

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ ԱՆՈՒՇ ՎԱՐԱԶԴՅԱՆԻ

ՀԱԿԱՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԵՎ ՈԼՈՐՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ՏԱՐԲԵՐ
ՏԵՍՔԻ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ
ԼԱՐՎԱԾԱԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա.02.04.- « Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2013

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

ГАСПАРЯН АНУШ ВАРАЗДАТОВНА

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТЫХ
УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ И КРУЧЕНИИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.02.04- « Механика
деформируемого твердого тела»

ЕРЕВАН-2013

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.ս.գ.դ., ՀՀ ԳԱԱ թղթ.-անդամ, պրոֆ. Ս.Մ. Մխիթարյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ տեխն.գիտ.դոկտոր, պրոֆ. Լ.Ա.Մովսիսյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Գ.Զ.Գևորգյան


Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի ճարտարագիտական
պետական համալսարան (Պոլիտեխնիկ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2013թ. ապրիլի 19-ին
Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդում
(Հասցեն՝ 0019, ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2, avсах@mechins.sci.am)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2013թ. մարտի 15-ին

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆ.ս.գ.դ.

 Ա.Վ. Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: член-корр. НАН РА, д.ф.м.н., профессор С.М. Мхитарян

Официальные оппоненты доктор техн. наук, проф. Л.А.Мовсисян
кандидат физ.-мат. наук Г.З.Геворкян


Ведущая организация: Государственный инженерный
университет Армении (Политехник)

Защита состоится 19 апреля 2013 года
Адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2, avсах@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 15 марта 2013 года

Ученый секретарь
специализированного совета
д.ф.м.н.

 А.В.Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В последние десятилетия наряду с традиционными однородными материалами типа металлов, древесин, резин и прочих, в машиностроении, в авиации, в строительстве и других областях инженерной практики стали широко применяться новые конструкционные материалы-композиты, обладающие дискретной или непрерывной неоднородностью, с наперед заданными конструктивно выгодными физико-механическими свойствами. С другой стороны, в последние годы внимание многих исследователей привлекают проблемы, связанные с деформируемыми слоистыми телами. Это объясняется тем, что такими моделями описываются многие реальные объекты в строительной механике, гидротехнике и других отраслях практики. Так, модель многослойного основания учитывает истинные свойства грунта лучше, чем широко применяемая в расчетных схемах модель однородного упругого полупространства. Развитие методов механики деформируемых многослойных систем также обуславливается необходимостью построения и оценки погрешностей прикладных теорий слоистых конструкций, широко применяемых в современной технике.

Растущие запросы инженерной практики, с одной стороны, и внутренняя логика развития теории упругости, с другой стороны, привели к формированию обширной области механики деформируемого твердого тела - теории упругости неоднородных тел. При этом, в равной мере, представляют интерес как непрерывно неоднородные, так и дискретно неоднородные тела. С непрерывной неоднородностью приходится иметь дело, например, в задачах температурных напряжений, когда необходимо учитывать изменение физико-математических характеристик в зависимости от температурного поля, в задачах механики грунтов, когда грунт моделируется как среда с непрерывно изменяющимися по глубине характеристиками, в задачах, связанных с поверхностной обработкой металлов, в геофизических и сейсмологических исследованиях. Дискретная неоднородность встречается в армированных средах, в составных конструкциях, в слоистых грунтах и т.д.

Особенно большой теоретический и практический интерес представляют контактные задачи для непрерывно неоднородных и дискретно неоднородных оснований, встречающихся в расчетах фундаментов дорожных и аэродромных покрытий, составных и армированных конструкций, конструкций, подвергнутых поверхностной обработке в виде нанесения тонкого слоя из более прочного материала или работающих при больших градиентах температур.

Актуальность темы. Несмотря на многочисленные исследования обширных классов задач теории упругости дискретно неоднородного и непрерывно неоднородного тела при различных видах деформаций, почти не исследованы задачи для неоднородного тела при антиплоской деформации. Между тем, исследование задач для слоистых или непрерывно неоднородных тел при антиплоской деформации представляет самостоятельный интерес. Кроме того, при деформации цилиндрических и призматических тел, нагруженных по своим боковым поверхностям, напряженно-деформированное состояние таких тел вдали от мест приложения нагрузок асимптотически представляется суммой плоской и антиплоской деформаций. При этом, зачастую компонента антиплоской деформации оказывается доминирующей. Поэтому исследование задач о напряженно-деформированном состоянии упругих неоднородных тел при антиплоской деформации представляет собой актуальную и востребованную тематику.

Цель работы. Диссертационная работа посвящена исследованию задач о напряженно-деформированном состоянии слоистых композитов разных форм при антиплоской деформации и кручении. Рассмотрены композиты в виде пакета из произвольного конечного числа бесконечных упругих слоев и из произвольного конечного числа упругих круговых слоев при антиплоской деформации, а также композиты в виде пакета из произвольного конечного числа упругих круговых дисков и кольцевых дисков при кручении. При этом, предполагается, что слои имеют различные физические и геометрические характеристики.

Научная новизна. Научная новизна полученных в диссертации результатов заключается в следующем:

а) исследован достаточно широкий класс задач о напряженно-деформированном состоянии прямолинейно и цилиндрически слоистых упругих тел при антиплоской деформации и при кручении;

б) обоснованы модели Мелана и Винклера для тонкого упругого слоя при антиплоской деформации;

в) развито применение математического аппарата конечно-разностных уравнений второго порядка, интеграла Шварца и рядов Лорана к граничным задачам теории упругости.

Достоверность и практическая ценность результатов работы. Все результаты диссертации получены строгими методами математической теории упругости, математического анализа, теории интегральных преобразований, находятся в соответствии со смежными результатами теории упругости, обоснованы и достоверны. Эти результаты могут быть использованы в дальнейших теоретических исследованиях и в решениях прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- международной школе-конференции молодых ученых “Механика 2009”, Агавнадзор, Армения, 2009г.
- международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Дилижан, Армения, 2010).
- II-ой международной научно-технической конференции «Архитектура и строительство – актуальные проблемы» (Джермук, Армения, 2010).
- семинарах имени Н.Х.Арутюняна Института механики НАН РА (Ереван, 2009-2011г.),

Диссертационная работа в целом обсуждена на заседании отдела “Механики упругих и вязкоупругих тел” Института механики НАН РА и на общем семинаре Института механики НАН РА. (Ереван, 2012г, 2013г.).

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 5 научных статей, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, кратких выводов и списка цитируемой литературы. Общий объем работы составляет 122 страниц печатного текста и содержит 24 фигуры и 3 таблицы, а список литературы содержит 90 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность задач, рассмотренных в диссертационной работе, сформулированы цель и круг обсуждаемых в ней вопросов, дан краткий обзор основных работ, методов и результатов теории упругости неоднородного тела, примыкающих к данному исследованию и изложено краткое содержание диссертации.

В первой главе рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии слоистых композитов при антиплоской деформации. Глава состоит из четырех параграфов. Первые два из них носят вспомогательный характер. **В первом параграфе** приведены основные уравнения линейной теории упругости в декартовых и цилиндрических координатах, из них выведены соответствующие уравнения при антиплоской деформации, которые в дальнейшем использованы в работе.

Во втором параграфе изложены некоторые, необходимые для дальнейшего, сведения из теории конечно-разностных уравнений, к которым сводится решение рассмотренных в работе задач. В частности, представлено решение неоднородного конечно-разностного уравнения первого порядка

$$f(x+h) - f(x) + P(x)f(x) = Q(x),$$

где $P(x), Q(x)$ - заданные функции, которое имеет вид

$$f(x) = \prod_{i=0}^{x-1} [1 - P(i)] \left\{ \sum_{t=0}^{x-1} \frac{Q(t)}{\prod_{l=0}^{t-1} [1 - P(l)]} + f(0) \right\},$$

где $f(0)$ - начальное значение искомой функции $f(x)$.

В третьем параграфе рассматривается задача о напряженном состоянии композита, отнесенного к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, и представляющего собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа n бесконечных упругих слоев $\Omega_k = \{-\infty < x, z < \infty, h_{k-1} \leq y \leq h_k\}$ ($k = \overline{1, n}$), с модулями сдвига G_k , когда на граничных плоскостях композита $y = h_0$ и $y = h_n$ действуют касательные силы соответственно $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$, вызывающие антиплоскую деформацию композита в направлении оси Oz . Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите.

Для получения определяющих уравнений задачи применяется два аналитических метода, которые приводят к одному и тому же конечно-разностному уравнению второго порядка.

В первом методе при помощи интегрального преобразования Фурье

$$\left\{ \overline{\tau}_k(\lambda); \overline{w}_k(\lambda, y) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \tau_k(x); w_k(x, y) \right\} e^{i\lambda x} dx,$$

где λ – спектральный параметр Фурье, граничная задача для k -ого слоя пакета

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0 & (-\infty < x < \infty, h_{k-1} < y < h_k) \\ G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_{k-1}} = \tau_{k-1}(x), \quad G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_k} = \tau_k(x) & (-\infty < x < \infty, k = \overline{1, n}). \end{cases}$$

где $w_k = w_k(x, y)$ – единственная, отличная от нуля, компонента смещений в направлении оси Oz , а $\tau_{k-1}(x)$ и $\tau_k(x)$ – неизвестные касательные контактные напряжения соответственно на гранях $y = h_{k-1}$ и $y = h_k$ ($k = \overline{2, n-1}$), приводится к виду

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_k}{dy^2} - \lambda^2 \bar{w}_k = 0 & (h_{k-1} < y < h_k, k = \overline{1, n}) \\ G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}(\lambda), \quad G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_k} = \bar{\tau}_k(\lambda). \end{cases}$$

Далее, решение данной системы, с учетом условия непрерывности смещений на линии контакта двух соседних слоев, сводится к решению конечно-разностного уравнения второго порядка относительно неизвестных $\bar{\tau}_k$ ($k = \overline{1, n-1}$)

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}), \quad (1)$$

где

$$a_k = \frac{1}{G_k \operatorname{sh}(\lambda d_k)}, \quad b_k = \frac{\operatorname{cth}(\lambda d_k)}{G_k}, \quad d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Введением обозначений

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - b_k \bar{\tau}_k = \omega_k, \quad a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} - b_{k+1} \bar{\tau}_k = \chi_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.a)$$

уравнение (1) перейдет в конечно-разностное уравнение первого порядка

$$\omega_k + \chi_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.6)$$

Изложенным во втором параграфе первой главы методом решения уравнений (1.a) и (1.6) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$-\sum_{i=1}^k A_i \frac{C_i}{C_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} = \sum_{i=k}^{n-1} B_i \frac{D_{i+1}}{D_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k = \overline{1, n-1})$$

где

$$a_i \bar{\tau}_{i-1} - b_i \bar{\tau}_i = \omega_i, \quad A_i = G_i \operatorname{th}(\lambda d_i), \quad C_i = \prod_{r=1}^i \operatorname{ch}(\lambda d_r) \quad (i = \overline{1, n})$$

$$B_i = G_{i+1} \operatorname{sh}(\lambda d_{i+1}), \quad D_i = \prod_{r=i}^{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{r+1}).$$

Надлежащими обозначениями данная система преобразуется к системе уравнений с левой треугольной матрицей, которая, далее, легко решается. После определения $\bar{\tau}_k$ ($k = \overline{1, n-1}$) определяется

$$\bar{w}_k = \frac{\bar{\tau}_k \operatorname{ch} \lambda(y - h_{k-1}) - \bar{\tau}_{k-1} \operatorname{ch} \lambda(h_k - y)}{\lambda G_k \operatorname{sh} \lambda(h_k - h_{k-1})} \quad (k = \overline{1, n}),$$

а дальше, при помощи обратного преобразования Фурье, определяются функции контактных напряжений и смещений

$$\tau_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\tau}_k(\lambda) e^{-i\lambda x} dx \quad (k = \overline{1, n-1})$$

$$w_k(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}_k(\lambda, y) e^{-i\lambda x} dx \quad (k = \overline{1, n}).$$

Второй подход основан на применении свойств голоморфных в полосе функций с использованием формулы Шварца. Сначала из известной формулы Шварца для представления голоморфной в полосе $\Pi = \{-\infty < \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq 1\}$ функции

$$g(\zeta) = \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(\tau - \zeta)}{2} q_0(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(\tau - \zeta)}{2} q_1(\tau) d\tau \right) + iC,$$

где $q_0(\tau)$ и $q_1(\tau)$ граничные значения действительной части функции $g(\zeta)$, соответственно, на прямых $\zeta = \tau$ и $\zeta = \tau + i$, C - произвольная вещественная постоянная, а первый интеграл при $\tau = \zeta$ понимается в смысле главного значения по Коши, выводится формула для представления голоморфной в полосе $\Pi_k = \{h_{k-1} \leq y \leq h_k\}$ ($k = \overline{1, n}$) функции

$$l_k(z) = \frac{1}{2i(h_k - h_{k-1})} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(t - z + ih_{k-1})}{2(h_k - h_{k-1})} u_{k-1}(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi(t - z + ih_{k-1})}{2(h_k - h_{k-1})} u_k(t) dt \right] + iC,$$

$$\text{где } u_k(t) = q_1 \left(\frac{t - h_{k-1}}{h_k - h_{k-1}} \right), \quad u_{k-1}(t) = q_0 \left(\frac{t - h_{k-1}}{h_k - h_{k-1}} \right).$$

Затем, учитывая гармоничность функций w_k , а также связь между гармоничными и голоморфными функциями и применяя интегральное преобразование Фурье, решение задачи опять сводится к решению конечно-разностного уравнения второго порядка (1).

Обсуждается также соответствующая смешанная граничная задача, когда на нижней граничной плоскости композита опять заданы касательные силы, а на верхней граничной плоскости - смещения, т. е.

$$\tau_{yz} \Big|_{y=h_0} = G_1 \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h_0} = \tau_0(x), \quad w_n(x, y) \Big|_{y=h_n} = w_n(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $w_n(x)$ – наперед заданная функция. В этом случае все предыдущие результаты остаются в силе, кроме результатов для последнего слоя, для которого имеют место смешанные граничные условия:

$$G_n \frac{\partial w_n(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h_{n-1}} = \tau_{n-1}(x), \quad w_n(x, y) \Big|_{y=h_n} = w_n(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

В трансформантах Фурье для последнего слоя получается краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_n}{dy^2} - \lambda^2 \bar{w}_n = 0 & (h_{n-1} < y < h_n) \\ G_n \frac{d\bar{w}_n}{dy} \Big|_{y=h_{n-1}} = \bar{\tau}_{n-1}, \quad \bar{w}_n(\lambda, y) \Big|_{y=h_n} = \bar{w}_n. \end{cases}$$

Тогда

$$\bar{w}_n(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda G_n \operatorname{ch}(\lambda d_n)} \left[\lambda G_n \bar{w}_n \operatorname{ch} \lambda(y - h_{n-1}) - \bar{\tau}_{n-1} \operatorname{sh} \lambda(h_n - y) \right]$$

С другой стороны

$$\bar{w}_{n-1}(\lambda, h_{n-1}) = \frac{\bar{\tau}_{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{n-1}) - \bar{\tau}_{n-2}}{\lambda G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda d_{n-1})}.$$

Далее, из условия непрерывности смещений на линии контакта двух последних слоев в образах Фурье получим

$$\bar{\tau}_{n-2} = G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda d_{n-1}) \left\{ \left[\frac{\operatorname{cth}(\lambda d_{n-1})}{G_{n-1}} + \frac{\operatorname{th}(\lambda d_n)}{G_n} \right] \bar{\tau}_{n-1} - \frac{\lambda_n \bar{w}_n}{\operatorname{ch}(\lambda d_n)} \right\}. \quad (2)$$

В данном случае смешанной краевой задачи сначала строится решение конечно-разностного уравнения (1) при $k = \bar{1}, n-2$. Затем решение $\bar{\tau}_{n-2}$, которое выражается через $\bar{\tau}_0$ и $\bar{\tau}_{n-1}$, следует подставить в (2), откуда определится $\bar{\tau}_{n-1}$. Далее, из условия на свободной грани последнего слоя, найдем $\bar{\tau}_n$:

$$\bar{\tau}_n = G_n \frac{d\bar{w}_n}{dy} \Big|_{y=h_n} = \lambda G_n \bar{w}_n \operatorname{th}(\lambda d_n) + \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\operatorname{ch}(\lambda d_n)}.$$

В частности, когда грань $y = h_n$ жестко закреплена, то $w_n(x) \equiv 0$ и

$$\bar{\tau}_{n-2} = G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda d_{n-1}) \left[\frac{\operatorname{cth}(\lambda d_{n-1})}{G_{n-1}} + \frac{\operatorname{th}(\lambda d_n)}{G_n} \right] \bar{\tau}_{n-1}, \quad \bar{\tau}_n = \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\operatorname{ch}(\lambda d_n)}.$$

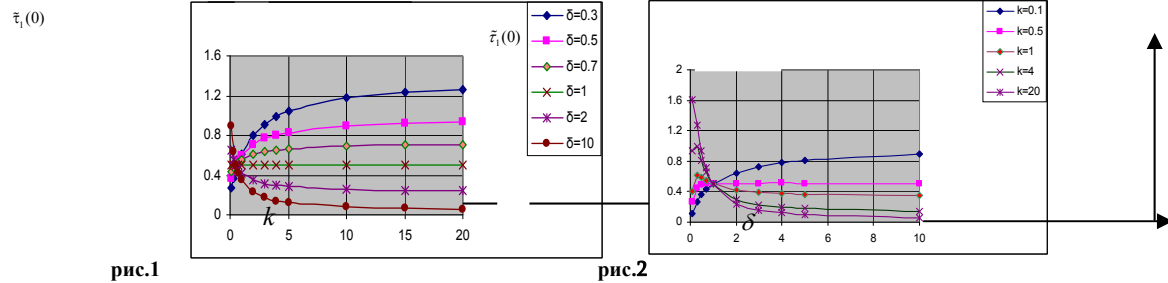
Рассматривается также частный случай двухслойного композита. Из полученных результатов выведены уравнения деформирования тонкого упругого слоя, описыва-

ющие известные модели Мелана и Винклера. В частности, показано, что когда на гранях двухслойного композита действуют сосредоточенные силы

$$\tau_0(x) = \tau_2(x) = T\delta(x), \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, то при $G_1 = G_2$, т.е. когда слои однородные, сосредоточенная сила из верхнего слоя непосредственно передается нижнему слою.

Представлены числовые результаты, показывающие ход изменения напряжения в зависимости от отношения модулей сдвига (рис. 1) и отношения высот контактирующих слоев (рис. 2). В частности, когда слои имеют равные высоты, то напряжение не зависит от отношения модулей сдвига слоев G_2/G_1 .



В четвертом параграфе рассматривается задача о напряженном состоянии, кусочно-однородного цилиндрического композита в виде пакета из произвольного конечного n числа спаянных по боковым поверхностям круговых цилиндров

$\Omega_k = \{r_{k-1} \leq r \leq r_k, -\infty < z < \infty, -\pi < \theta \leq \pi\}$ ($k = \overline{1, n}$). На крайних граничных поверхностях композита приложены касательные силы $\tau_0(\theta)$ и $\tau_n(\theta)$, вызывающие антиплоскую деформацию. Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите.

К решению указанной задачи опять применяется два подхода. При первом из них граничная задача для k -ого кругового слоя

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \theta^2} = 0 & (r_{k-1} < r < r_k) \\ G_k \frac{\partial w_k}{\partial r} \Big|_{r=r_{k-1}} = \tau_{k-1}(\theta), \quad G_k \frac{\partial w_k}{\partial r} \Big|_{r=r_k} = \tau_k(\theta) & (-\pi < \theta \leq \pi, k = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (3)$$

где $w_k = w_k(r, \theta)$ ($k = \overline{1, n}$) - единственная, отличная от нуля, компонента смещений в направлении оси Oz , а $\tau_{k-1}(\theta)$ и $\tau_k(\theta)$ - неизвестные касательные контактные напряжения, соответственно, на гранях $r = r_{k-1}$ и $r = r_k$ k -ого элемента пакета ($k = \overline{2, n-1}$), G_k - модуль сдвига k -ого цилиндра, при помощи комплексных рядов Фурье для функций

$$w_k(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{w}_m^{(k)}(r) e^{im\theta} \quad (k = \overline{1, n}), \quad \tau_k(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\tau}_m^{(k)} e^{im\theta} \quad (k = \overline{0, n})$$

где

$$\overline{w}_m^{(k)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(r, \theta) e^{-im\theta} d\theta \quad \overline{\tau}_m^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau_k(\theta) e^{-im\theta} d\theta, \quad (-\infty < m < \infty)$$

преобразуется в одномерную граничную задачу

$$\begin{cases} \frac{d^2 \overline{w}_m^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \overline{w}_m^{(k)}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \overline{w}_m^{(k)} = 0 & (r_{k-1} < r < r_k, \quad k = \overline{1, n}) \\ G_k \left. \frac{d \overline{w}_m^{(k)}}{dr} \right|_{r=r_{k-1}} = \overline{\tau}_m^{(k-1)}, \quad G_k \left. \frac{d \overline{w}_m^{(k)}}{dr} \right|_{r=r_k} = \overline{\tau}_m^{(k)}. \end{cases}$$

Затем, учитывая условие непрерывности смещений на линии контакта двух соседних слоев, решение этой задачи при $m \neq 0$ сводится к решению системы конечно-

$$a_m^{(k)} \overline{\tau}_m^{(k-1)} + (r_{k+1}/r_k)^2 a_{m+1}^{(k)} \overline{\tau}_m^{(k+1)} - (b_m^{(k)} + b_{m+1}^{(k)}) \overline{\tau}_m^{(k)} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (4)$$

где

$$a_m^{(k)} = \frac{2}{G_k} \frac{r_k^{m-1} r_{k-1}^{m+1}}{r_k^{2m} - r_{k-1}^{2m}}, \quad b_m^{(k)} = \frac{1}{G_k} \frac{r_k^{2m} + r_{k-1}^{2m}}{r_k^{2m} - r_{k-1}^{2m}} \quad (k = \overline{1, n}).$$

И, наконец, методом, описанным во втором параграфе первой главы, эта система далее сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$-\sum_{i=1}^k A_i^{(m)} \frac{C_i^{(m)}}{C_k^{(m)}} \omega_m^{(i)} + \frac{\overline{\tau}_m^{(0)}}{C_k^{(m)}} = \sum_{i=k}^{n-1} B_i^{(m)} \frac{D_{i+1}^{(m)}}{D_k^{(m)}} \omega_m^{(i)} + \frac{\overline{\tau}_m^{(n)}}{D_k^{(m)}} \quad (k = \overline{1, n-1})$$

где

$$A_i^{(m)} = G_i \frac{r_i^{2m} - r_{i-1}^{2m}}{r_i^{2m} + r_{i-1}^{2m}}, \quad (i = \overline{1, k}) \quad B_i^{(m)} = \frac{G_{i+1}}{2} \frac{r_{i+1}^{2m} - r_i^{2m}}{r_{i+1}^{m+1} r_i^{m-1}} \quad (i = \overline{k, n-1})$$

$$C_i^{(m)} = \prod_{j=1}^i \frac{r_j^{2m} + r_{j-1}^{2m}}{2r_j^{m-1} r_{j-1}^{m+1}}, \quad (i = \overline{1, k}) \quad D_i^{(m)} = \prod_{j=i}^{n-1} \frac{r_j^{2m} + r_{j+1}^{2m}}{2r_{j+1}^{m+1} r_j^{m-1}} \quad (i = \overline{k, n-1})$$

$$a_m^{(k)} \overline{\tau}_m^{(k-1)} - b_m^{(k)} \overline{\tau}_m^{(k)} = \omega_m^{(k)}$$

В конечном итоге решение задачи сводится к системе алгебраических уравнений с треугольной матрицей откуда определяются $\overline{\tau}_m^{(k)}$ ($k = \overline{1, n-1}$). При этом

$$\overline{w}_m^{(k)} = \frac{(r^{2m} + r_{k-1}^{2m}) r_k^{m+1} \overline{\tau}_m^{(k)} - (r^{2m} + r_k^{2m}) r_{k-1}^{m+1} \overline{\tau}_m^{(k-1)}}{m G_k r^m (r_k^{2m} - r_{k-1}^{2m})} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Для $m = 0$ получаются соотношения

$$\overline{\tau}_0^{(k)} = \frac{r_{k-1}}{r_k} \overline{\tau}_0^{(k-1)} = \frac{r_0}{r_k} \overline{\tau}_0^{(0)} = \frac{r_n}{r_k} \overline{\tau}_0^{(n)}$$

$$B_0^{(k+1)} - B_0^{(k)} = \frac{r_n \overline{\tau}_0^{(n)} \ln r_k}{G_{k+1} G_k} (G_k - G_{k+1}) = \frac{r_0 \overline{\tau}_0^{(0)} \ln r_k}{G_{k+1} G_k} (G_k - G_{k+1}) .$$

Затем определяются функции

$$w_k(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{w}_m^{(k)}(r) e^{im\theta} \quad (k = \overline{1, n}) \quad \tau_k(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\tau}_m^{(k)} e^{im\theta} \quad (k = \overline{1, n-1}) .$$

Второй подход основан на свойствах голоморфных в кольце функций, в частности, на их разложении в ряды Лорана. Рассматривается кольцо $\Pi_k = \{r_{k-1} < r < r_k\}$ ($k = \overline{1, n}$), и так как функция $G_k w_k(r, \theta)$ гармонична в Π_k , то ее можно представить в виде ряда

$$G_k w_k(r, \theta) = A_k \ln r + \operatorname{Re} C_0^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(C_m^{(k)} r^m + \overline{C}_{-m}^{(k)} r^{-m} \right) e^{im\theta}$$

где $C_m^{(k)}$ - коэффициенты ряда Лорана соответствующей голоморфной в кольце Π_k функции $G_k w_k(r, \theta)$, а A_k - произвольные вещественные постоянные ($k = \overline{1, n}$).

Далее, разлагая в ряд Фурье функцию

$$\tau_k(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\tau}_m^{(k)} e^{im\theta} \quad (k = \overline{0, n}), \quad \text{где} \quad \overline{\tau}_m^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau_k(\theta) e^{-im\theta} d\theta$$

из граничных условий задачи (3) при $m \neq 0$ определяются

$$C_m^{(k)} = \frac{2}{m} \frac{\overline{\tau}_m^{(k)} r_k^{m+1} - \overline{\tau}_m^{(k-1)} r_{k-1}^{m+1}}{r_k^{2m} - r_{k-1}^{2m}}; \quad \overline{C}_{-m}^{(k)} = \frac{2}{m} \frac{\overline{\tau}_m^{(k)} r_k^{m+1} r_{k-1}^{2m} - \overline{\tau}_m^{(k-1)} r_k^{2m} r_{k-1}^{m+1}}{r_k^{2m} - r_{k-1}^{2m}} .$$

С учетом условия непрерывности смещений на линии контакта двух соседних слоев получается система конечно-разностных неоднородных уравнений второго порядка (4) при $m \neq 0$, а при $m = 0$ - соотношения

$$A_k = \overline{\tau}_m^{(k-1)} r_{k-1} = \overline{\tau}_m^{(k)} r_k = \overline{\tau}_0^{(0)} r_0 = \overline{\tau}_0^{(n)} r_n, \quad (k = \overline{1, n})$$

$$G_{k+1} \operatorname{Re} C_0^{(k)} - G_k \operatorname{Re} C_0^{(k+1)} = r_0 \overline{\tau}_0^{(0)} \ln r_k (G_{k+1} - G_k) \quad (k = \overline{1, n}) .$$

Рассмотрен также частный случай композита из двух цилиндрических слоев. Для случая, когда на верхнюю и нижнюю грани действуют сосредоточенные силы соответственно интенсивностей

$$\tau_0(\theta) = T\delta(\theta) \quad \text{и} \quad \tau_2(\theta) = \frac{r_0}{r_2} T\delta(\theta),$$

проведен численный анализ и изучена зависимость контактного касательного напряжения от отношения модулей сдвига $\mu = G_2/G_1$ слоев, от угла θ , а также от

отношения радиусов $\rho_0 = r_0/r_1$ и $\rho_2 = r_2/r_1$. В частности, результаты анализа показали, что

1. при однородных слоях сила, приложенная на нижней грани композита, в точности передается на верхнюю грань
2. при условии $\rho_0 = 1/\rho_2$ напряжение на линии контакта слоев в точке $\theta = 0$ не зависит от отношения модулей сдвига слоев (рис. 3 и 4).

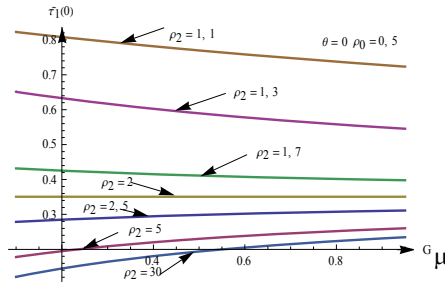


рис.3

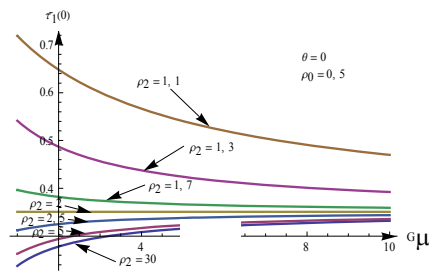


рис.4

Во второй главе рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии многослойных упругих композитов при кручении. Глава состоит из трех параграфов. Первый параграф носит вспомогательный характер, где выведены основные уравнения теории упругости при кручении в цилиндрических координатах, которые далее применены в работе.

Во втором параграфе второй главы рассматривается задача о стесненном кручении составного круглого цилиндра конечной длины, на крайних торцах которого приложены крутящие касательные нагрузки произвольных интенсивностей $\tau_0(r)$ и $\tau_n(r)$, а боковая поверхность жестко защемлена. Цилиндр представляет собой пакет из произвольного конечного числа n , спаянных между собой торцами, круговых дисков $\Omega_k = \{0 \leq r \leq a, l_{k-1} \leq z \leq l_k, -\pi < \varphi \leq \pi\}$ ($k = \overline{1, n}$).

Для k -ого элемента пакета Ω_k сформулирована граничная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_k}{\partial r} - \frac{v_k}{r^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} = 0 \\ G_k \frac{\partial v_k}{\partial z} \Big|_{z=l_{k-1}} = \tau_{k-1}(r), \quad G_k \frac{\partial v_k}{\partial z} \Big|_{z=l_k} = \tau_k(r) \\ v_k(a, z) = 0 \end{cases}$$

где $v_k = v_k(r, z)$ ($k = \overline{1, n}$) – единственная, отличная от нуля, компонента смещений в окружном направлении при кручении, а $\tau_{k-1}(r)$ и $\tau_k(r)$ – неизвестные касательные контактные напряжения на торцах $z = l_{k-1}$ и $z = l_k$, ($k = \overline{2, n-1}$) k -ого диска, G_k – модуль сдвига k -ого диска.

При помощи интегрального преобразования Фурье-Ханкеля

$$\{\bar{v}_k(z, \lambda_i); \bar{\tau}_k(\lambda_i)\} = \int_0^a \{v_k(r, z); \tau_k(r)\} r J_1(r \lambda_i) dr$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя первого рода индекса 1, а λ_i – корни уравнения $J_1(a \lambda_i) = 0$, данная граничная задача преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{v}_k}{dz^2} - \lambda_i^2 \bar{v}_k = 0 & (l_{k-1} < z < l_k, \quad k = \overline{1, n}) \\ G_k \left. \frac{d \bar{v}_k}{dz} \right|_{z=l_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}, \quad G_k \left. \frac{d \bar{v}_k}{dz} \right|_{z=l_k} = \bar{\tau}_k, \end{cases}$$

где $\bar{v}_k = \bar{v}_k(z, \lambda_i)$, $\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_k(\lambda_i)$.

Решение этой задачи сводится к решению конечно-разностного уравнения второго порядка относительно неизвестных $\bar{\tau}_k$ ($k = \overline{1, n-1}$)

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

где

$$a_k = \frac{1}{G_k \operatorname{sh}(\lambda_i d_k)} \quad b_k = \frac{\operatorname{cth}(\lambda_i d_k)}{G_k} \quad k = (\overline{1, n}).$$

Далее, данное уравнение сводится к системе алгебраических уравнений

$$A_k f_k + \sum_{m=1}^{k-1} A_m \frac{C_m}{C_k} f_m + \sum_{m=k}^{n-1} B_m \frac{D_{m+1}}{D_k} f_m = \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} - \frac{\bar{\tau}_n}{D_k}, \quad (k = \overline{1, n-1})$$

где

$$A_m = G_m \operatorname{th}(\lambda_i d_i), \quad (m = \overline{1, k}), \quad B_m = G_{m+1} \operatorname{sh}(\lambda_i d_{m+1}), \quad (m = \overline{k, n-1})$$

$$C_m = \prod_{r=1}^m \operatorname{ch}(\lambda_i d_r), \quad (m = \overline{1, k}), \quad D_m = \prod_{r=m}^{n-1} \operatorname{ch}(\lambda_i d_{r+1}), \quad (m = \overline{k, n-1})$$

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - b_k \bar{\tau}_k = f_k.$$

Последняя же система, в свою очередь, сводится к системе уравнений с треугольной матрицей, после решения которой при помощи обратного преобразования

Фурье-Ханкеля определяются контактные касательные напряжения и смещения:

$$\tau_k(r) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(r\lambda_i) \bar{\tau}_k(\lambda_i)}{[J_1'(a\lambda_i)]^2} \quad (k = \overline{1, n-1})$$

$$v_k(r, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(r\lambda_i) \bar{v}_k(\lambda_i, z)}{[J_1'(a\lambda_i)]^2} \quad (k = \overline{1, n-1}).$$

Рассмотрен частный случай двухслойного композита. Для случая, когда композит скручивается постоянными силами

$$\tau_0(r) = \tau_2(r) = P, \quad 0 < r < a$$

примененными на крайних торцах, проведен численный анализ и изучена зависимость контактного напряжения $\tilde{\tau}_1(\rho)$ на линии контакта слоев от отношения модулей сдвига слоев $\mu = G_2/G_1$, от величины $\rho = r/a$ и от толщин дисков. Анализ, в частности, показал, что если толщины обоих дисков композита равны, то напряжение на линии контакта не зависит от отношения модулей сдвига дисков (рис. 5 и 6).

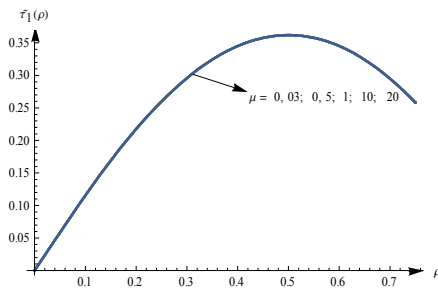


рис. 5

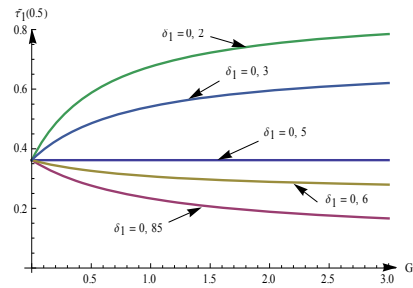


рис. 6

В третьем параграфе второй главы исследуется задача о напряженно-деформированном состоянии полого кусочно-однородного по образующей упругого круглого цилиндра конечной длины, являющимся пакетом из произвольного конечного числа кольцевых дисков с различными упругими и геометрическими характеристиками, спаянных между собой торцами. Композит скручивается произвольными нагрузками интенсивностей $\tau_0(r)$ и $\tau_n(r)$, приложенными к крайним торцам составного цилиндра.

Для k -ого диска композита граничная задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_k}{\partial r} - \frac{v_k}{r^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} = 0 \\ G_k \frac{\partial v_k}{\partial z} \Big|_{z=l_{k-1}} = \tau_{k-1}(r), \quad G_k \frac{\partial v_k}{\partial z} \Big|_{z=l_k} = \tau_k(r) \\ (a \leq r \leq b, \quad l_{k-1} < z < l_k, \quad k = \overline{1, n}) \end{cases}$$

где $v_k = v_k(r, z)$, ($k = \overline{1, n}$) – единственная, отличная от нуля, компонента смещений в окружном направлении при кручении, а $\tau_{k-1}(r)$ и $\tau_k(r)$ – неизвестные касательные контактные напряжения на торцах $z = l_{k-1}$ и $z = l_k$, ($k = \overline{2, n}$) k -ого диска, G_k – модуль сдвига k -ого диска.

При помощи интегрального преобразования Фурье-Ханкеля

$$\{\bar{v}_k(z, \lambda_i); \bar{\tau}_k(\lambda_i)\} = \int_a^b \{v_k(r, z); \tau_k(r)\} r Z_1(r \lambda_i) dr,$$

где $Z_1(x \lambda_i) = J_1(x \lambda_i) N_1(a \lambda_i) - N_1(x \lambda_i) J_1(a \lambda_i)$, $J_1(x)$ и $N_1(x)$ – функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго рода, а λ_i – корни уравнения $J_1(a \lambda_i) N_1(b \lambda_i) - N_1(a \lambda_i) J_1(b \lambda_i) = 0$, вышеуказанная граничная задача опять сводится к решению конечно-разностного уравнения

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

где

$$a_k = \frac{1}{G_k \operatorname{sh}(\lambda_i d_k)} \quad b_k = \frac{\operatorname{cth}(\lambda_i d_k)}{G_k} \quad k = \overline{1, n}.$$

Затем данное уравнение решается методом, описанным в предыдущем параграфе. Далее, при помощи формул обратного преобразования Фурье-Ханкеля определяются функции

$$\begin{aligned} \tau_k(r) &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 J_1^2(a \lambda_i) \bar{\tau}_k(\lambda_i)}{J_1^2(b \lambda_i) - J_1^2(a \lambda_i)} (J_1(r \lambda_i) N_1(b \lambda_i) - N_1(r \lambda_i) J_1(b \lambda_i)) \\ v_k(z, r) &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 J_1^2(a \lambda_i) \bar{v}_k(\lambda_i)}{J_1^2(b \lambda_i) - J_1^2(a \lambda_i)} (J_1(r \lambda_i) N_1(b \lambda_i) - N_1(r \lambda_i) J_1(b \lambda_i)) \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Рассматривается также смешанная задача, когда на одном крайнем торце заданы касательные силы, а на другом – смещения, т. е.

$$\tau_{z\varphi}(r, z) \Big|_{z=l_0} = \tau_0(r), \quad v(r, z) \Big|_{z=l_n} = v_n(r) \quad (a \leq r \leq b),$$

где $V_n(r)$ - наперед заданная функция.

В трансформантах Фурье-Ханкеля для n -ого кольцевого диска пакета получается одномерная граничная задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{v}_n}{dz^2} - \lambda_i^2 \bar{v}_n = 0 & (l_{n-1} < z < l_n) \\ G_n \frac{d\bar{v}_n}{dz} \Big|_{z=l_{n-1}} = \bar{\tau}_{n-1}, \quad \bar{v}_n(\lambda_i, z) \Big|_{z=l_n} = \bar{v}_n, \end{cases},$$

решение которой имеет вид

$$\bar{v}_n(\lambda_i, z) = \frac{1}{\lambda_i G_n \operatorname{ch}(\lambda_i d_n)} \left[\lambda_i G_n \bar{v}_n \operatorname{ch} \lambda_i (z - l_{n-1}) + \bar{\tau}_{n-1} \lambda_i \operatorname{sh} \lambda_i (z - l_n) \right].$$

$(l_{n-1} < z < l_n)$

Далее,

$$\bar{v}_{n-1}(\lambda_i, l_{n-1}) = \frac{\bar{\tau}_{n-1} \operatorname{ch}(\lambda_i d_{n-1}) - \bar{\tau}_{n-2}}{\lambda_i G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda_i d_{n-1})}.$$

Поступая аналогичным образом, как в третьем параграфе первой главы, найдены

$$\bar{\tau}_{n-2} = G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda_i d_{n-1}) \left\{ \left[\frac{\operatorname{cth}(\lambda_i d_{n-1})}{G_{n-1}} + \frac{\operatorname{th}(\lambda_i d_n)}{G_n} \right] \bar{\tau}_{n-1} - \frac{\lambda_i \bar{v}_n}{\operatorname{ch}(\lambda_i d_n)} \right\}$$

$$\bar{\tau}_n = G_n \frac{d\bar{v}_n}{dz} \Big|_{z=l_n} = \lambda_i G_n \bar{v}_n \operatorname{th}(\lambda_i d_n) + \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\operatorname{sh}(\lambda_i d_n)}.$$

В частности, когда крайний торец $z = l_n$ жестко защемлен, то $V_n(r) \equiv 0$ и

$$\bar{\tau}_{n-2} = G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda_i d_{n-1}) \left[\frac{\operatorname{cth}(\lambda_i d_{n-1})}{G_{n-1}} + \frac{\operatorname{th}(\lambda_i d_n)}{G_n} \right] \bar{\tau}_{n-1}, \quad \bar{\tau}_n = \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\operatorname{ch}(\lambda_i d_n)}.$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Основные результаты и выводы диссертационной работы состоят в следующем:

- Исследован довольно широкий класс задач о напряженно-деформированном состоянии прямолинейных и цилиндрических упругих слоистых тел, представляющих собой пакет из произвольного конечного числа слоев с различными упругими и геометрическими характеристиками, при антиплоской деформации и при кручении.
- Для получения определяющих уравнений задач при антиплоской деформации применены два аналитических метода, приводящих к одному и тому же конечно-разностному уравнению. Для прямолинейного упругого тела при первом методе применяется интегральное преобразование Фурье, а второй основан на формуле Шварца представления голоморфной в полосе функции, с сочетанием математического аппарата преобразования Фурье. Для цилиндрического упругого тела при первом методе применяется математический аппарат рядов Фурье, а второй подход основан на представлении голоморфных в круговом кольце функций рядами Лорана.
- На основании Фурье-анализа точных формул для смещений, в трансформантах Фурье выведены уравнения деформирования тонкого упругого слоя при антиплоской деформации, соответствующие известным моделям Мелана и Винклера. Рассмотрен частный случай двухслойного композита и изучены закономерности изменения касательных контактных напряжений, проведен сравнительный анализ точного и приближенного по модели Мелана решений, отмечено их принципиальное совпадение в допустимых пределах. В довольно широком диапазоне изменения двух характерных параметров, представляющих собой отношение модулей сдвига и высот слоев, построена поверхность безразмерного контактного напряжения в начале координат в зависимости от этих двух параметров, причем когда слои имеют одинаковые высоты, контактные напряжения не зависят от отношения модулей сдвига.
- При помощи преобразований Фурье и Фурье-Ханкеля решение рассматриваемых задач сводится к системе конечно-разностных уравнений второго порядка. В свою очередь, решение этих уравнений в конечном итоге сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с левой треугольной матрицей, допускающей точное решение.

Список научных работ по теме диссертации

1. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряженном состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоев при антиплоской деформации.//Известия НАН РА, Механика, т.63, N 2, 2010, с. 10-20.
2. Гаспарян А.В., Давтян З.А. Кручение круглого слоистого цилиндра конечной длины.// Сборник трудов международной школы-конференции молодых ученых 28 сентября – 1 октября 2009 Агавнадзор, Армения, с. 186-189.
3. Гаспарян А.В., Давтян З.А. О напряженном состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих круговых цилиндров при антиплоской деформации.// Сборник научных трудов международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды, 4-8 октября, Дилижан, Армения, т.1, с. 167-171.
4. Гаспарян А.В., Давтян З.А. Кручение полого кусочно-однородного круглого цилиндра конечной длины.// Сборник докладов II международной научно-технической конференции «Архитектура и строительство – актуальные проблемы», 30 сентября-3 октября 2010, Ереван – Джермук, т.1, с. 324-328.
5. Гаспарян А.В. К задаче о напряженном состоянии слоистого композита при антиплоской деформации.// Изв. НАН РА, Механика, т. 64, N3, 2011, с. 3-9.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսությունը նվիրված է երկրաչափական տարբեր տեսք ունեցող շերտավոր առաձգական մարմինների լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնդիրների հետազոտությանը հակահարթ խնդրի և ոլորման ժամանակ:

Հետազոտված է հակահարթ դեֆորմացիայի և ոլորման ժամանակ գծային և գլանային առաձգական շերտավոր մարմինների լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնդիրների բավականին լայն դաս, որոնք իրենցից ներկայացնում են առաձգական և երկրաչափական տարբեր բնութագրիչներ ունեցող կամայական վերջավոր թվով շերտերից բաղկացած փաթեթ:

Դիտարկված են հետևյալ խնդիրները.

1. Կամայական վերջավոր թվով անվերջ գծային շերտերից բաղկացած անհամասեռ կոմպոզիտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը, երբ կոմպոզիտի եզրային մակերևույթների վրա կիրառված հակահարթ դեֆորմացիա ապահովող բաշխված ուժեր:
2. Կողմնային մակերևույթներով միմյանց ամրացված կամայական վերջավոր թվով շրջանային գլաններից բաղկացած կտոր առ կտոր համասեռ կոմպոզիտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ:
3. Եզրերով միմյանց ամրացված կամայական վերջավոր թվով շրջանաձև սկավառակներից բաղկացած գլանային անհամասեռ կոմպոզիտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը ոլորման ժամանակ, երբ կոմպոզիտի կողմնային մակերևույթը կոշտ ամրացված է:
4. Եզրերով միմյանց ամրացված կամայական վերջավոր թվով օղակաձև սկավառակներից բաղկացած գլանային անհամասեռ կոմպոզիտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը ոլորման ժամանակ, երբ կոմպոզիտի կողմնային մակերևույթը կոշտ ամրացված է:

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության կամ շերտում անալիտիկ ֆունկցիաների ներկայացման Շվարցի բանաձևի, Ֆուրյեի շարքերի կամ էլ օղակում անալիտիկ ֆունկցիան Լորանի շարքով ներկայացնելու օգնությամբ դիտարկվող հակահարթ խնդիրների լուծումները հանգեցվել են երկրորդ կարգի վերջավոր տարբերության հավասարումների համակարգի լուծման, որոնք, այնուհետև, ձևափոխվել են ձախ եռանկյունաձև որոշիչով հեշտ լուծվող գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի:

Ֆուրյե-Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխության մաթեմատիկական մեթոդով

կառուցվել են ըստ շտաբի կտոր առ կտոր համասեռ գլանաձև մարմինների ոլորման խնդիրների արդյունավետ լուծումները:

Մասնավորապես, ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝

- Լուծված է հակահարթ դեֆորմացիայի և ոլորման ժամանակ գծային և գլանային առաձգական շերտավոր մարմինների լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնդիրների բավականին լայն դաս
- Հակահարթ դեֆորմացիայի վերաբերյալ խնդիրների լուծման ժամանակ բնութագրիչ հավասարումների ստացման համար կիրառված է երկու տարբեր անալիտիկ մեթոդ, որոնք բերում են վերջավոր տարբերության միևնույն հավասարումների համակարգին: Մասնավորապես, արտածված է Շվարցի բանաձևի անալոգը կամայական շերտում հոլոմորֆ ֆունկցիայի ներկայացման համար:
- Խնդիրներից երեքի համար դիտարկված են երկշերտ կոպոզիտների մասնավոր դեպքերը: Առաձգական և երկրաչափական բնութագրիչ պարամետրերի փոփոխման բավականաչափ լայն միջակայքերում թվային վերլուծությունների օգնությամբ բացահայտվել են շերտերի միջև գործող կոնտակտային լարումների փոփոխման օրինաչափությունները: Մասնավորապես, ստացվել են պայմաններ, որոնց դեպքում կոնտակտային լարումը շերտերի կոնտակտի գծի վրա կախված չէ շերտերի սահմանային մոդուլների հարաբերությունից:
- Ֆուրյե-անալիզի օգնությամբ արտածվել են բարակապատ շերտերի համար Մելանի և Վինկլերի մոդելների բնութագրիչ հավասարումները հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ:
- Ատենախտության մեջ երկրորդ կարգի վերջավոր տարբերության հավասարումների մաթեմատիկական մեթոդը առաձգականության մաթեմատիկական տեսության մեջ ստացել է հետագա որոշ զարգացում :

Stress-Strain State of Layered Elastic Solids of Different Shapes under Anti-plain Deformation and Torsion.

ABSTRACT

The thesis is devoted to the study of stress-strain state of layered elastic solids of different geometrical shapes under anti-plain deformation and torsion.

A wide range of problems on stress-strain state of linear and cylindrical layered elastic solids is investigated under anti-plain deformation and torsion when the solids have a form of a package composed of an arbitrary finite number of layers with different geometrical and elastic characteristics.

The following problems are considered:

1. The stress-strain state of a non-homogeneous composite of an arbitrary finite number of infinite linear layers when on the boundary plains of the composite distributed tangential forces producing an anti-plain deformation are applied;
2. The stress-strain state of a piecewise-homogeneous cylindrical composite of a finite number of circular cylinders welded with each other by their lateral areas under anti-plain deformation;
3. The stress-strain state of a multilayered composite in the form of a package of an arbitrary finite number of circular discs under torsion when the lateral surface of the compound cylinder is rigidly fastened;
4. The stress-strain state of a multilayered composite, in the form of a package of an arbitrary finite number of annular discs, under torsion when the lateral surface of the compound cylinder is rigidly fastened.

With the application of Fourier integral transforms, Fourier series, Swartz formula for representation of an analytic in a strip function, and expansion of analytic in an annulus functions into Loran series the solutions of the considered problems are reduced to a system of the second order finite difference equations. The latter is further reduced to a system of linear algebraic equations with the left triangular determinant which is easily solved.

Efficient solutions of the problems on torsion of piecewise-homogeneous in radial direction cylinders are constructed with the mathematical method of Fourier-Hankel integral transforms.

Particularly, the following results are obtained:

- A wide range of problems on stress-strain state of linear and cylindrical layered elastic solids, in form of a package composed of an arbitrary finite number of layers with different geometrical and elastic characteristics, under anti-plain deformation and torsion is solved.
- Two different analytical methods are applied to the solution of the problems on anti-plain deformation. Both methods lead to the same finite difference equation of the second order. Particularly, a formula for representation of an analytical in an arbitrary strip function, analogical to Swartz formula, is derived.
- In the first three problems for the particular cases of two-layered composites numerical analysis is conducted and, based on its results, the behavior of tangential contact

stresses is studied in enough wide ranges of characteristic elastic and geometrical parameters. Particularly, conditions are determined when the contact stresses between the layers does not depend on the ratio of their shear modules.

- Based on Fourier-analysis the formulae for deformable thin layers corresponding to Mellan and Winkler models are derived under anti-plane deformation.
- In the thesis mathematical method of the second order finite difference equations has had some further development in the mathematical theory of elasticity.