ՀՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ
ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Սահակյան Հասմիկ Արտեմի

# Բազմաչափ բինար խորանարդի գագաթների ենթաբազմությունների տրոհումների քանակական նկարագիրը

Ա.01.09 – «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ

Ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2002

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК РА

Саакян Асмик Артемовна

# Количественное описание разбиений подмножеств вершин многомерного бинарного куба

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико—математических наук

по специальности 01.01.09
"Математическая кибернетика и математическая логика"

ЕРЕВАН 2002

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Ինֆորմատիկայի և Ավտոմատացման Պրոբլեմների Ինստիտուտում

<u>Գիտական ղեկավար</u> - ֆիզ.-մաթ. գիտությունների դոկտոր՝ Լ.Հ. Ասլանյան

<u>Պաշտոնական ընդդիմախոսներ</u> - ֆիզ.-մաթ. գիտությունների դոկտոր՝ Հ. Բ. Մարանջյան

ֆիզ.-մաթ. գիտությունների դոկտոր՝ Վ. Վ. Ռյազանով

<u>Առաջատար կազմակերպություն</u> - Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2002թ. <u>հոկտեմբերի 11-ին</u> <u>ժամը 11-ին</u> թ. 037 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և ինֆորմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և Ավտոմատացման Պրոբլեմների ինստիտուտում: Հասցեն՝ 375014 ք. Երևան, Պ. Սևակի փող. 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ինստիտուտի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2002թ. <u>սեպտեմբերի 11-ին:</u>

Մասնագիտական խորհրդի գիտքարտուղար,
Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Մ.Ե. Հարությունյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте Проблем Информатики и Автоматизации

<u>Научный руководитель</u> — доктор физ. – мат. наук Л. А. Асланян

<u>Официальные оппоненты</u> — доктор физ. – мат. наук Г. Б. Маранджян

доктор физ. – мат. наук В. В. Рязанов

<u>Ведущая организация</u> — Ереванский государственный университет

Защита состоится <u>11 октября</u> 2002 г. в <u>11 ч.</u> на заседании специализированного совета 037 "Математическая кибернетика и информатика" по адресу: 375014, г. Ереван, ул. П.Севака 1.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПИА НАН РА.

Автореферат разослан <u>11 сентября</u> 2002 г.

Секретарь ученого спец. совета
кандидат физ. – мат. наук М.Е. Арутюнян



## <u>*ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ*</u>

<u>Թեմայի հրատապությունը</u>

Աշխատանքը նվիրված է կիրառական կոմբինատորիկայի խնդիրների որոշ փոխկապակցված խմբերի ուսումնասիրմանը: Դիտարկվում են $n$ չափանի միավոր (բինար) $E^n$ խորանարդի գագաթների ենթաբազմությունների տրոհումների քանակական նկարագրման, ըստ տրոհումների քանակական բնութագրիչների ենթաբազմությունների գոյության, և տրված բնութագրիչներով՝ ենթաբազմությունների կառուցման խնդիրները: Հիմնական արդյունքները վերաբերվում են քանակական նկարագրման խնդրին: Խնդիրը ծագում է տարբեր ուսումնասիրությունների ընթացքում, մասնավորապես դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծման ժամանակ, որտեղ բերվում են գնահատականներ $E^n$-ի կամայական ենթաբազմությունների տրոհումների քանակական բնութագրիչների համար, և որոնց հիման վրա ստացվում է դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի բոլոր լուծումների բազմության նկարագիրը:

Դիտարկվող խնդիրների ընդհանրական բնութագրումը հետևյալն է: Տրված է առարկա կամ մոդել. կառուցվում կամ հաշվվում են նրա որոշակի ֆունկցիաները և բնութագրերը, մասնավորապես՝ պրոեկտման անալոգ գործողությունների միջոցով: Շատ դեպքերում ըստ առարկայի՝ հատկանիշները և պրոեկցիաները ստացվում են հեշտությամբ: Հակադարձման խնդիրը ավելի բարդ է՝ տրված հատկանիշների դեպքում ինչպե՞ս պարզել դրանց համապատասխանող առարկայի գոյությունը և ինչպե՞ս կառուցել այն: Ստորև ուշադրության առարկան դասական կոմբինատոր կառուցվածք է՝ վերջավոր բազմության ենթաբազմությունների ընտանիք, և դրա նկարագրումն է ըստ առանձին էլեմենտների պատկանելիության և տրոհումների քանակական բնութագրերի (պրոեկցիաների):

Մեթոդական տեսակետից, ինչպես նշվեց, խնդիրը բաժանվում է ենթախնդիրների՝ գոյության, կառուցման և բոլոր լուծումների նկարագրման խնդիրներ: Առաջին երկուսը առավել սերտ են կապակցված իրար հետ, և երրորդն առանձնանում է որպես ընդհանուր տեսական նկարագրման խնդիր: Գոյության և կառուցման խնդիրները տարբեր մոդելների համար ուսումնասիրվել են ինտենսիվ և երկարաժամկետ: Նրանք ուսումնասիրվել են նաև ներկա աշխատանքի հեղինակի կողմից: Վերը նշված ենթախնդիրներից յուրաքանչյուրը ունի սեփական տեսական և կիրառական իմաստ: Տեսական դրվածքները խնդրի պայմանների փոփոխման ժամանակ որոշ դեպքերում հնարավոր է լինում լուծել, այլ դեպքերում դրանք լուծվում են բազմանդամային ալգորիթմով կամ ոչ, դառնում են NP-լրիվ դասի խնդիր կամ նրանց համար բարդության նման բնութագրումն իսկ դառնում է երկարատև դրված, բայց չլուծված բաց խնդիր: Անեն դեպքում, դիտարկվող հիմնական կոմբինատոր գոյության և կառուցման խնդիրը ունի դասական նշանակություն: Այն բնական դրվածք է և առանձին ձևակերպումով հայտնի է առնվազն 20-30 տարի: Խնդրի բարդությունը ուսումնասիրված և դեռևս բաց խնդիր է: Սրանով կարևորվում է խնդրի ուսումնասիրումը առանձին դասերի համար, տարբեր անհրաժեշտ և բավարար պայմանների դուրսբերումը և որ կարևոր է, բոլոր լուծումների ընդհանրական նկարագրման ուսումնասիրումը, ինչին և ամբողջապես նվիրված է ներկա աշխատանքը տալով համապատասխան բազմությունների մանրակրկիտ և լիարժեք մեկնաբանումը:

Կիրառական տեսանկյունից կարևորվում են տարբեր գրադիենտ և այլ լոկալ օպտիմալացման կառույցները, որոնց համար արդյունքի և բարդության գնահատման խնդիրները նույնպես հրատապ են: Որոշ մասնավոր դեպքերում հաջողվել է կառուցել ցածր աստիճանային բազմանդամային, կամ էվրիստիկ և գնահատված ալգորիթմներ, սակայն որոշ այլ դեպքերում նույնիսկ այս նշված կառուցումները դառնում են առայժմ անհասանելի: Նշվածի համաձայն, աշխատանքը նոր գիտելիք է ծեքբերում տիրույթի տեսական խնդիրների լուծման և կիրառական համակարգերի ապահովման համար:

<u>Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները</u>

Ուսումնասիրվում է $E^n$-ի գագաթների ֆիքսված $m$ հզորության ենթաբազմությունների տրոհումների կառուցվածքային և քանակական ամբողջական նկարագրման խնդիրը: Տրոհումների հզորություններ հանդիսացող ամբողջարժեք վեկտորների (տրոհումների բնութագրիչ վեկտորների) բազմությունը՝ $\Psi_m$-ը - բազմաչափ բազմարժեք խորանարդի ենթաբազմություն է: Այս բազմությունն ունի ընդհանրական հատկություններ՝ համարժեքության դասեր, սիմետրիաներ, համասեռության տիրույթներ, եզրային կետեր և այլն, որոնք և ուսումնասիրվում են: Ապացուցվում է, որ $\Psi_m$-ի լիակատար նկարագրման համար բավարար է նրա նկարագիրը համասեռության սահմանափակ տիրույթում, որտեղ այն ունի մոնոտոն տիպի կառուցվածք:

Կառուցվածքային նկարագրման միջոց է հանդիսանում $E^n$-ի բոլոր մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների դասը: Սրա օգնությամբ ուսումնասիրվում է $\Psi_m$ բազմության եզրային վեկտորների ընտանիքը, ուսումնասիրվում են եզրային վեկտորների մասնակի հատկությունները, դրանց միջոցով՝ ողջ $\Psi_m$ բազմության նկարագրման հարցը, և դուրս են բերվում լրացուցիչ քանակական բնութագրեր նշված կառուցվածքների մասին:

<u>Հետազոտման օբյեկտը</u>

Հետազոտման օբյեկտ են հանդիսանում $n$ չափանի միավոր խորանարդը և նրա գագաթների ենթաբազմությունները (ինչպես նաև սահմանափակումների առկայությամբ $(0,1)$-մատրիցները, պարզ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունները): Ուսումնասիրվում են գագաթների ենթաբազմությունների տրոհումների հզորություններով կազմվող ամբողջարժեք վեկտորները և հետազոտվում են այդ վեկտորների բազմության կառուցվածքային նկարագրման խնդիրները:

<u>Հետազոտման մեթոդները</u>

Կիրառվել են կոմբինատոր և տրամաբանական մաթեմատիկական հետազոտական մեթոդներ:

<u>Արդյունքների նորությունը</u>

Աշխատանքում ստացված բոլոր արդյունքները նորույթ են հանդիսանում:

<u>Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը</u>

Խնդրի կիրառական նշանակությունը կապված է կիրառական ալգորիթմների կառուցման համար նոր տեսական գիտելիքի ձևավորման, ինչպես նաև փնտրման, տեսատավորման և որոշումների կայացման կոնկրետ կիրառական ալգորիթմների կառուցման և գնահատման հետ:

Պաշտպանության ներկայացվում են հետևյալ դրույթները

Վերջավոր բազմության ենթաբազմությունների ընտանիքների տրոհումների քանակական բնութագրիչ վեկտորների բազմությունը ունի մոնոտոն կառուցվածք,

այդ կառուցվածքը տրվում է եզրային վեկտորների համապատասխան զույգերի մոնոտոն ընդլայնումների տեսքով, որոնք ամբողջովին լցված են տրոհումների վեկտորներով,

տրոհումների վեկտորների բազմության եզրային կետերը ստացվում են մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների տրոհումներից,

կառուցվածքներ և բանաձևեր «մինիմալ» և «մաքսիմալ» տրոհումների վեկտորների համար:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան

Աշխատանքում ստացված հիմնական արդյունքները զեկուցվել են ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և Ավտոմատացման Պրոբլեմների Ինստիտուտում, «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии», РОАИ–2–95, Ульяновск, Համառուսաստանյան երկրորդ կոնֆերանսում, «Third Conference on Computer Science and Information Technologies», CSIT'01, Yerevan, միջազգային կոնֆերանսում, Մադրիդի տեխնիկական համալսարանի «Ինֆորմատիկայի» ֆակուլտետում, 2002թ. հունվարին:

Հրատարակությունները

Ատենախոսության թեմայով հրատարակված է 6 գիտական աշխատանք:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը

Ատենախոսությունը կազմված է առաջաբանից, երեք գլխից և օգտագործված գրականության ցանկից: Առաջին գլուխը կազմված է չորս, երկրորդ գլուխը՝ երկու և երրորդ գլուխը՝ երեք պարագրաֆից: Ատենախոսությունը կազմված է 97 էջից:



## *ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ*

Առաջաբանում տրվում է խնդրի ընդհանուր և համեմատական նկարագիրը: Հարակից կոմբինատոր խնդիրների դասերում ձևակերպվում են խնդիրներ, և ցույց է տրվում նրանց համարժեքությունը դիտարկվող խնդիրներին:

$n$ չափանի միավոր խորանարդի գագաթների $m$ հզորություն ունեցող $M$ ենթաբազմությունը կարելի է ներկայացնել $m$ տող և $n$ սյուն ունեցող $(0,1)$-մատրիցի տեսքով, որտեղ տողերը համապատասխանում են $M$-ի էլեմենտներին: Նման մատրիցի բոլոր տողերը կլինեն տարբեր: Սյուներում մեկերի քանակները կհամապատասխանեն $M$ բազմության տրոհումների հզորություններին համապատասխան ուղղություններով: Ըստ տրոհումների քանակական բնութագրիչների (տրոհումների հզորությունների) ենթաբազմությունների գոյության խնդիրը $(0,1)$-մատրիցների տերմիններով հետևյալն է. գոյություն ունի՞ արդյոք տարբեր տողերով $(0,1)$-մատրից ըստ սյուների մեկերի նախապես տրված քանակների:

$(0,1)$-մատրիցների դասը՝ նմանատիպ այլ պայմանների առկայությամբ (տրված քանակով մեկերով՝ տողերի և սյուների վրա), ուսումնասիրվել են (Հ. Ջ. Ռայզեր) և ստացվել են մատրիցի գոյության պարզ անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

Հարակից խնդիրների մի այլ դաս հայտնի է որպես Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիր: Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի հիմնական խնդիրը հետևյալն է. վերականգնել վերջավոր էլեմենտանոց բազմությունը՝ նրա դիսկրետ X-ճառագայթների (ray) միջոցով: Վերը նշված $(0,1)$-մատրիցների խնդիրը հանդիսանում է այն պարզագույն դեպքը, երբ պետք է վերականգնել բազմությունը՝ ըստ հորիզոնական և ուղղահայաց պրոեկցիաների: Խնդրի պայմանների փոփոխման, տարբեր սահմանափակումների առկայության դեպքում, խնդրի բարդությունը փոխվում է էականորեն:

Հաջորդ խնդիրը հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների նկարագրման խնդիրն է: Խնդիրը հետևյալն է. տրված է $d_1,\cdots,d_n$ ամբողջ ոչ բացասական թվերի հաջորդականություն: Գոյություն ունի՞ արդյոք հիպերգրաֆ, այնպիսին, որ $d_1,\cdots,d_n$ հաջորդականությունը հանդիսանում է նրա աստիճանային հաջորդականությունը (degree sequence): Դիցուք՝ դիտարկում ենք $H=(H(V),H(E))$ հիպերգրաֆը, $H(V)$ գագաթների բազմությամբ, $|H(V)|=n$, և $H(E)$ կողերի բազմությամբ, $|H(E)|=m$: Դիտարկենք հիպերգրաֆի ինցիդենտության մատրիցը: Այն $m$ տող և $n$ սյուն ունեցող $(0,1)$-մատրից է, որի սյուները պարունակում են $d_1,\cdots,d_n$ մեկեր: Եթե հիպերգրաֆը նաև պարզ է, ապա մատրիցի տողերը կլինեն տարբեր: Այսպիսով, տրված աստիճանային հաջորդականությամբ պարզ հիպերգրաֆի գոյության խնդիրը նույնպես հանգում է տրված սպեկտրալ պարամետրերով $(0,1)$-մատրիցի գոյության խնդրին:

Խնդիրների այս դասերի թվարկումը կարելի է շարունակել՝ մինիմալ տեստի գտնելու խնդիր, բազմությունների ծածկույթի խնդիր, պայմանական տեստի և որոշումների կայացման հիերարխիկ ալգորիթմների խնդիրներ և այլն:

<u>Առաջին գլխում</u> բերվում են օգտագործված որոշ հիմնական հասկացություններ և սահմանումներ և քննարկվում են հայտնի և հարակից դրվածքներ և արդյունքներ:

<u>Երկրորդ գլխի</u> <u>առաջին պարագրաֆում</u> ստացվում են տրոհումների տրված քանակական բնութագրերով ենթաբազմությունների գոյության անհրաժեշտ պայմաններ, որոնք հանդիսանում են համանման այլ առնչությունների ընդհանրացումներ: Դիտարկվում է $E^n$-ի նախապես ֆիքսված $m$ հզորություն ունեցող $M\subseteq E^n$ ենթաբազմությունը, $0\le m\le 2^n$: Բացառելով $m$ հզորության եզրային $0$ և $2^n$ դեպքերը, այն հարմար է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$m=\sum_{t=0}^{k} C_n^t+\delta, \text{ որտեղ } 0\le k<n, \text{ և } 0\le\delta<C_n^{k+1} \quad (1)$$



Թեորեմ 1:

Դիցուք $M$-ը $E^n$-ի կամայական $m$ էլեմենտանոց ենթաբազմություն է, որտեղ $m$-ը ներկայացված է (1) տեսքով, և $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$-ը նրա բնութագրիչ վեկտորն է: Այդ դեպքում ցանկացած $p$, $1\le p\le n$ թվի համար գոյություն ունեն այնպիսի $i_1,i_2,\cdots,i_p$ կոորդինատներ, որ

$$s_{i_1}+s_{i_2}+\cdots+s_{i_p}\ge p\cdot\left(\sum_{t=0}^{k-1}C_{n-1}^t+\delta\frac{k+1}{n}\right):$$

Թեորեմ 2:

Դիցուք $M$-ը $E^n$-ի կամայական $m$ էլեմենտանոց ենթաբազմություն է, որտեղ $m$-ը ներկայացված է (1) տեսքով, և $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$-ը նրա բնութագրիչ վեկտորն է, որի $p$ հատ կոորդինատներ ունեն ֆիքսված արժեքներ՝ $s_{i_1},s_{i_2},\cdots,s_{i_p}$: Այդ դեպքում, գոյություն ունի բնութագրիչ վեկտորի մի այնպիսի $i$ կոորդինատ, $1\le i\le n$, $i\ne i_1,\cdots,i_p$, որ

$$s_i\ge\frac{1}{n-p}\left(n\sum_{t=0}^{k-1}C_{n-1}^t+\delta(k+1)-(s_{i_1}+\cdots+s_{i_p})\right):$$

Թեորեմ 3:

Դիցուք $M$-ը $E^n$-ի կամայական $m$ էլեմենտանոց ենթաբազմություն է, որտեղ $m$-ը ներկայացված է (1) տեսքով, և $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$-ը նրա բնութագրիչ վեկտորն է, որի կոմպոնենտները դասավորված են ըստ նվազման կարգի՝ $s_1\ge s_2\ge\cdots\ge s_n$: Այդ դեպքում $M$ բազմության տրոհումների հզորությունների բնութագրիչ վեկտորը ըստ $i$ պարամետրի, $i=2,\cdots,n$, բավարարում է հետևյալ ռեկուրենտ առնչությանը.

$$s_i=\sum_{t=0}^{k-1}C_{n-1}^t+\delta\frac{k+1}{n}-\sum_{t=1}^{i-1}\frac{\varepsilon_t}{n-t}+\varepsilon_i, \text{ որտեղ } \varepsilon_t\ge 0 \text{ երբ } t=1,\cdots,i:$$

<u>Երկրորդ պարագրաֆում</u> հիմնական արդյունքները վերաբերվում են տրոհումների հզորություններ հանդիսացող ամբողջարժեք վեկտորների

բազմության ամբողջական նկարագրմանը՝ հիմնված այնպիսի կառուցվածքների վրա, որտեղ հատուկ տեղ են գրավում $E^n$-ում որոշված մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների մեկ և զրո արժեքների գագաթների բազմությունների տրոհումների բնութագրիչ վեկտորները:

Դիցուք՝ $\Xi^n_{m+1}$-ը $n$ չափանի $m+1$ արժեքանի խորանարդի գագաթների բազմությունն է, այսինքն, բոլոր այն $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ ամբողջարժեք վեկտորների բազմությունն է, որոնց համար $0\le s_i\le m$, $i=1,\cdots,n$: Պարզ է, որ $n$ չափանի բինար $E^n$ խորանարդի գագաթների բոլոր $m$-ենթաբազմությունների տրոհումներից առաջացած բնութագրիչ վեկտորների բազմությունը՝ $\Psi_m$-ը, $\Xi^n_{m+1}$-ի ենթաբազմությունն է: $\Psi_m$-ի նկարագիրը տրվում է $\Xi^n_{m+1}$-ի երկրաչափության տերմիններով, որտեղ գագաթները սիմետրիկ տեղաբաշխված են խորանարդի $m\cdot n+1$ շերտերում:

Սահմանում 1:

$\Xi^n_{m+1}$-ին պատկանող վեկտորը կանվանենք վերին $h$-վեկտոր (վերին համասեռ), եթե նրա բոլոր կոորդինատների արժեքները առնվազն $m/2$ են զույգ $m$-երի դեպքում և առնվազն $(m+1)/2$ են՝ կենտ $m$-երի դեպքում: Նմանորեն, $\Xi^n_{m+1}$-ին պատկանող վեկտորը կանվանենք ստորին $h$-վեկտոր (ստորին համասեռ), եթե նրա բոլոր կոորդինատների արժեքները ամենաշատը $m/2$ են զույգ $m$-երի դեպքում և ամենաշատը $(m-1)/2$ են՝ կենտ $m$-երի դեպքում:

$\widehat{H}$-ով և $\breve{H}$-ով նշանակենք վերին և ստորին $h$-վեկտորների բազմությունները, համապատասխանաբար:

Դիցուք՝ $\widetilde{m}_{mid+}$-ը (վերին միջին վեկտոր) $\widehat{H}$ բազմությանը պատկանող այն վեկտորն է, որը գտնվում է $\Xi^n_{m+1}$-ի հնարավոր ամենափոքր համարով շերտում, և $\widetilde{m}_{mid-}$-ը (ստորին միջին վեկտոր) $\breve{H}$-ին պատկանող այն վեկտորն է, որը գտնվում է $\Xi^n_{m+1}$-ի հնարավոր ամենամեծ համարով շերտում: Կենտ $m$-երի դեպքում $\widetilde{m}_{mid+}$-



ի բոլոր կոորդինատների արժեքը հավասար է $(m+1)/2$-ի, $\widetilde{m}_{mid-}$-ի բոլոր կոորդինատների արժեքը հավասար է $(m-1)/2$-ի: Զույգ $m$-երի դեպքում ինչպես $\widetilde{m}_{mid+}$-ի, այնպես էլ $\widetilde{m}_{mid-}$-ի բոլոր կոորդինատների արժեքը հավասար է $m/2$-ի, և $\widehat{H}$ և $\breve{H}$ բազմությունները հատվում են այդ միակ վեկտորով: $\widetilde{m}$-ով նշանակենք այն վեկտորը, որի բոլոր կոորդինատները ունեն $m$ արժեք, $\widetilde{0}$-ով նշանակենք զրոյական վեկտորը:

Սահմանում 2:

Դիցուք՝ $S'$-ը և $S''$-ը վեկտորներ են $\Xi^n_{m+1}$-ից: Կասենք, որ $S'$ և $S''$ վեկտորները $\nu$-համարժեք (ուղղահայաց համարժեք) են, եթե նրանցից մեկը ($S''$-ը) ստացվում է մյուսից որոշ կոորդինատների շրջման (լրացման) միջոցով՝ $s_i \Rightarrow m-s_i$:

Նշված վեկտորների դասը անվանենք $\nu$-համարժեքության դաս ըստ տրված նախնական $S$ վեկտորի և նշանակենք $V(S)$-ով: $V(S)$-ը ունի $E^k$ միավոր խորանարդին համարժեք կառուցվածք, որտեղ $k$-ն $V(S)$-ին պատկանող վեկտորների $m/2$-ից տարբեր արժեք ունեցող կոորդինատների քանակն է:

$V(S)$-ում առանձնացնենք դասի վերին և ստորին $\widehat{S}=(\widehat{s}_1,\cdots,\widehat{s}_n)$ և $\breve{S}=(\breve{s}_1,\cdots,\breve{s}_n)$ վեկտորները, որոնց կոորդինատները որոշվում են հետևյալ ձևով.

$$\widehat{s}_i=\begin{cases} s_i, & s_i\ge m-s_i \\ m-s_i, & s_i<m-s_i \end{cases} \text{ և } \breve{s}_i=\begin{cases} m-s_i, & s_i\ge m-s_i \\ s_i, & s_i<m-s_i \end{cases} \quad i\in\overline{1,n}:$$

Պարզ է, որ դրանք նշված դասի միակ վեկտորներն են, որոնք պատկանում են $\widehat{H}$ և $\breve{H}$ բազմություններին, համապատասխանաբար: Վեկտորների $\widehat{S}$, $\breve{S}$ զույգերը կանվանենք հակադիր: Այսպիսով, կամայական $S$ վեկտորի $\nu$-համարժեքության դասը կառուցելու համար լիովին բավարար է ունենալ նրա $\nu$-համարժեքության դասի վերին $\widehat{S}$ (և/կամ ստորին $\breve{S}$) վեկտորը: Դիցուք՝ $\widehat{S}=(\widehat{s}_1,\cdots,\widehat{s}_n)$-ը և $\breve{S}=(\breve{s}_1,\cdots,\breve{s}_n)$-ը հակադիր վեկտորներ են $\widehat{H}$-ից և $\breve{H}$-ից համապատասխանաբար: $I(\widehat{S})$-ով նշանակենք $\Xi^n_{m+1}$-ում այդ զույգով անցնող մինիմալ ենթախորանարդի գագաթների բազմությունը`

$$I(\widehat{S})=\{Q\in\Xi^n_{m+1}/\widehat{S}\le Q\le\breve{S}\}:$$

Դիցուք` $S$-ը և $Q$-ն կամայական վեկտորներ են $\Xi^n_{m+1}$-ից, և $S\le Q$: $E(S,Q)$-ով նշանակենք $\Xi^n_{m+1}$-ի այն մինիմալ ենթախորանարդը, որն անցնում է այդ երկու կետերով:

$\psi_m$ բազմության վերին և ստորին եզրային վեկտորներից կազմված ենթաբազմությունները նշանակենք $\widehat{\psi}_m$-ով և $\breve{\psi}_m$-ով համապատասխանաբար.

$\widehat{\psi}_m$-ը այն $S\in\psi_m$ վեկտորների բազմությունն է, որոնց համար $\forall R\in\Xi^n_{m+1}$ և $R>S$ համար $R\notin\psi_m$, $\breve{\psi}_m$-ը այն $S\in\psi_m$ վեկտորների բազմությունն է, որոնց համար $\forall R\in\Xi^n_{m+1}$ և $R<S$ համար $R\notin\psi_m$:

Վերին և ստորին եզրային վեկտորների բազմությունները ունեն սիմետրիկ կառուցվածք` յուրաքանչյուր վերին վեկտորին համապատասխանում է իր հակադիր ստորին վեկտորը, և հակառակը, այս վեկտորների քանակները հավասար են` $\widehat{\psi}_m=\{\widehat{S}_1,\cdots,\widehat{S}_r\}$ և $\breve{\psi}_m=\{\breve{S}_1,\cdots,\breve{S}_r\}$:

Ապացուցվում է, որ ինչպես $\psi_m$, այնպես էլ $\Xi^n_{m+1}\setminus\psi_m$ բազմությունների նկարագրերը տալու համար բավարար է ունենալ այդ բազմությունների $\widehat{H}$-ին (կամ $\breve{H}$-ին) պատկանող ենթաբազմությունների նկարագրերը, և դրանց միջոցով ըստ $\nu$-համարժեքության ստացվում է բազմությունների լրիվ նկարագիրը: Սա խնդիրը $\Xi^n_{m+1}$-ից տեղափոխում է $\widehat{H}$ (կամ $\breve{H}$) տիրույթը, որտեղ վեկտորներն ունեն շատ պարզ (մոնոտոն) կառուցվածք:

Հետևյալ թեորեմները հաստատում են նշված արդյունքը: 4 թեորեմը տալիս է $\psi_m$-ի $\widehat{H}$-ին պատկանող ենթաբազմության կառուցվածքային նկարագիրը - այն մոնոտոն կառուցվածք է` ինտերվալների փունջ, իսկ 5 թեորեմով այն $\nu$-համարժեքության միջոցով տարածվում է ամբողջ $\Xi^n_{m+1}$-ում` կազմելով $\psi_m$-ը:



Թեորեմ 4:

$$\widehat{H}\cap\psi_m=\bigcup_{j=1}^{r} E(\widetilde{m}_{mid+},\widehat{S}_j):$$

$\psi_m$-ի $\breve{H}$-ին պատկանող ենթաբազմությունը ունի համանման նկարագիր:

Թեորեմ 5:

$$\psi_m=\bigcup_{j=1}^{r} V(E(\widetilde{m}_{mid+},\widehat{S}_j)):$$

Նշված թեորեմների ապացույցը հիմնված է նախնական լեմմաների վրա, որոնք վերաբերվում են դիտարկվող օբյեկտների որոշ կառուցվածքային հատկություններին:

Հաջորդ թեորեմները ապացուցում են նույն հատկությունները $\Xi^n_{m+1}\setminus\psi_m$ բազմության համար:

Սահմանենք հետևյալ եզրային բազմությունները.

$\widehat{\phi}_m$-ը այն $Q\in\widehat{H}\setminus\psi_m$ վերին $h$-վեկտորների բազմությունն է, որոնց համար $\forall R\in\widehat{H}$ և $R<Q$ համար $R\in\psi_m$, $\breve{\phi}_m$ -ը այն $Q\in\breve{H}\setminus\psi_m$ ստորին $h$-վեկտորների բազմությունն է, որոնց համար $\forall R\in\breve{H}$ և $R>Q$ համար $R\in\psi_m$:

Այս եզրային բազմությունները նույնպես ունեն սիմետրիկ կառուցվածք` յուրաքանչյուր վերին վեկտորին համապատասխանում է իր հակադիր ստորին վեկտորը, և հակառակը, այս վեկտորների քանակները հավասար են`

$\widehat{\phi}_m=\{\widehat{Q}_1,\cdots,\widehat{Q}_p\}$, և $\breve{\phi}_m=\{\breve{Q}_1,\cdots,\breve{Q}_p\}$:

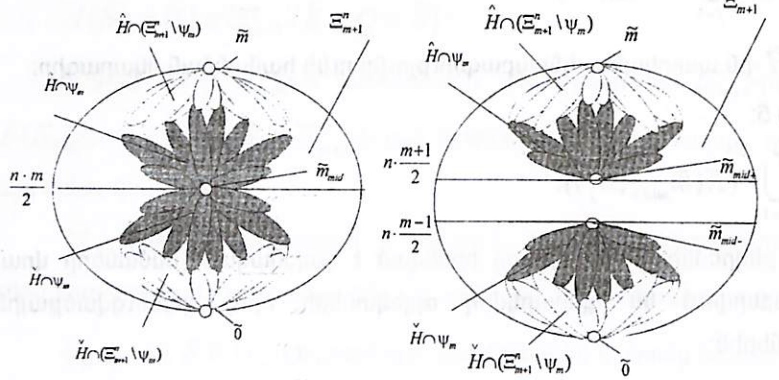
Թեորեմ 6:

$$\widehat{H}\setminus\psi_m=\bigcup_{j=1}^{p} E(\widehat{Q}_j,\widetilde{m}):$$

Թեորեմ 7:

$$\Xi^n_{m+1}\setminus\psi_m=\bigcup_{j=1}^{p} V(E(\widehat{Q}_j,\widetilde{m})):$$

Նկարում պատկերված են համապատասխան բազմությունները զույգ և կենտ $m$-երի համար, համապատասխանաբար:




Եթե նախորդ թեորեմները $\Psi_m$ և $\Xi^n_{m+1} \setminus \Psi_m$ բազմությունները նկարագրում էին $\nu$-համարժեքության «դիսկրետ սխեմայի» միջոցով, ապա հաջորդ թեորեմը տալիս է $\Psi_m$-ի «անընդհատ» նկարագիրը - $\Psi_m$-ի եզրային ենթաբազմությունների իրար համապատասխանող հակադիր զույգերով անցնող մինիմալ ենթախորանարդները անընդհատորեն լցված են $\Psi_m$ բազմության վեկտորներով՝ կազմելով ամբողջ $\Psi_m$-ը:

Թեորեմ 8:

$$\Psi_m = \bigcup_{j=1}^{r} I(\widehat{S}_j):$$

Թեորեմն ապացուցվում է հակասող ենթադրությամբ՝ օգտագործելով նախնական լեմմաները:

Հաջորդ թեորեմը կապ է ստեղծում երկու մոնոտոն նկարագրերի միջև:

Թեորեմ 9:

Դիցուք՝ $\widehat{S}_j \in \widehat{\Psi}_m$: Այդ դեպքում $E(\widetilde{m}_{mid+}, \widehat{S}_j)$ բազմության $\nu$-համարժեքության դասը կազմում է $I(\widehat{S}_j)$ բազմությունը՝

$$I(\widehat{S}_j) = V(E(\widetilde{m}_{mid+}, \widehat{S}_j)):$$



$\Psi_m$-ի «անընդհատ» նկարագիրը կարելի է տալ նաև համապատասխան ենթախորանարդների հատումների միջոցով:

Թեորեմ 10:

$$\Psi_m = \bigcup_{j=1}^{r} \left( E(\widetilde{0}, \widehat{S}_j) \cap E(\breve{S}_j, \widetilde{m}) \right):$$

Մինչև այժմ $\Psi_m$-ի եզրային վեկտորները հայտնի են միայն ըստ սահմանման: Հաջորդ հիմնական արդյունքը վերաբերվում է եզրային վեկտորներին. ցույց է տրվում, որ $\Psi_m$ բազմության եզրային վեկտորները տրվում են $E^n$-ի մոնոտոն ֆունկցիաների միջոցով, այն է՝ բոլոր եզրային վեկտորները կազմում են մոնոտոն ֆունկցիաների տրոհումների վեկտորների բազմության ենթադասը: Նշվածը հաստատվում է 11 թեորեմով:

$M^1_m$-ով և $M^0_m$-ով նշանակենք $E^n$-ի այն $m$-ենթաբազմությունների տրոհումների բնութագրիչ վեկտորների բազմությունները, որոնք համապատասխանաբար համապատասխանում են $E^n$-ում որոշված մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների մեկ և զրո արժեքների գագաթների բազմություններին:

Թեորեմ 11:

$\widehat{\Psi}_m \subseteq M^1_m$ և $\breve{\Psi}_m \subseteq M^0_m$:

Ապացույցը հիմնված է պարզ դատողությունների վրա: Կառուցված են մոնոտոն ֆունկցիաների օրինակներ, որոնք հաստատում են, որ $\widehat{\Psi}_m \subset M^1_m$ և $\breve{\Psi}_m \subset M^0_m$:

Երրորդ գլխում բերված արդյունքները վերաբերվում են $\Psi_m$-ի եզրային ենթաբազմությունների վեկտորների դասավորությանը $\Xi^n_{m+1}$ խորանարդի շերտերում: Մասնավորապես, գտնված են այդ շերտերի մինիմալ և մաքսիմալ համարները ($L_{\min}$ և $L_{\max}$) վերին և ստորին կիսախորանարդներում: Կառուցված են նաև մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաները, որոնք համապատասխանում են եզրային ենթաբազմությունների վեկտորներին:

$n$ չափանի միավոր խորանարդում դիտարկենք $L_{\min}$-ի հետ կապված մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների դասը ($\widehat{\Psi}_m$-ից), և այն նշանակենք $\wp_{\min}(m,n)$-ով:

Դիտարկենք $E^n$-ի գագաթների գծային կարգը ըստ $E^n$-ը կազմող բինար փոփոխականների վեկտորի թվային արժեքի նվազման: Նշված հաջորդականությունը կանվանենք «նվազող» հաջորդականություն և կնշանակենք $D_n$-ով: «Նվազող» $D_n$ հաջորդականության կամայական ($m$ երկարության) սկզբնահատվածը համապատասխանում է $E^n$-ում որոշված ինչ-որ մոնոտոն բուլյան ֆունկցիայի մեկ արժեքների գագաթների բազմությանը: Նշանակենք այդ ֆունկցիան $\mu(m,n)$-ով:

Թեորեմ 12:

$\mu(m,n)\in\wp_{\min}(m,n)$:

Ապացույցը կիրառում է ինդուկցիայի մեթոդը՝ տրոհելով $E^n$-ը մեկ կամ երկու ուղղություններով, և համապատասխան ենթախորանարդներում դիտարկելով բոլոր հնարավոր դեպքերը:

Հաջորդ թեորեմը ապացուցում է, որ կառուցված մոնոտոն բուլյան ֆունկցիան միակն է (կոորդինատների տեղափոխությունների ճշտությամբ), այսինքն, $L_{\min}$ շերտի միակ վեկտորը, որ պատկանում է $\widehat{\Psi}_m$-ին, համապատասխանում է $\mu(m,n)$-ին:

Թեորեմ 13:

Դիցուք $\mu(m,n)$-ը $D_n$-ի $m$ սկզբնահատվածին համապատասխանող մոնոտոն բուլյան ֆունկցիան է, և $S=(s_1,\cdots,s_n)$-ը նրա մեկ արժեքների գագաթների բազմության տրոհումների բնութագրիչ վեկտորն է: Այդ դեպքում, $\wp_{\min}(m,n)$ դասի բոլոր ֆունկցիաների բնութագրիչ վեկտորները ստացվում են $\mu(m,n)$ ֆունկցիայի բնութագրիչ $S$ վեկտորից՝ կոորդինատների տեղափոխությունների միջոցով:

Այս թեորեմի ապացույցը նույնպես տարվում է ինդուկցիայի մեթոդով:



Ստացված են լրացուցիչ քանակական նկարագրեր:

Մինիմալ շերտի համարը արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$L_{\min}=\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{i=1}^{p}\left(\left(n-k_i-(i-1)\right)\cdot 2^{k_i}+k_i\cdot 2^{k_i-1}\right),$$

որտեղ $k_i$ պարամետրերը վերցվում են $m$ թվի երկուական ներկայացումից՝ $m=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_p}$:

Հաշվվում է նաև միակ (կոորդինատների տեղափոխման ճշտությամբ) բնութագրիչ վեկտորի կոորդինատները:

Նմանատիպ արդյունքներ ստացվում են նաև մաքսիմալ շերտի տարրերի համար, ինչպես նաև դուրս է բերվում այդ շերտի համարի բանաձևը՝

$L_{\max}=\sum_{i=0}^{k}(n-i)\cdot c_n^{n-i}+(n-k-1)\cdot\delta$, որտեղ օգտագործված պարամետրերը վերցվում են (1) ներկայացումից:

Ցույց է տրվում, որ ի տարբերություն $L_{\min}$ շերտի, որտեղ վեկտորների համար տրվում է պարզ նկարագիր, $L_{\max}$ շերտի վեկտորների նկարագրման խնդիրը պարզ չէ. այն համարժեք է պարզ համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների նկարագրման խնդրին, որը հայտնի բաց խնդիր է նույնիսկ 3-համասեռ պարզ հիպերգրաֆների դեպքում: Նշված համարժեքությունը՝ հաջորդ կարևոր արդյունքն է:

Բերվում է անհրաժեշտ և բավարար պայման տրոհումների տրված հզորության ենթաբազմության գոյության համար՝ մեկ մասնավոր դեպքում, այն է, երբ տրոհումների հզորությունները բոլոր ուղղություններով հավասար են:

Թեորեմ 14:

Դիցուք՝ $S=(s,\cdots,s)\in\Xi_{m+1}^n$: $S$-ը պատկանում է $\psi_m$-ին այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$m-\left(\sum_{i=0}^{k}c_{n-1}^{n-i-1}+\left\lfloor\frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n}\right\rfloor\right)\le s\le\sum_{i=0}^{k}c_{n-1}^{n-i-1}+\left\lfloor\frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n}\right\rfloor:$$

## Հիմնական դրույթներն ու եզրահանգումները

- Ստացվել են բազմաչափ միավոր խորանարդի գագաթների $m$-ենթաբազմությունների տրոհումների քանակական բնութագրիչ վեկտորների $\psi_m$ բազմության հատկություններ, որոնք այդ վեկտորների ընդհանուր նկարագրման խնդիրը հանգեցնում են նրանց համասեռ տիրույթի նկարագրմանը, ինչը համեմատաբար ավելի պարզ խնդիր է,
- $\psi_m$-ի նկարագրման խնդիրը բերվում է մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների տրոհումների նկարագրման խնդրին.
- հորիզոնական և ուղղահայաց համարժեքության, ենթախորանարդների և մոնոտոնության տերմիններով տրվում են $\psi_m$ բազմության մի շարք նկարագրումներ,
- ստացվել են $\psi_m$-ի նկարագրման կառուցվածքները այդ բազմության վերին և ստորին եզրային տարրերի տերմիններով,
- ստացվել են վերին համասեռ մինիմալ և մաքսիմալ եզրային տարրերի նկարագրման առնչությունները, կառուցվել են համապատասխան մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաները:

## Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրատարակած աշխատությունների ցանկը


1. Саакян А.А., О градиентном алгоритме синтеза (0,1)−матриц с различными строками. Проблемы автоматического управления. Тбилиси. 1986, 313−316.
2. Саакян А.А., Градиентные алгоритмы синтеза (0,1)−матриц с различными строками. ДАН Арм ССР, LXXXIII, 1986, 5, 207−209.
3. Саакян А.А., Иерархические процедуры распознавания с дополнительными ограничениями. 2−я Всероссийская с участием стран СНГ конференция "Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии" (РОАИ−2−95), ч.1, . 28 августа−1 сентября, 1995, Ульяновск, 76−78.
4. Саакян А.А., Об одном классе (0,1)−матриц, связанных с разбиениями подмножеств $E^n$. Доклады НАН Армении, Том 97, 2, 1997, 12−16.
5. Aslanyan L., Sahakyan H., On the boundary cases of partitioning of subsets of the n−dimensional unit cube. Third Conference on Computer Science and Information Technologies. CSIT'01. Yerevan. 17−20 September. 2001, pp. 164−166.
6. Sahakyan H., "Constraint based weight balanced trees and extension". 4th International Workshop on Computer Science and Information Technologies CSIT 2002., Patras, Greece, 2002.






Саакян Асмик Артемовна

Количественное описание разбиений подмножеств вершин многомерного бинарного куба

## *РЕЗЮМЕ*


Работа посвящена изучению некоторых взаимосвязанных классов задач прикладной комбинаторики. Рассматриваются задачи количественного описания мощностей разбиений подмножеств вершин $n$−мерного единичного (бинарного) куба, задачи существования и построения подмножеств по количественным характеристикам разбиений. Основные результаты получены по количественному и структурному описанию множества $\psi_m$ − множества всех целочисленных векторов, которые являются мощностями разбиений подмножеств фиксированной мощности $m$ (множество характеристических векторов). $\psi_m$ является подмножеством вершин многомерного многозначного куба, где определяются и изучаются классы эквивалентности, симметрии, однородные области $\psi_m$.

- Доказывается, что для полного описания множества $\psi_m$ достаточно получить его описание в области однородности.
- Приводятся ряд описаний $\psi_m$ в терминах классов эквивалентностей, подкубов и монотонности.
- Приводится структурное описание $\psi_m$ в терминах его граничных элементов.
- Задача описания $\psi_m$ сводится к задаче описания характеристических векторов монотонных булевых функций.
- Получены соотношения описывающие минимальные и максимальные граничные элементы верхней однородной области и построены соответствующие им монотонные булевы функции.


Hasmik Artem Sahakyan

On the Quantitative Description of Partitions of Multi-dimensional Binary Cube Subsets

*Ծավալը՝ 20 էջ: Տպաքանակը՝ 60:*

*Տպագրված է ՀՀ ԳԱԱ ԻԱՊԻ կոմպյուտերային պոլիգրաֆիայի լաբորատորիայում:*