_l||_1 \zeta\,(2)]^{-1} \tag{61}$$

имеет место следующее разложение

$$\begin{aligned} \ln Z(\Lambda_R, \beta, z) = {} & R^2|\Lambda| p(\phi, \beta, z) + R\partial\Lambda b(\phi, \beta, z) \\ & + \sum_{j=1}^{m} c(\theta_j, \phi, \beta, z) + o(1) \end{aligned} \tag{62}$$

при $R \to \infty$, где коэффициенты $p(\phi, \beta, z), b(\phi, \beta, z)$ и $c(\theta, \phi, \beta, z)$ задается явными выражениями, в терминах винеровских интегралов от функции Урселла.

Литература

[1] A. Abdesselam, V. Rivasseau, *Trees, forests, and jungles: a botanical garden for cluster expansions*, Lect. Notes Phys. 446, 7–36; hep-th/9409094 (1994).

[2] R. V. Ambartzumian, *On condensable point processes* New Trends in Probability and Statistics, V. Sazonov and T. Shervashidze (Eds.) VSP/Mokslas, 655–667 (1991).

[3] R. V. Ambartzumian, *Random graph approach to Gibbs processes with pair interaction* Acta Applicandae Mathematicae 22 , 3–14 (1991).

[4] R. V. Ambartzumian, H. S. Sukiasian *Inclusion - Exclusion and point processes* Acta Applicandae Mathematicae 22 , 15–31 (1991).

[5] G. Benfatto, M. Cassandro, I. Merola and E. Presutti, *Limit theorems for statistics of combinatorial partitions with applications to mean field Bose gas*, J. Math. Phys. 46, 033303–033341 (2005).

© National Library of Armenia

[6] O. Bratteli, D. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II* Springer, Berlin (1981).

[7] D. C. Brydges, *A short course on cluster expansions*, in "Phénomènes critiques, systèmes aléatoires, théories de jauge Les Houches 1984, 129–183 (1986).

[8] P. Collet, F. Dunlop, *Geometric expansion of the boundary free energy of a dilute gas*, Commun. Math. Phys. 108, 1 – 12 (1987).

[9] H. Cramer, *Sur on nouveal theoreme limite de la theorie des probabilites* Actuar Sci. et ind 736 Paris (1938) (Uspekhi Mat. Nauk 10, 166–178 (1944)).

[10] S. Dashian, B. Nahapetian, *Description of random fields by means of one-point conditional distributions and some applications* Markov Processes Relat. Fields 7, 193–214, (2001).

[11] S. Dashian, B. Nahapetian, *On Gibbsianness of Random Fields*, Markov Processes Relat. Fields, 5, 81–104, (2009).

[12] G. Del Grosso, *On the local central limit theorem for Gibbs random processes*, Commun. Math. Phys. 37, 141–160 (1973).

[13] R. L. Dobrushin, *Perturbation methods of the theory of Gibbsian fields*, Lecture Notes in Math. 1648, 1–66, Springer, Berlin (1996).

[14] Р. Л. Добрушин, *Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности*, Теор. вероятн. и ее примен. 2, 201 – 229 (1968).

[15] Р. Л. Добрушин, *Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием*, Функ. анал. и прилож., 4, 31 – 43 (1968).

[16] Р. Л. Добрушин, *Задача единственности гиббсовского случайного и проблема фазовых переходов*, Функ. анал. и прилож., 4, 44 – 57 (1968).

[17] Р. Л. Добрушин, *Гиббсовские поля. Общий случай*, Функ. анал. и прилож., 1, 27 – 35 (1969).

[18] Р. Л. Добрушин, *Асимптотическое поведение гиббсовских распределений для решетчатых систем в зависимости от формы сосуда*, Теор. Мат. Физ., 12, 115 –134 (1972).

[19] T. Dorlas, Ph. Martin, J. Pule, *Long cycles in a perturbed mean field model of a Boson Gas*, J. Stat. Phys. 121, 433–461 (2005).

[20] M. Duneau, D. Iagolnitzer, B. Souillard, *Decay of correlations for infinite range interactions* J. Math. Phys. 16, 1662–1666 (1975).

[21] M. Duneau, B. Souillard, *Cluster properties of lattice and continuous*

© National Library of Armenia

systems Commun. math. Phys. 47, 155–166 (1976).

[22] M. Fisher, G. Caginalp, *Wall and boundary free energies, I Ferromagnetic scalar spin systems*, Commun. Math. Phys. 56, 11–56 (1977).

[23] I. Gelfand, A. Yaglom, *Integration in functional spaces in quantum physics*, Uspekhi Mat. Nauk 11, 77–114 (1956).

[24] J. Ginibre, *Reduced density matrices of quantum gases. III. Hard-core potentials*, J. Math. Phys. 6, 1432–1446 (1965).

[25] J. Ginibre, *Reduced density matrices of quantum gases. I. Limit of infinite volume*, J. Math. Phys. 6, 238–251 (1965).

[26] J. Ginibre, *Some applications of functional integration in statistical mechanics*, in "Mécanique statistique et théorie quantique des champs", Les Houches 1970, 327–427 (1971).

[27] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum physics. A functional integral point of view*, Springer-Verlag (1981).

[28] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum*, Amer. Math. Monthly 73, 1–23 (1966).

[29] R. Kotecký, D. Preiss, *Cluster expansion for abstract polymer models*, Comm. Math. Phys. 103, 491–498 (1986).

[30] T. Kuna, J. L. Lebowitz, E. R. Speer, *Realizability of point processes* arXiv:math-ph/0612075, 2, 20 Mar 2007.

[31] O. E. Lanford, D. Ruelle *Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics*, Comm. Math. Phys. 13, 194–215 (1969).

[32] T. D. Lee, C. N. Yang *Statistical theory of equations of state and phase transitions, I. Theory of condensation*, Phys. Rev. 87, 404–409 (1952).

[33] N. Macris, P. A. Martin, J. V. Pule, *Large volume asymptotics of Brownian integrals and orbital magnetism*, Ann. Inst. Henry Poincare 66:2, 147–183 (1997).

[34] В. Малышев, Р. Минлос, *Гиббсовские случайные поля*, Наука, Москва (1985).

[35] P. A. Martin, *Bose-Einstein condensation: A mathematically unsolved problem*, Intern. Journal of Theoret. Phys. 44, 11, 2021–2027 (2005).

[36] Р. А. Минлос, *Предельное распределение Гиббса*, Функ. анал. и прилож., 2, 60–73 (1967).

[37] Р. А. Минлос, *Регулярность предельного распределения Гиббса*, Функ.

© National Library of Armenia

анал. и прилож., 1, 40–53 (1967).

[38] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, *Новые результаты о фазовых переходах 1-го рода в моделях решетчатого газа с притяжением между частицами*, Труды Моск. Мат. Общества 17, 213–242 (1967).

[39] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, *Явление разделения фаз при низких температурах в некотрых решетчатых моделях. I*, Матем. сб. 73 3 , 375–448 (1967).

[40] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, *Явление разделения фаз при низких температурах в некотрых решетчатых моделях. II*, Труды Моск. Мат. Общества 19, 113–178 (1968).

[41] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, *Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа*, Теор. Мат. Физ., 2, 2 230–242 (1970).

[42] B. Nahapetian, *Limit theorems and some applications in statistical physics*, Teubner - Verlag, Leipzig (1990).

[43] B. Nahapetian, *Limit theorems and statistical mechanics*, Random Fields Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai 27 (1979).

[44] Б. Нахапетян, *Об одном критерии слабой зависимости*, Теор. вероятн. и прим. 25, 374 – 381 (1980).

[45] C.-E. Pfister, *Large deviations and phase separation in the two-dimensional Ising model*, Helv. Phys. Acta 64, 953–1054 (1991).

[46] С. Погосян, *Асимптотическое разложение логарифма статистической суммы*, Изв. Акад. Наук Арм. ССР 13, 3, 238–263 (1978).

[47] С. Погосян, *Асимптотика распределения числа частиц в гиббсовском ансамбле*, ДАН Арм. ССР 65, 3, 142–144 (1978).

[48] L. Van Hove, *Quelques proprietes generales de l'integrale de configuration d'un systeme de particules avec interaction*, Physica, 15, 951 – 961 (1949)

[49] E. Seiler, *Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory and statistical mechanics*, In Lecture Notes in Physics, Springer (1982).

Работы автора по теме диссертации

[50] В. Арзуманян, Б. Нахапетян, С. Погосян, *Кластерные свойства классических спиновых систем с вакуумом* , Теор. Мат. Физ., 67, 21–31 (1986).

© National Library of Armenia

[51] В. Арзуманян, Б. Нахапетян, С. Погосян, *Асимптотическое разложение логарифма статсуммы в решетчатых спиновых системах с вакуумом*, Теор. Мат. Физ., 81, 175–184 (1989).

[52] V. Arzumanian, B. Nahapetian, S. Poghosyan, *Classical spin lattice systems with vacuum*, Acta Applicandae Mathematicae 22 , 33–53 (1991).

[53] В. Арзуманян, Б. Нахапетян, С. Погосян, *Кластерные свойства решетчатых систем с непрерывным спином*, Докл. Акад. Наук Арм. ССР 80: 5 , 195–199 (1985).

[54] В. Арзуманян, Б. Нахапетян, С. Погосян, *Локальная предельная теорема для числа частиц в решетчатых спиновых системах*, Теор. Мат. Физ., 89 , 178–189 (1991).

[55] С. Фриджио, С. Погосян, *Асимптотика броуновских интегралов и давление. Статистика Бозе-Эйнштейна*, Изв. НАН Армении. Матем. 42, 49 – 68 (2007).

[56] Б. Нахапетян, С. Погосян, *Убывание корреляций в классических решетчатых спиновых системах с вакуумом*, Изв. НАН Армении. Матем. 30, 6, 31 – 46 (1995).

[57] Б. Нахапетян, С. Погосян, *Оценка скорости сходимости в локальной предельной теореме для числа частиц в спиновых системах*, Теор. Мат. Физ., 95 , 497–512 (1993).

[58] С. Погосян, *Вероятности больших уклонений для гиббсовских случайных полей*, Изв. Акад. Наук Арм. ССР 25, 432–447, (1990).

[59] С. Погосян, *Большие уклонения для гиббсовских случайных полей*, Успехи Мат. Наук 36:2, 201—202 (1981).

[60] S. Poghosyan, *Asymptotic expansion of the logarithm of the partition function*, Commun. Math. Phys. 95, 227–245 (1984).

[61] С. Погосян, *Сильные кластерные свойства газа Жинибра. Квантовая статистика.*, Изв. НАН Армении. Матем. 40, 4, 57–79 (2005).

[62] S. Poghosyan, *Asymptotic expansion of the log-partition function for a gas of interacting Brownian loops II*, J. Math. Phys. 51, 073302:1–22 (2010).

[63] S. Poghosyan, *Decay of correlations in a quantum gas with hard core potential*, Markov Processes Relat. Fields 18, 457-–472 (2012)

[64] С. Погосян, *Обобщенная проблема Каца для Бозе газа в многоугольной области*, Изв. НАН Армении. Матем. 45, 1, 12–23 (2010).

[65] S. Poghosyan, H. Zessin, *Decay of correlations of the Ginibre gas obeying*

© National Library of Armenia

Maxwell-Boltzmann statistics, Markov Processes Relat. Fields 7, 561 – 580 (2001).

[66] S. Poghosyan, H. Zessin, *Geometric expansion of the log-partition function for the Ginibre gas obeying Maxwell-Boltzmann statistics*, Markov Processes Relat. Fields 7, 581 – 593 (2001).

[67] С. Погосян, Г. Цессин, *Существование давления для газа Жинибра в n-связных облатях*, Изв. НАН Армении, Мат. 38, 2, 63–72 (2003).

[68] S. Poghosyan, H. Zessin, *Asymptotic expansion of the log-partition function for a gas of interacting Brownian loops*, J. Math. Phys. 48, 093301:1–13 (2007).

[69] С. Погосян, Г. Цессин, *Интегральная характеристика случайных перестановок. Подход, основанный на точечных процессах*, Изв. НАН Армении, Мат. 45, 5, 67 – 76 (2010).

[70] S. Poghosyan, D. Ueltschi, *Abstract cluster expansion with applications to statistical mechanical systems*, J. Math. Phys. 50, 053509: 1–17 (2009).

© National Library of Armenia

Summary

The thesis presents a new general approach to the cluster expansion method, one of the most powerful methods for the study of Gibbs random fields. This approach can be applied to classical and quantum systems both discrete and continuous.

With the help of this method a useful inequality for the abstract two-point semiinvariant is proved. This inequality becomes a basis for other more detailed estimates of two-point semiinvariants of the Gibbs random fields in bounded domains which are proved in this work.

All these estimates are independent of the size of the domain which makes them efficient in the study of asymptotic properties of Gibbs distributions in thermodynamic limit.

The main object of investigation is the partition function of the Gibbs distribution of quantum gases with various statistics.

To apply the bound of abstract semiinvariants to the study of quantum systems, the so-called Feynman - Kac representation of a quantum gas as a system of interacting Brownian loops (interacting loop gas) is used.

For a function of two Brownian loops an integral type decay property is introduced. It is proved that if the classical pair potential has a power decay then the two-point semiinvariant of the corresponding loop gas has the same type of decay.

The cases of repulsive integrable, general stable integrable potentials and potentials with hard core are considered and corresponding bounds for the two-point semiinvariants are obtained.

These bounds are the main technical tool for the derivation of the large volume asymptotic expansion of the log-partition function.

Such expansions are proved for classical gases with pair potential as well as for lattice spin models with general many body potential.

As an application of these results we prove the central local limit theorem, give a bound for the convergence rate and prove the local limit theorem for the probabilities of large deviations of the particle number in a grand canonical ensemble.

The proof of the large volume asymptotics is based on a new method for the derivation of such expansions. This approach, in contrast to the existing ones, uses bounds for the two-point semiinvariants only.

© National Library of Armenia

A modification of this method is applied to derivation of the asymptotic expansion of the log-partition function of quantum gases.

For interacting Bolzmann and the ideal Bose gases in planar domains with smooth boundary it is proved that the coefficients of the expansion depend on the area, the boundary and the Euler-Poincare characteristic of the domain.

By using another method a similar result is obtained also for interacting Bose gas in polygonal domains.

Ամփոփագիր

Ատենախոսությունում առաջարկված է նոր ընդհանուր մոտեցում Գիբսյան պատահական դաշտերի ուսումնասիրման ամենահզոր մեթոդներից մեկի՝ կլաստերային վերլուծությունների մեթոդի նկատմամբ: Այս մոտեցումը կիրառելի է դասական և քվանտային, ինչպես անընդհատ, այնպես նաև ընդհատ համակարգերի համար:

Նշված մեթոդի օգնությամբ ստացված է կարևոր անհավասարություն երկկետանի աբստրակտ սեմիինվարիանտների համար:

Այս անհավասարությունը հիմք է հանդիսանում սահմանափակ տիրույթում Գիբսյան պատահական դաշտերի երկկետանի սեմիինվարիանտների տարբեր գնահատականներ ապացուցելու համար: Այս գնահատականները արդյունավետ են թերմոդինամիկական սահմանում, քանի որ կախված չեն տիրույթի չափսերից:

Ուսումնասիրության հիմնական առարկան է քվանտային գազերի Գիբսյան բաշխումների վիճակագրական գումարը: Դիտարկվում են տարբեր վիճակագրություններ:

Աբստրակտ սեմիինվարիանտների գնահատականը կիրառելու նպատակով օգտագործվում է քվանտային գազի, այսպես կոչված Ֆեյման-Կացի ներկայացումը որպես փոխազդող Բրոունյան օղակների համակարգ:

Երկու Բրոունյան օղակներից ֆունկցիայի համար նկարագրված է ինտեգրալ տիպի նվազման հատկություն, որը հիմնարար դեր է կատարում հետագա դիտարկումներում: Ապացուցված է, որ եթե դասական զույգ պոտենցիալը նվազում է աստիճանային ձևով ապա երկկետանի սեմիինվարիանտն ունի նույն տիպի նվազում:

Դիտարկվում են պոտենցիալների տարբեր դասեր. վանող ինտեգրելի, ընդհանուր կայուն ինտեգրելի, ինչպես նաև պինդ կորիզով: Այս բոլոր դեպքերի համար ապացուցվում են գնահատականներ համապատասխան երկկետանի սեմիինվարիանտների համար:

Նշված գնահատականները հանդիսանում են այն հիմնական տեխնիկական գործիքը, որի միջոցով ստացվում են դասական և քվանտային համակարգերի

© National Library of Armenia

վիճակագրական գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկ վերլուծությունները: Նման տիպի վերլուծություններն ապացուցված են զույգ պոտենցիալով դասական գազերի, ինչպես նաև ընդհատ սպինային մոդելների համար:

Որպես այս արդյունքների կիրառում մենք ապացուցում ենք կենտրոնական լոկալ սահմանային թեորեմ, գնահատում ենք զուգամիտության արագությունը և ապացուցում ենք լոկալ սահմանային թեորեմ սահմանափակ տիրույթում մասնիկների թվի մեծ շեղումների հավանականությունների համար:

Վիճակագրական գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը ապացուցելու համար օգտագործվում է նոր մեթոդ: Այս մոտեցումն ի տարբերություն այլ գոյություն ունեցողների օգտագործում է միայն երկկետանի սեմիինվարիանտների գնահատականները:

Այս մեթոդի կատարելագործված տարբերակը կիրառվում է փոխազդող քվանտային գազի վիճակագրական գումարի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը ապացուցելու համար: Ողորկ սահմաններով հարթ տիրույթներում Բոլցմանի փոխազդող և Բոզեի իդեալական գազերի համար ապացուցված է, որ վերլուծության գործակիցները կախված են տիրույթի մակերեսի, եզրագծի երկարության և Էյլեր-Պուանկարեի բնութագրիչից:

Բազմանկյուն տիրույթում փոխազդող Բոզեի գազի համար ստացված է նման արդյունք այլ մեթոդի կիրառմամբ:

© National Library of Armenia