

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԱՂԱՅԱՆ ԿԱՐՈ ԼԵՐԵՆՑԻ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ  
ԿՈՒՏԱԿԻՉՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԵՎ ԱԼԻՔՆԵՐԻ  
ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՆ ԱՅԴ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐՈՒՄ

Ա.02.04 “Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա” մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի  
հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2011

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

АГАЯН КАРО ЛЕРЕНЦОВИЧ

**СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ  
ОБЛАСТЕЙ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ И  
ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В ЭТИХ ОБЛАСТЯХ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук по специальности  
01.02.04 – “механика деформируемого твёрдого тела”

ЕРЕВАН – 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ. Գ.Ե.Բաղդասարյան  
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ա.Վ.Մանժիրով  
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ա.Ն.Մարտիրոսյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՌԴ Հարավային Դաշնային  
Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2011թ. դեկտեմբերի 02 – ին, ժամը 14.00-ին  
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդի նիստում  
(հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24բ, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am)):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի  
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ 28 հոկտեմբերի 2011թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,  
ֆիզ.մաթ.գիտ. դոկտոր



Ա.Վ.Մանջիրով

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА.

Официальные оппоненты: академик НАН РА, д.ф.м.н. Г.Е.Багдасарян  
д.ф.м.н., проф. А.В.Манжиров  
д.ф.м.н., проф. А.Н.Мартиросян

Ведущая организация:

Южный федеральный  
университет РФ

Защита диссертации состоится 02 декабря 2011г. в 14<sup>00</sup> часов

на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА  
по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН  
РА.

Автореферат разослан 28 октября 2011г.

Ученый секретарь специализированного совета,  
доктор физ.-мат. наук



А.В.Саакян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Общеизвестно теоретическое и прикладное значение смешанных задач механики деформируемого твердого тела, обусловленное, в значительной мере, исследованиями напряженно–деформированного состояния массивных тел с концентраторами напряжений различных типов – штамп, трещина, стрингер (накладка, включение), металлический электрод и др.

Задачи контактного взаимодействия тонкостенных элементов с массивными твердыми телами в рамках принятых гипотез, учитывающих тонкостенность одного из контактирующих тел, сводятся к решению родственных математических задач, встречающихся при обсуждении классических контактных задач теории упругости, но вместе с тем, требующих отыскания новых эффективных методов их решения, позволяющих более детально исследовать характерные особенности взаимовлияния контактирующих пар. Исследование напряженного состояния массивных тел, содержащих концентраторы напряжений, как в целом, так и в окрестности концевых точек концентраторов является актуальной проблемой как с научной, так и с практической точки зрения. Актуальность указанных задач обусловлена также их непосредственной связью с инженерной практикой, поскольку они встречаются практически во всех отраслях современной техники: при проектировании различных летательных аппаратов, в машиностроении, в строительной механике при расчетах разнообразных промышленных и гидротехнических сооружений, в практике сварочных соединений, при расчете на прочность композиционных материалов, в тензометрии и в других отраслях современной инженерной практики.

В настоящее время с возрастающей интенсивностью развивается область исследований, связанных с изучением волновых процессов и закономерностей распространения возмущений в упругих, магнитоупругих и пьезоэлектрических средах. Результаты теоретических и экспериментальных исследований по этим вопросам позволяют глубже и полнее описывать физические и механические явления, выявить новые свойства и закономерности, присущие исследуемым средам и полям.

Фундаментальные исследования в области динамической теории упругости, связанные с процессами колебаний, дифракции и распространения различных типов волн в указанных выше средах при наличии разнородных концентраторов напряжений, относятся к числу актуальных проблем динамики контактного взаимодействия упругих конструкций. Эти исследования актуальны также в связи с требованиями таких областей науки и техники, как механика деформируемого твердого тела, электродинамика сплошных сред, сейсмология, геофизика, дефектоскопия, акустика, электроника, оптимальное конструирование и т.д.

**Целью диссертационной работы** является

– качественное и количественное исследование ряда смешанных задач, относящихся к следующим направлениям механики деформируемого твердого тела: плоские контактные задачи о передаче нагрузки от стрингеров к упругим телам, моделированным в виде плоскости, полуплоскости и полосы;

деформация упругой плоскости и полосы, ослабленных трещинами и усиленных стрингерами; изгиб однородных и кусочно–однородных балок различной длины на границе упругой полуплоскости; распространение и дифракция плоских сдвиговых волн в кусочно–однородном упругом и пьезоэлектрическом пространстве, содержащем полубесконечные трещину, включение, металлические электроды;

– исследование взаимовлияния стрингеров как между собой, так и с трещинами, поведения основных механических характеристик (контактные напряжения, осевые напряжения в стрингерах, коэффициенты интенсивности напряжений на концах стрингеров и трещин) в зависимости от параметров задачи; особенностей волнового поля в задачах дифракции сдвиговых плоских волн на крае полубесконечного включения, а также излучении такой волны из упругого волновода и дифракции на краях упругого слоя, распределения электроупругого волнового поля в задаче о дифракции плоской сдвиговой электроупругой волны на полубесконечных электродах в пьезоэлектрическом пространстве с щелью.

**Научная новизна** работы состоит в следующем:

- В строгой математической постановке впервые постановлен и решен ряд новых плоских задач о контактном взаимодействии упругой плоскости, полуплоскости и полосы, ослабленных трещинами или без них, с конечной или периодической системой упругих стрингеров различных длин.
- При решении сингулярного интегро–дифференциального уравнения при помощи преобразования Фурье и метода Винера–Хопфа разработан новый подход, позволяющий получить новые представления решений, в частности, задач Н.Х.Арутюняна и П.И.Клубина. Этот подход, в дальнейшем, позволяет решение сингулярного интегро–дифференциального уравнения с ядром, содержащим неподвижную особенность, свести к квазиволне регулярной бесконечной системе.
- Впервые постановлены и исследованы некоторые динамические стационарные задачи о распространении, дифракции и излучении плоских сдвиговых волн в кусочно–однородном упругом и пьезоэлектрическом пространствах, содержащих неоднородности в виде полубесконечных включения и трещины, бесконечного слоя, и полубесконечных электродов.
- При исследовании динамических задач определяющие функциональные уравнения были сформулированы в виде граничных задач типа Римана теории аналитических функций на действительной оси и предложен новый подход, позволяющий получить асимптотические формулы более простым путем – методом интегрирования по частям. Справедливость подхода обоснована на примере известной задачи Зоммерфельда.
- В диссертационной работе метод функциональных уравнений и метод Винера–Хопфа были применены для решения новых классов задач и, обогатившись новыми результатами, получили свое дальнейшее развитие. Полученные результаты могут служить основой для развития аналитиче-

ских и численных методов расчета родственных задач математической физики.

**Практическая ценность работы.** Лист, усиленный ребрами жесткости и ослабленный различными дефектами, принадлежит к очень распространенным типам конструкции. В этом аспекте полученные в диссертации результаты могут быть использованы при расчетах конструкций из композиционных материалов на прочность; при разработке методик расчета прочностных характеристик различных инженерных конструкций и деталей машин, армированных тонкостенными элементами; в строительстве дорожных и аэродромных покрытий; в машиностроении при расчетах контактной прочности и долговечности различных машин и их деталей; в измерительной технике.

Электроупругие поверхностные волны имеют фундаментальные значения в ультразвуковой и микроэлектронной технике. Как примененные подходы к решению задач, так и полученные результаты могут быть положены в основу теоретических исследований новых задач; при проектировании различных приборов измерительной техники, дефектоскопии, радиоэлектронике, в инженерной медицине и в других областях инженерной практики.

**Обоснованность и достоверность** полученных в диссертационной работе результатов, которые в некоторых случаях сравнены с известными результатами, обеспечены корректной постановкой рассматриваемых задач и строгостью примененных математических методов. При решении поставленных задач применялись методы функции комплексного переменного, теории сингулярных интегральных уравнений, методы интегрального преобразования Фурье, Винера–Хопфа, краевой задачи Римана, ортогональных многочленов и разные методы решения функционально–разностных уравнений.

**Апробация работы.** Все работы, вошедшие в диссертационную работу, докладывались на научных семинарах соответствующих подразделений Института механики НАН Армении. Результаты работы регулярно докладывались также на всесоюзных и международных конференциях: Всесоюзные конференции “Смешанные задачи механики деформируемого тела” (Ростов-на-Дону - 1977; Днепропетровск-1981; Харьков-1985, Саратов-2005), I Всесоюзная конференция «Механика неоднородных структур» (Львов -1983), международные конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис -1984, 2005, 2008), международная конференция “Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем” (Ереван, 2002), International Seminar “Days on Diffraction” (Санкт-Петербург, 2004), международная конференция «Механика композитов и оптимальное проектирование» (Ереван-2006), международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Цахкадзор, 2007), международная школа-конференция молодых ученых «Механика 2009» (Агавнадзор, 2009), XIV Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды" (Ростов-на-Дону -

Азов, 2010), II международная конференция «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Дилижан, 2010).

Основные положения диссертационной работы доложены на годичном собрании НАН РА (2010), работа в целом обсуждена на заседании отдела “Динамика деформируемых систем и связанные поля” Института механики НАН РА и на общем семинаре Института механики НАН РА.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в двадцати четырех статьях, список которых приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы и изложена на 291 странице печатного текста. Работа содержит 46 фигур, 17 таблиц и 246 наименований цитированной литературы.

### Содержание работы

**Во введении** дан краткий обзор работ связанных с тематикой диссертации, указан круг обсуждаемых вопросов. Дано краткое содержание работы по главам, изложены основные результаты и положения, выносящиеся на защиту.

**Первая глава** посвящена исследованию некоторых контактных задач для упругой бесконечной пластины (плоскости) и полуплоскости, усиленных системой определенным образом расположенных прямолинейных конечных, полу-бесконечных или кусочно–однородных бесконечных стрингеров (накладки, включения) с постоянным поперечным сечением. Отметим, что, здесь и в дальнейшем, исследования ведутся в рамках плоской теории упругости, предполагая при этом, что стрингеры находятся в одноосном напряженном состоянии в сочетании с моделью контакта по линии.

В §1.1 излагается решение двух контактных задач о передаче нагрузки от конечного числа параллельных, равноотстоящих друг от друга, стрингеров конечной длины к упругой бесконечной пластине. При этом стрингеры расположены в один или два ряда в виде лестницы внутри полос  $[-a, a]$  или  $[-a, -b] \cup [b, a]$ . Предполагается, что модули упругости материалов стрингеров и силы, приложенные к их концу, могут быть произвольными для каждой пары симметрично расположенных стрингеров.

При этих предположениях эти задачи математически сформулированы в виде следующих систем сингулярных интегро–дифференциальных уравнений с ядрами, представимыми в виде суммы сингулярного ядра Коши и регулярного ядра,

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} [K_{k-i}(s-x) + K_{k+i-1}(s-x)] \varphi'_k(s) ds = a \lambda_i \varphi_i(x) \quad (1)$$

$$\lambda_i = \frac{4\pi E h}{(1+\nu)(3-\nu) E_i^{(s)} F_s}, \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

при граничных условиях

$$\varphi_i(-1, 1) = P_i, \quad \varphi_i(-\rho, \rho) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

Здесь  $2N$  число параллельных стрингеров,  $\Gamma$  – область контакта, представляющая собой либо интервал  $(-1,1)$ , либо совокупность симметричных интервалов  $\{(-1,-\rho) \cup (\rho,1)\}$ ,  $P_i$  – сила, приложенная к концу  $i$ -го стрингера,  $K_m(\xi)$  – определенные непрерывные функции, которые при  $m \neq 0$  обладают квадратично суммируемыми производными любого порядка, а при  $m = 0$  совпадают с ядром Коши,  $\phi'_k(x) = a\tau_k(ax)$ , где  $\tau_k(x)$  – неизвестное тангенциальное контактное напряжение, действующее под  $k$ -ым стрингером.

Решение системы уравнений (1) для различных отрезков интегрирования представлено соответственно в виде рядов

$$\phi'_i(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(i)} T_n(x), \quad (-1 < x < 1) \quad (3)$$

$$\phi'_i(x) = \frac{|x|}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-\rho^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^i \psi_{2n-1}(x), \quad (\rho < |x| < 1) \quad (4)$$

В формулах (3) и (4)  $X_n^{(i)}$  – неизвестные коэффициенты,  $T_n(x)$  – многочлены Чебышева первого рода, а  $\psi_{2n-1}(x)$  – функции, ортогональные на двух симметричных интервалах и являющиеся определенной комбинацией многочленов Чебышева.

Далее, по обычной процедуре, уравнение (1) сведено к квазивполне, а при определенных значениях параметра  $\lambda_i$  и вполне регулярной системе бесконечных систем линейных уравнений вида

$$X_m^{(i)} + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(i,k)} X_n^{(i)} = a_m^{(i)} \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad (5)$$

Здесь ядра  $A_{m,n}^{(i,k)}$  и свободные члены  $a_m^{(i)}$  выражаются в виде однократных или двукратных интегралов, являющихся коэффициентами Фурье известных функций в соответствующих областях по системе ортогональных многочленов Чебышева.

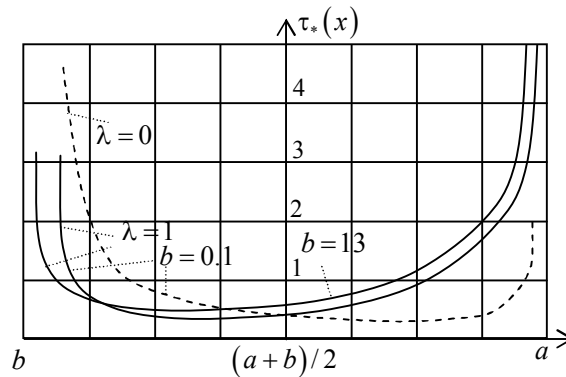
Коэффициенты  $X_0^{(i)}$  определяются непосредственно из граничных условий (2).

Проведен численный анализ задач в случае  $N = 1$ . Выявлено взаимовлияние стрингеров на распределение контактных напряжений под ними и на коэффициенты концентрации напряжений у концов стрингеров. В частности, в табл.1 приведены значения коэффициентов концентрации контактных напряжений для различных значений параметра  $\lambda$  и отношения расстояния между стрингерами к длине стрингера  $L/a$ .

Таблица 1

$\lambda$	0		1		10	
$\frac{K}{2L/a}$	$K_a$	$K_{-a}$	$K_a$	$K_{-a}$	$K_a$	$K_{-a}$
0,1	0,625	0,625	1,0908	0,4591	2,9826	0,1628
0,5	0,575	0,575	1,0707	0,4068	2,9824	0,1432
1	0,550	0,550	1,0604	0,3784	2,9819	0,1296
4	0,513	0,513	1,0447	0,3314	2,9808	0,1015
$\infty$	0,5	0,5	1,0396	0,3132	2,3904	0,0872

На фиг.1 представлены графики распределения безразмерных контактных напряжений под стрингерами постоянной длины  $a - b = const$  при различных значениях параметра  $\lambda$  и разных расстояниях между ними.



Фиг.1

В §1.2 исследуется контактная задача о передаче нагрузки от периодической, с периодом  $2L$ , системы симметрично расположенных и равноотстоящих друг от друга пар полубесконечных стрингеров к бесконечной пластине. К концам стрингеров в точках  $\pm a$ , а также во внутренних точках  $\pm b$  ( $a \leq b < \infty$ ) стрингеров приложены равные по величине и противоположные по направлению силы  $P$  и  $P_1$  соответственно. Решение задачи построено методом функции напряжения. Определение напряженно-деформированного состояния пластины сводится к сингулярному интегральному уравнению

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{s-x} - \frac{\pi}{2} A_s \operatorname{sgn}(s-x) + K(s,x) \right] \varphi(s) ds = Pf(x), \quad |x| < 1 \quad (6)$$

где  $\varphi(x)$  – функция, связанная с деформацией конечного интервала между стрингерами,  $A_s$  – параметр, зависящий от упругих и геометрических характеристик пластины и стрингеров. Решение уравнения (6) методом ортогональных многочленов Чебышева сводится к квазивполне регулярной бесконечной системе. Неизвестные контактные напряжения под стрингерами определяются формулой

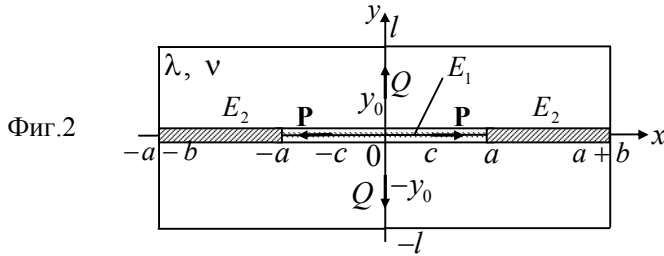
$$\begin{aligned} \tau(x) = & \frac{4ha}{\pi(1+\nu)(3-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} X_n \frac{a^{2n}}{\sqrt{x^2 - a^2} \left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right)^{2n}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X_n \int_0^{\infty} \left[ \frac{A_s + \psi(\lambda)}{A_s + \lambda + \psi(\lambda)} \right] J_{2n}(\lambda\alpha) \sin\left(\lambda \frac{x}{L}\right) d\lambda \right\} + \\ & + \frac{A_s P_1}{\pi L} \left\{ \ln \left| \frac{(b-x)(a+x)}{(b+x)(a-x)} \right| - 2 \int_0^{\infty} \left[ \frac{A_s + \psi(\lambda)}{\lambda(A_s + \lambda + \psi(\lambda))} \right] (\sin \lambda\beta - \sin \lambda\alpha) \sin\left(\lambda \frac{x}{L}\right) d\lambda \right\}, \quad (x > a) \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) видно, что контактные напряжения в точке  $x = \pm a$  имеют корневую особенность, а в точке  $x = \pm b$  – логарифмическую, что согласуется с известными



ми решениями. Из этой формулы также следует, что наличие сосредоточенной силы во внутренней точке стрингера приводит к появлению слагаемого с логарифмической особенностью на конце стрингера. Проведен численный анализ задачи.

В §1.3 рассмотрены две периодические контактные задачи о взаимодействии бесконечных кусочно-однородных включений с упругой плоскостью. Включения составлены либо из двух периодически повторяющихся различных конечных частей, либо из двух полубесконечных частей. На фиг. 2 показан основной период с действующими внешними нагрузками для первой задачи.



Решение задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром, для которого показана возможность нахождения решения в классе суммируемых функций, в частности, методом последовательных приближений. Анализ решения показывает, что в точках  $x = \pm a$  и  $x = \pm c$  контактные напряжения имеют логарифмические особенности, обусловленные неоднородностью включения и приложением сосредоточенных сил.

В случае, когда бесконечные стрингеры состоят из двух разнородных полубесконечных частей, т.е. модуль упругости которых изменяется по закону  $E(x) = E_1\theta(x) + E_2\theta(-x)$ , решение задачи сведено к функциональному уравнению на действительной оси и методом факторизации построено его замкнутое решение.

В §1.4 рассмотрена контактная задача для упругой полубесконечной пластины с жестко соединенным с ней упругим полубесконечным стрингером с малым прямоугольным поперечным сечением. Стрингер расположен параллельно границе пластины на конечном расстоянии  $b$  от нее. Решение задачи сведено к краевой задаче Римана относительно образов Фурье контактного напряжения  $\tau(x)$  под стрингером и продольной деформации  $u'(x, b)$  пластины на линии продолжения стрингера

$$|\sigma| \bar{K}_0(\sigma) \bar{K}_1(\sigma) \bar{\tau}^-(\sigma) = i\sigma A \bar{U}^+(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (8)$$

$$\bar{K}_0(\sigma) = 1 + \frac{c_0}{|\sigma|}, \quad \bar{K}_1(\sigma) = 1 + \frac{c_1|\sigma| + bc_2\sigma^2 + b^2c_3|\sigma|^3}{c_0 + |\sigma|} e^{-2b|\sigma|}$$

где  $A$  и  $c_j (j = 0, 3)$  - постоянные, зависящие от упругих и геометрических характеристик пластины и стрингера.

Методом факторизации построено замкнутое решение задачи

$$\tau^-(x) = -\frac{E_s F_s}{E} \frac{\sqrt{2c_0}}{2\pi(1+i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{K}_0^-(\sigma) \bar{K}_1^-(\sigma)}{(\sigma - i0)^{1/2}} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (9)$$

Получены асимптотические формулы, определяющие распределение контактных напряжений в близкой ( $x \rightarrow -0$ ) и дальней ( $x \rightarrow -\infty$ ) от конца стрингера зонах.

В §1.5 заново рассмотрена известная контактная задача для упругой полуплоскости с упругой накладкой конечной длины  $2a$  на ее границе, к правому концу которой приложена осевая растягивающая сила  $P$ . Определение неизвестных контактных касательных напряжений, как известно, сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению на конечном интервале с определенным граничным условием.

Решение определяющего интегро-дифференциального уравнения, при помощи комплексного преобразования Фурье, в конечном итоге сводится к решению двух функционально-разностных уравнений относительно образов Фурье четной  $\bar{q}_2^-(\alpha)$  и нечетной  $\bar{q}_1^-(\alpha)$  частей контактного напряжения и деформации свободной части границы полуплоскости. Решение этих уравнений построено методом факторизации и для четной части оно имеет вид

$$\bar{K}_2^-(\alpha) \bar{q}_2^-(\alpha) + \lambda \bar{\varphi}_2^-(\alpha) - \frac{\lambda P}{2a} \frac{1}{\alpha \bar{K}_2^+(0)} = a_2, \quad \text{Im } \alpha < 0 \quad (10)$$

$$\bar{\varphi}_2^+(\alpha) + \bar{\varphi}_2^-(\alpha) = \frac{\bar{q}_2^-(\alpha - i)}{\alpha \bar{K}_2^+(\alpha)}; \quad \text{th}(\pi\alpha/2) = \bar{K}_2^-(\alpha) \cdot \bar{K}_2^+(\alpha) \quad (11)$$

где  $\lambda$  - параметр задачи,  $a_2$  - неизвестная постоянная, подлежащая определению из условия равновесия накладки.

Рассматривая аналитическое продолжение разностного уравнения в область  $\text{Im } \alpha \geq 0$ , нетрудно убедиться, что полюсами функции  $\bar{q}_2^-(\alpha)$ , притом простыми, могут быть только точки  $\alpha = 2ni$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), а функции  $\bar{\varphi}_2^-(\alpha)$  - точки  $\alpha = 0$  и  $\alpha = (2n-1)i$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Далее, пользуясь представлением аналитической функции в виде разложения по полюсам, из (10) и (11) получим следующее выражение для четной части контактных напряжений

$$\tau_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ia_2 \cdot a}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{i\sqrt{2}a_2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\beta_m^{(2)} \Gamma(m+1)} [X_m^{(2)} - \beta_m^{(2)}] \left(\frac{x}{a}\right)^{2m} \quad (0 \leq x < a) \quad (12)$$

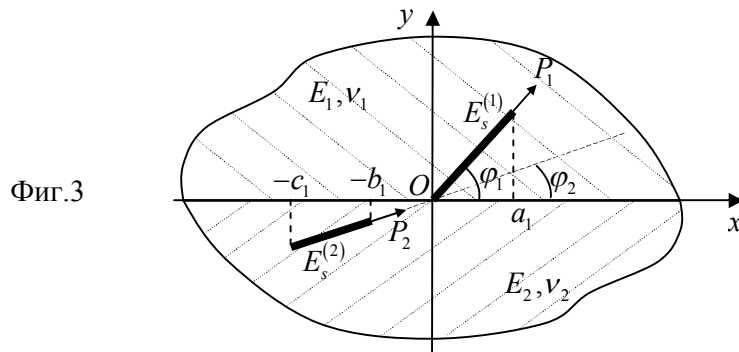
а для определения коэффициентов  $X_m^{(2)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) - регулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений простой структуры вида

$$X_m^{(2)} + \frac{\lambda}{4} \beta_m^{(2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n^{(2)}}{(n+1/2)(n-m+1/2)} = \beta_m^{(2)} \quad (13)$$

$$\beta_0^{(2)} = 1, \quad \beta_m^{(2)} = \left(1 - \frac{1}{4m^2}\right) \beta_{m-1}^{(2)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Численный анализ полученных решений показал их полное совпадение с ранее известными решениями.

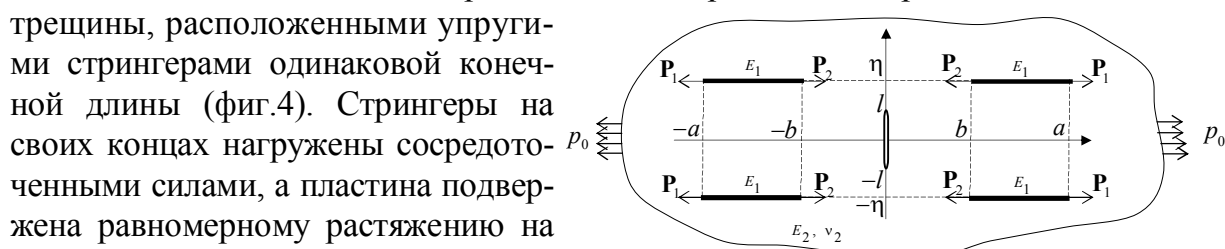
В §1.6 рассмотрена контактная задача о передаче нагрузки от двух произвольно ориентированных стрингеров конечной длины к бесконечной кусочно-однородной упругой пластине. Стрингеры расположены на разных полуплоскостях, при этом конец одного из них выходит на линию разнородности (фиг.3).



Решение задачи сводится к решению системы из двух сингулярных интегродифференциальных уравнений относительно контактных напряжений под стрингерами. Ядро одного из уравнений содержит неподвижную особенность в начале координат. Показано, что и в этом случае путем совмещения методов ортогональных многочленов и факторизации, аналогично предыдущему параграфу, решение полученной системы можно свести к системе квазивполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

**Вторая глава** посвящена контактным задачам для упругой бесконечной пластины и полосы, ослабленных трещинами и усиленных стрингерами.

В §2.1 рассматривается контактная задача для бесконечной пластины с трещиной конечной длины, подкреплённой четырьмя симметрично, относительно трещины, расположенными упругими стрингерами одинаковой конечной длины (фиг.4). Стрингеры на своих концах нагружены сосредоточенными силами, а пластина подвержена равномерному растяжению на бесконечности.

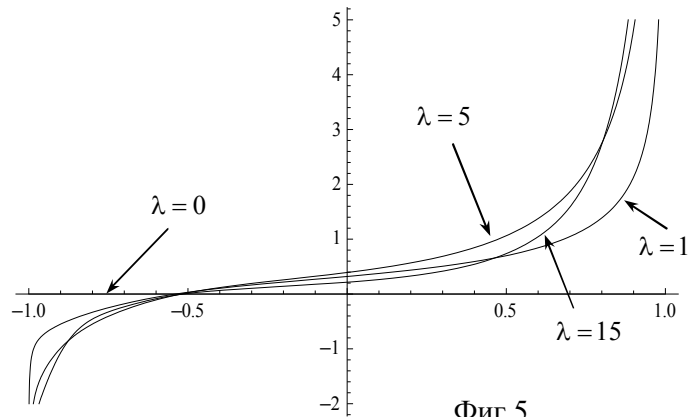


Исследуется взаимовлияние стрингеров и трещины при различных расположениях трещины и стрингеров. Решение задачи в общем случае сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши и некоторого дополнительного ядра. В случаях, когда стрингеры не достигают берегов трещины ( $b > 0$  или  $\eta > l$ ), дополнительное ядро регулярно и решение интегрального уравнения сводится к квазивполне регулярной бесконечной системе. В случаях, когда стрингеры достигают берегов трещины или проходят через нее ( $b = 0$  и  $\eta < l$ ) в дополнительном ядре появляется также неподвижная

особенность. В этих случаях построено приближенное решение интегрального уравнения при помощи метода дискретных особенностей.

В довольно широком диапазоне изменения параметров задачи исследовано взаимовлияние стрингеров и трещины, в частности, влияние стрингеров на коэффициент интенсивности напряжений на концах трещины. Результаты вычислений показывают, что если внешние силы приложены на бесконечности пластины, то наличие стрингеров мало влияет на значение предельной силы, а если она приложена непосредственно к стрингерам, то стрингеры в зависимости от геометрических и физических параметров задачи заметно влияют на распределение напряжений около концов трещины, и, тем самым, на предельную нагрузку.

С точки зрения влияния трещины на распределение контактных напряжений при тех же видах нагружения имеет место обратный эффект, хотя перераспределение напряжений, обусловленное наличием трещины происходит только в окрестности близких к трещине концов стрингеров. В таблице 2 приведены критические значения внешних нагрузок для различных значений исходных параметров задачи при  $\eta=0$  и  $P_2=0$ , т.е. когда имеем только два стрингера по обе стороны от трещины, а на фиг. 5 - графики распределения контактных напряжений в случае, когда цельный стрингер проходит через трещину ( $b=0$  и  $\eta=0$ ).



Фиг.5

эффект, хотя перераспределение напряжений, обусловленное наличием трещины происходит только в окрестности близких к трещине концов стрингеров. В таблице 2 приведены критические значения внешних нагрузок для различных значений исходных параметров задачи при  $\eta=0$  и  $P_2=0$ , т.е. когда имеем только два стрингера по обе стороны от трещины, а на фиг. 5 - графики распределения контактных напряжений в случае, когда цельный стрингер проходит через трещину ( $b=0$  и  $\eta=0$ ).

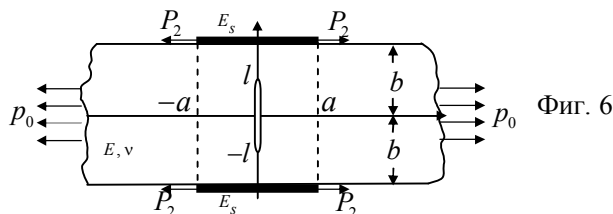
Таблица 2

	$a = 4, b = 0.2$				$a = 4, b = 1$			$a = 4, b = 2$		
$\lambda$	0	1.94	4.09	24.08	0	1.94	4.09	0	1.94	4.09
$\sqrt{\pi} P_1^* / \sqrt{2} K_{Ic}$	1.13	1.41	1.55	1.81	1.53	1.83	1.99	2.73	2.98	3.15
$\sqrt{\pi} p_0^* / \sqrt{2} K_{Ic}$	0.32	0.37	0.39	0.42	0.36	0.39	0.41	0.42	0.43	0.436

В §2.2 исследуется контактная задача о взаимодействии периодической системы параллельных стрингеров конечной длины с бесконечной пластиной, ослабленной симметрично, относительно стрингеров, расположенной периодической, с тем же периодом, системой перпендикулярных к ним трещин. Внешними нагрузками являются сосредоточенные силы, приложенные к концам стрингеров, распределенные нормальные нагрузки на берегах трещин и на бесконечности. Решение соответствующей плоской задачи от сосредоточенных сил, приложенных непосредственно к пластине, на основе которой строится функция влияния, сведено к периодической смешанной краевой задаче для полуплоскости и построено ее замкнутое решение в виде интегралов Коши. Определение контактных напряже-

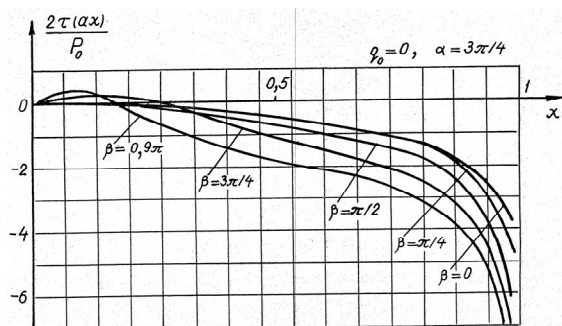
ний и коэффициентов интенсивности напряжений сведено к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения, которая, в свою очередь, сведена к квазивполне регулярной бесконечной системе.

В §2.3 рассматриваются две контактные задачи для полосы. В первом случае полоса ослаблена периодической системой поперечных центральных трещин и усилена по краям периодически повторяющимися, с тем же периодом, стрингерами. Во втором – рассмотрена задача о растяжении полосы с центральной трещиной, усиленной симметрично расположенными на краях полосы стрингерами конечной длины (фиг.6). Решение задач сведено к системе двух сингулярных интегральных уравнений с ядрами, представимыми суммой сингулярного ядра Гильберта или Коши и регулярных ядер. Методом ортогональных многочленов эти системы сведено к двум квазивполне регулярным бесконечным системам линейных уравнений.



Фиг. 6

$p_0 \neq 0$ ( $q_0 = P_2 = 0$ )	$\pi l / b$ $\pi a / b$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$0,9\pi$
$K_1 / K_{1s}$	$\pi/2$	1,0552	1,1086	1,4365	2,8723
	$3\pi/4$	1,1866	1,3417	2,0748	4,7579
	$\pi$	1,3217	1,7094	2,9245	7,1817

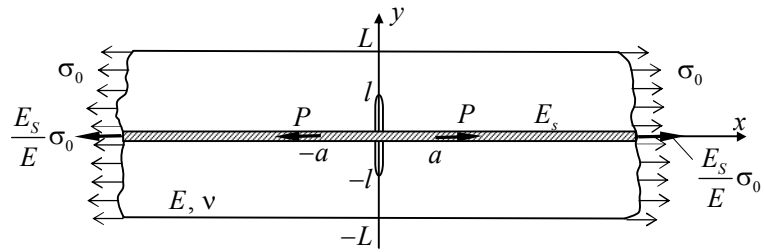


Фиг.7

Исследовано влияние трещины на распределение контактных напряжений под стрингерами и стрингеров на коэффициенты интенсивности на концах трещины при различных значениях исходных параметров задачи. Выявлена мера влияния стрингеров на уменьшение коэффициента интенсивности напряжений. Некоторые результаты вычислений для второй задачи приведены в табл. 3 и на фиг. 7. В таблице приведены значения

отношения коэффициентов интенсивности напряжений  $K_1 / K_{1s}$ , где  $K_1$  и  $K_{1s}$  – коэффициенты интенсивности разрывающих напряжений в конце трещины соответственно при отсутствии и наличии стрингеров для различных значений геометрических параметров задачи. На фиг.7 представлены графики распределения контактных напряжений под стрингерами.

В §2.4 исследуются две контактные задачи о взаимовлиянии бесконечных включений (стрингеров) с системой трещин в упругой плоскости. В первом случае упругая плоскость ослаблена двоякопериодической, а во втором случае периодической системой трещин и усилена перпендикулярно расположенными бесконечными включениями, проходящими через центры трещин. На



Фиг. 8

На фиг. 8 показан основной период второй задачи. Решение задач сводится либо к системе либо к одному сингулярному интегральному уравнению первого рода относительно производной скачка нормальных перемещений берегов трещины и контактных напряжений. Ядра этих уравнений, помимо ядер Гильберта или Коши и регулярных частей, содержат также неподвижную особенность, обусловленную пересечением трещин и включений. Приближенное решение интегрального уравнения построено методом дискретных особенностей. Получены простые расчетные формулы для контактных напряжений под стрингерами, осевых усилий в них и коэффициентов интенсивности напряжений на концах трещины. Проведена численная реализация задачи. В табл. 4, подобно предыдущей таблице, приведены значения отношения коэффициентов интенсивности напряжений для различных значений упругих и геометрических параметров задачи.

Таблица 4.

$\sigma_0 \neq 0$ ( $p^+ = P = 0$ )	$l/L$	1/8	1/4	1/2	3/4	7/8
$K_1/K_{1s}$	0.1	0.5415	0.6712	0.7516	0.8571	0.9215
	0.5	0.5216	0.6521	0.7351	0.8316	0.9407
	1	0.5191	0.6431	0.7210	0.8150	0.9518
	5	0.5041	0.6115	0.0631	0.7902	0.9625

**Глава III** посвящена исследованию контактных задач об изгибе однородных или кусочно-однородных балок (пластин при цилиндрическом изгибе) различных длин, лежащих на границе упругой полуплоскости.

Во всех рассмотренных в этой главе задачах исследование ведется в рамках классической теории изгиба балок и при предположениях, что в процессе деформирования балка не отрывается от края полуплоскости и под балкой возникают только нормальные контактные напряжения.

В первых двух параграфах этой главы рассматриваются контактные задачи об изгибе кусочно-однородных балок на крае упругой полуплоскости.

В §3.1 бесконечная кусочно-однородная балка с модулем упругости  $E(x) = E_1\vartheta(-x) + E_2\vartheta(x)$  ( $\vartheta(x)$ —функция Хевисайда) вдавлируется в границу упругой полуплоскости с помощью нормальных сил  $P\delta(x+a)$  ( $a > 0$ ) и

$Q\delta(x-b)$  ( $b > 0$ ). С помощью преобразования Фурье решение задачи сводится к решению функционального уравнения

$$\left(\lambda_2^3 + |\sigma|^3\right)\bar{q}^+(\sigma) + \left(\lambda_1^3 + |\sigma|^3\right)\bar{q}^-(\sigma) = \bar{f}(\sigma) \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (14)$$

$$\bar{f}(\sigma) = \lambda_1^3 P e^{-i\sigma a} + \lambda_2^3 Q e^{i\sigma b} + \frac{\mu}{1-\nu} (a_0 - i\sigma a_1), \quad \lambda_j^3 = \frac{\mu}{(1-\nu)D_j}, \quad (j=1,2)$$

Методом факторизации построено замкнутое решение задачи, которое в частном случае  $\lambda_1 = \lambda_2$  совпадает с известным решением Шехтера. Обнаружено, что контактное напряжение под кусочно-неоднородной балкой непрерывно по всей длине балки. Получены асимптотические формулы, определяющие распределение контактных напряжений в окрестности точки стыка и в далеких от нее зонах

$$\lambda_1^{-1} q(x) = 6 \left[ \bar{\varphi}^+(0) \left(1 - \lambda_1^3 / \lambda_2^3\right) - A \pi^{-1} (\lambda_1 / \lambda_2)^{3/2} \right] (\lambda_1 x)^{-4} + O\left((\lambda_1 x)^{-5}\right) \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lambda_1^{-1} q(x) = -6 \left[ A \pi^{-1} - \left(1 - \lambda_1^3 / \lambda_2^3\right)^{3/2} (A + \bar{\varphi}^-(0)) (\lambda_1 / \lambda_2)^{3/2} \right] (\lambda_1 x)^{-4} + O\left((\lambda_1 x)^{-5}\right) \quad x \rightarrow -\infty$$

$$q(x) = q(0) + O(x \ln|x|) \quad x \rightarrow 0$$

В §3.2 кусочно-однородная балка состоит из двух – конечной и полубесконечной – частей и ее модуль упругости можно представить в виде

$$E(x) = E_1 [\theta(x) - \theta(x-a)] + E_2 \theta(x-a).$$

Решение задачи сводится к фредгольмовскому интегральному уравнению второго рода с непрерывным ядром относительно неизвестного контактного давления, действующего под конечной частью кусочно-однородной полубесконечной балки. Получено условие для упругих и геометрических характеристик балки и полуплоскости, при выполнении которого интегральное уравнение можно решить методом последовательных приближений. Правая часть интегрального уравнения имеет корневую особенность на левом конце линии интегрирования, а на правом – ограничена, что приводит к соответствующему поведению контактных напряжений на конце полубесконечной балки и под точкой ее неоднородности.

В §3.3 вновь рассматривается известная контактная задача об изгибе полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, когда к концу балки приложены сосредоточенная сила  $P_0$  и момент  $M_0$ . Решение задачи при помощи комплексного преобразования Фурье сведено к однородному функционально-разностному уравнению относительно образа Фурье контактного давления

$$\operatorname{cth} \pi \alpha \cdot \bar{P}(\alpha) + \frac{\bar{P}(\alpha - 3i)}{\alpha(\alpha - i)(\alpha - 2i)} = 0, \quad -1 < \operatorname{Im} \alpha < -\frac{1}{2} \quad (15)$$

и построено ее замкнутое решение.

Рассматривая аналитическое продолжение функционального уравнения вне полосы регулярности, как в §1.5, можно убедиться, что аналитическое

продолжение  $\bar{P}(\alpha)$  в точках тройках  $\{(3n-1/2)i; (3n+1/2)i; (3n+3/2)i\}_{n=0}^{\infty}$  области  $\text{Im}\alpha > -1$  и в точках тройках  $\{-(3n+4)i; -(3n+5)i; -(3n+6)i\}_{n=0}^{\infty}$  области  $\text{Im}\alpha < -1/2$  может иметь полюсы  $(n+1)$ -го порядка.

Асимптотические формулы, как обычно, определяются из полученного замкнутого решения при помощи интегральной формулы Коши. Далее, используя аналитическое продолжение функционально-разностного уравнения во всю комплексную плоскость и учитывая аналитические свойства функции  $\bar{P}(\alpha)$ , предлагается алгоритм, позволяющий вычислить вычеты этой функции в вышеуказанных полюсах, что, в свою очередь, дает возможность вычислить, в явном виде, практически все коэффициенты асимптотического разложения любого конечного порядка. Этим подходом получены асимптотические формулы, определяющие поведение контактных напряжений около конца полубесконечной балки  $x \rightarrow 0$  и в далеких от нее точках. Так, у конца балки имеем следующее асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \beta q(\beta x) = & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\pi}}(2P_0 - \sqrt{3}M_*)x^{-1/2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}(P_0 - 2\sqrt{3}M_*)x^{1/2} - \frac{2\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}}(P_0 - \sqrt{3}M_*)x^{3/2} - \\ & - \frac{8\sqrt{6}}{45\pi^2} \left[ (2P_0 - \sqrt{3}M_*) \left( \frac{5\sqrt{3}}{54} - \frac{3\pi}{4} - \psi\left(-\frac{5}{2}\right) \right) - \pi M_* \right] x^{5/2} - \\ & - \frac{8\sqrt{3}}{45\pi\sqrt{\pi}}(2P_0 - \sqrt{3}M_*)x^{5/2} \ln x + O\left(x^{7/2}(\ln x + 1)\right), \quad x \rightarrow +0 \end{aligned} \quad (16)$$

В §3.4, на примере контактной задачи об изгибе балки конечной длины на границе упругой полуплоскости, была установлена возможность применения подходов, изложенных в §§1.5 и 3.3. Рассмотрены случаи, когда к концам балки приложены сосредоточенные силы и изгибающие моменты и когда на балку действует распределенная нормальная нагрузка. Решение задачи сведено к квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических систем относительно вычетов трансформанта Фурье контактного давления  $\bar{P}(\alpha)$ , отличающейся предельной простотой ее ядра. В конечном итоге, для контактного давления получено представление в виде суммы явно выделенной особенности, как отдельного слагаемого, и равномерно сходящегося степенного ряда. Последнее позволяет найти связь между  $P_0$  и  $M_0$ , когда коэффициент при особенности обращается в ноль. В частности, при симметричных граничных условиях она имеет вид

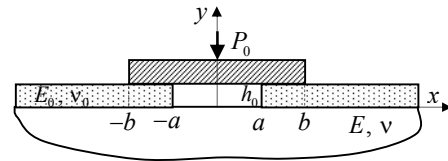
$$P_0 = \frac{M_0}{a} \frac{3\lambda}{3 + \lambda(3\pi - 4)} \quad (17)$$

В случае распределенной нормальной нагрузки выявлено, что в тех случаях, когда внешняя нагрузка содержит слагаемые вида  $P_0\delta(x)$  или  $M_0\delta(x)$ , полюсы аналитического продолжения функции  $\bar{P}(\alpha)$  становятся кратными. При помощи аналитического продолжения соответствующего функционального уравне-



ния и в этом особом случае удастся построить решение задачи, сводя ее к квазивполне регулярной бесконечной системе.

Параграф §3.5 посвящен исследованию контактной задачи об изгибе двух полубесконечных балок, расположенных на границе упругой полуплоскости на конечном расстоянии  $2a$  друг от друга. Изгиб осуществляется симметрично расположенным относительно балок жестким гладким штампом с плоским основанием ширины  $2b$  ( $b > a$ ) (фиг. 9).



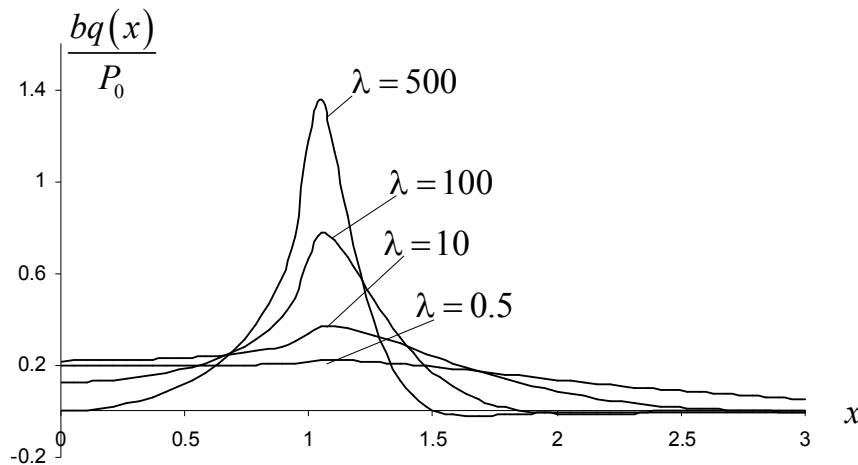
Фиг. 9

Решение задачи сведено к системе из двух интегральных уравнений относительно контактных напряжений под балками, действующих на конечных участках  $(-b, -a) \cup (a, b)$ , и деформации граничных точек полуплоскости между балками, первое из которых является фредгольмовским уравнением II рода, а второе - сингулярным уравнением с ядром Коши. Решение последней сведено к системе из двух квазивполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

Контактные напряжения, действующие непосредственно под штампом, выражаются посредством решения интегрального уравнения  $q(x)$  формулой

$$p(x) = q(x) - Q_b [\delta(x-b) + \delta(x+b)] + M_b [\delta(x+b) - \delta(x-b)] \quad (18)$$

явно указывающей на наличие в крайних точках штампа сосредоточенной силы и сосредоточенного момента,  $Q_b$  и  $M_b$  значения перерезывающей силы и изгибающего момента в точках  $x = \pm b$  балок.



Фиг.10

Численная реализация частного случая рассматриваемой задачи ( $a = 0$ ), когда на границе упругой полуплоскости под действием штампа с плоским основанием конечной длины изгибается балка бесконечной длины, также подтвердила возникновение сосредоточенных силовых факторов на концах штампа (фиг.10).

В таблице 5 приведены величины этих факторов для разных значений параметра  $\lambda$ .

Таблица 5

$\lambda$	0.5	1	5	10	30	100	500
$Q_b/P_0$	0.3232	0.2999	0.2674	0.2564	0.2584	0.2657	0.2763
$M_b/bP_0$	0.2283	0.1781	0.1226	0.0976	0.0755	0.0542	0.0331

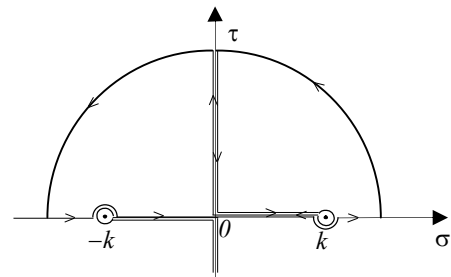
Четвертая глава посвящена аналитическому исследованию динамических контактных задач о дифракции и излучении сдвиговых плоских волн в упругом кусочно-однородном пространстве, содержащем неоднородности в виде полубесконечного включения, полубесконечных трещин и слоя. Одним из строгих аналитических методов решения краевых задач является метод факторизации, который успешно используется для нахождения точных решений многочисленных интересных и важных задач этой области.

Решения этих задач зачастую выражаются интегралами типа Фурье, которые, за исключением немногих частных случаев, в конечном виде не вычисляются. При этом в задачах дифракции волн одним из основных компонентов исследования, как известно, является определение волнового поля в дальней зоне, которое описывается соответствующими асимптотическими формулами, получающимися из вышеуказанных интегралов Фурье. При исследовании задач, рассмотренных в этой и следующей главах, был предложен и использован новый подход к вопросу определения указанных выше асимптотических формул.

В §4.1, на примере решения известной задачи о дифракции сдвиговой плоской волны  $u_z^{(\infty)}(x, y, t) = w_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$ , распространяющейся из бесконечности, на крае полубесконечной трещины в упругой плоскости излагается указанный новый подход к определению асимптотических формул. Решение задачи, после действительного преобразования Фурье, сводится к следующему функциональному уравнению (краевая задача типа Римана) на действительной оси:

$$\mu^{-1}\bar{\phi}_+(\sigma) + \gamma(\sigma)\bar{\psi}_-(\sigma) = -2\pi ik \sin\beta \cdot \delta(\sigma - k \cos\beta), \quad \gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \quad (19)$$

где  $\delta(x)$  – известная функция Дирака,  $k$  – волновое число,  $\bar{\psi}_-(\sigma)$  и  $\bar{\phi}_+(\sigma)$  – трансформанты Фурье неизвестных функций, связанных с амплитудой перемещения и ее нормальной производной. Для функции  $\gamma(\sigma)$ , здесь и в дальнейшем, предполагается, что  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$  при  $|\sigma| > k$  и  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$  при  $|\sigma| < k$ , вследствие чего действительная ось обходит точку ветвления  $\sigma = -k$  сверху, а точку  $\sigma = k$  – снизу.



Фиг. 11

Решение уравнения (16) построено методом факторизации и, в итоге, решение задачи

представлено интегралами Фурье в виде, совпадающем с известными решениями. Перейдя в комплексную плоскость, разрезанную как показано на фиг.11, полученное решение представляется посредством регулярных интегралов на разрезах. Так, во второй четверти ( $x < 0, y \geq 0$ ) решение задачи представляется в виде

$$w(x, y) = -\frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\varphi_1/2} / \left( \sqrt{k^2 + \tau^2} (i\tau - k \cos \beta) \right) \left[ e^{-i\sqrt{k^2 + \tau^2} y} + e^{i\sqrt{k^2 + \tau^2} y} \right] e^{-\tau|x|} d\tau - \frac{iD}{2\pi} \int_0^k \frac{e^{-i\sqrt{k^2 - \sigma^2} y} + e^{i\sqrt{k^2 - \sigma^2} y}}{\gamma(\sigma - k \cos \beta + i0)} e^{-i\sigma x} d\sigma + e^{-ikx \cos \beta + iky \sin \beta} + w_{\infty}(x, y), \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \tau/k \quad (20)$$

При определении асимптотических формул, представляющих волновое поле в дальних зонах, обычно исходят из вышеуказанного решения в виде интеграла Фурье, используя, главным образом, наиболее распространенный метод перевала. В предлагаемом подходе за основу берется представление (20).

Перейдя к полярным координатам, и делая затем замену переменных интегрирования

$$\begin{aligned} \lambda_1(\sigma) &= \sigma |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta; \\ \lambda_2(\sigma) &= \sigma |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta \end{aligned} \quad (21)$$

удается интегральные составляющие из (20) преобразовать и представить в виде таких интегралов, которые уже допускают интегрирование по частям в нужном количестве раз.

При этом: а) во время этих преобразований выделяется асимптотика объемной волны в виде отдельного слагаемого с необходимым количеством членов разложения; б) внеинтегральные члены, появляющиеся после интегрирования по частям на каждом шаге сокращаются, и, в итоге, оставшиеся интегральные составляющие имеют более высокий порядок убывания, чем последний член в асимптотике объемной волны.

Указанным путем получены первые члены асимптотических формул во всех секторах рассматриваемой задачи, которые точно совпадают с существующими известными результатами.

Отметим, что предлагаемый подход, позволяет вычислить произвольное конечное число коэффициентов асимптотического разложения.

В §4.2 исследуется динамическая контактная задача о дифракции сдвиговой плоской волны на конце упругого полубесконечного включения в виде полубесконечного слоя с малой толщиной  $2h$ . Требуется определить дифрагированное волновое поле как на участке контакта, так и во всем пространстве, когда из бесконечности под углом  $\beta$  падает сдвиговая плоская волна  $u_z^{(\infty)}(x, y) = e^{-ikx \cos \beta - iky \sin \beta}$  ( $k = \omega/c$  - волновое число,  $c$  - скорость распространения сдвиговых волн в пространстве). Задача решается в амплитудах и ее решение представляется в виде суммы своих четной и нечетной частей.

Считая толщину включения достаточно малой, т.е. полагая, что  $hk_0 \ll 1$  ( $k_0$  - волновое число для включения), и усредняя перемещение тонкого слоя по толщине, т.е. отождествляя его со срединной плоскостью, в случае четной задачи приходим к следующему функциональному уравнению на действительной оси

$$\bar{w}_1^+(\sigma, 0) + \frac{L(\sigma)}{h\mu_0\mu\sqrt{\sigma^2 - k^2}(\sigma^2 - k_0^2)} \bar{q}_1^-(\sigma) = 2\pi\delta(\sigma - k \cos\beta) + \frac{i\sigma u_1^{(0)}(0)}{\sigma^2 - k_0^2} \quad (22)$$

$$L(\sigma) = \mu\sqrt{\sigma^2 - k^2} + h\mu_0(\sigma^2 - k_0^2),$$

$u_1^{(0)}(0)$  - постоянная, подлежащая определению.

Функция Лява  $L(\sigma)$  при  $k < k_0$  имеет единственный действительный корень

$$\sigma_L = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2k_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_1 \sqrt{\lambda_1^2 + 4(k_0^2 - k^2)}}; \quad \lambda_1 = \frac{\mu}{\mu_0 h}; \quad k < \sigma_L < k_0 \quad (23)$$

Так как  $-\sigma_L$  также является нулем функции  $L(\sigma)$ , то, полагая в (22) действительную ось обходящей точку  $-\sigma_L$  сверху, а точку  $\sigma_L$  - снизу, будет обеспечено выполнение условия уходящей волны. Замкнутое решение функционального уравнения получено методом факторизации.

Аналогично построено решение нечетной задачи и, в итоге, полное решение задачи представлено в интегралах Фурье.

Проведено детальное исследование полученного решения и получены довольно простые формулы, которые наглядно представляют особенности волнового поля вокруг полубесконечного включения. В частности, для амплитуды перемещений в контактной зоне ( $x < 0, y = \pm 0$ ), получено

$$u_z(x, \pm 0) = (1 + A_{01} \pm A_{02}) e^{-ikx \cos\beta} + A_L e^{-i\sigma_L x} + \frac{e^{-i\left(kx + \frac{\pi}{4}\right)}}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\tau} (\lambda_1 f_1(\tau) \mp f_2(\tau)) e^{\tau x} d\tau \quad (x < 0) \quad (24)$$

Представление (24) показывает, что волновое поле в контактной зоне складывается из компонентов: падающая волна, отраженная или проходящая волна, поверхностная (локализованная) волна Лява и дифрагированная объемная волна. Если  $k_0 < k$ , то волна Лява отсутствует. Кроме того, наличие компонент поверхностной волны Лява и сдвиговой объемной волны обусловлено наличием ребра (кромки) упругого включения, так что при данной постановке задачи в случае бесконечного включения эти члены отсутствуют.

Для контактного напряжения в близкой к концу включения и в далеких от нее зонах получены асимптотические формулы

$$\frac{1}{\mu} q^-(x) = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{|x|^{\frac{1}{2}}} + O(1) \quad x \rightarrow -0 \quad (25)$$

$$\frac{1}{\mu} q^-(x) = A_0^{(q)} e^{-ikx \cos \beta} + A_L^{(q)} e^{-i\sigma_L x} + e^{-i\left(kx - \frac{\pi}{4}\right)} \left( \frac{B_q^{(0)}}{2\sqrt{\pi}|x|^{\frac{3}{2}}} + O\left(|x|^{-\frac{5}{2}}\right) \right) \quad x \rightarrow -\infty \quad (26)$$

Перейдя в полученном решении к полярным координатам, получены асимптотические формулы, наглядно представляющие распределение волнового поля в каждом секторе плоскости и распределение напряжения  $\tau_{\theta z}(r, \theta)$  вблизи края включения. Так, при  $r \rightarrow \infty$  в теневой зоне  $-\pi \leq \theta < -\pi + \beta$  имеем

$$u_z(r, \theta) = (1 + A_{01} - A_{02}) e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} + A_L e^{-ir\lambda_L} + e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \left( B(\theta) \frac{1}{\sqrt{\pi kr}} + O(rk)^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (27)$$

а при  $r \rightarrow 0$

$$\tau_{\theta z} = \mu \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi r}} \left( (a_1 - a_2) \sin \frac{\theta}{2} - \frac{i\sqrt{2k} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\bar{K}_2^+(k \cos \beta)} \right) + O(1) \quad (28)$$

Из решения рассмотренной задачи получены решения задач для плоскости с полубесконечной трещиной (§4.1) или с жестким полубесконечным включением, предельных к рассмотренной.

В §4.3 рассмотрена динамическая задача распространения и дифракции локализованной сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. Упругое пространство, отнесенное к декартовой систем координат  $Oxyz$ , содержит упругое полубесконечное включение малой толщины  $2h$ , занимающее область  $(-\infty > x \leq 0, |y| \leq h, |z| < \infty)$ . Здесь, в отличие от предыдущей задачи, падающая волна представляет собой локализованную сдвиговую плоскую волну, распространяющуюся из бесконечности вдоль полубесконечного включения и имеет вид

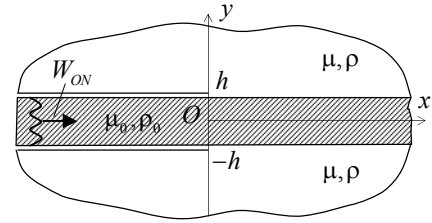
$$u_z^{(\infty)}(x, y, t) = e^{-\sqrt{\sigma_L^2 - k^2}|y|} \cdot e^{i\sigma_L x} e^{-i\omega t}, \quad (29)$$

где  $k = \omega/c$  – волновое число,  $c = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорость сдвиговой волны в пространстве,  $\omega$  – частота,  $\sigma_L$  – волновое число локализованной волны (волна Лява), определяемое формулой (23).

Аналогичным способом, как в §4.2, для амплитуды упругого перемещения получено следующее представление

$$w(x, y) = e^{-\sqrt{\sigma_L^2 - k^2}|y|} \cdot e^{i\sigma_L x} + \frac{\sqrt{\sigma_L - k} \bar{K}_1^+(\sigma_L)(\sigma_L + k_0)}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}|y|}}{\sqrt{\sigma + k} \bar{K}_1^-(\sigma)(\sigma - k_0)} \cdot \frac{e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sigma + \sigma_L + i0} \quad (30)$$

В §4.4 исследуется задача об излучении сдвиговой плоской волны, распространяющейся внутри свободной части упругого волновода (слоя), в составное упругое пространство. Слой вложен в пространство и соединен с ней частично. Со стороны несоединенной части слоя распространяется заданная плоская сдвиговая волна и излучается в составное пространство (фиг.12).



Фиг.12

Внутри свободной части ( $x < 0$ ) волновода, по направлению оси  $Ox$  распространяется сдвиговая плоская волна с амплитудой

$$w_{ON}(x, y) = A_N e^{i\gamma_N x} \cos \frac{\pi N}{2h} (y - h), \quad -\infty < x < \infty, \quad |y| \leq h$$

$$\gamma_N = \sqrt{k_0^2 - (\pi N / 2h)^2}, \quad k_0 > \pi N / 2h \quad (31)$$

$N$  – неотрицательное целое число.

Предполагая, что среда находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить излученное волновое поле в составном пространстве.

Решение задачи сведено к двум независимым задачам типа Римана на действительной оси, в коэффициентах которых фигурируют функции Лява

$$L_1(\sigma) = \mu_0 \gamma_0 \operatorname{sh}(\gamma_0 h) + \mu \gamma \operatorname{ch}(\gamma_0 h), \quad L_2(\sigma) = \mu_0 \gamma_0 \operatorname{ch}(\gamma_0 h) + \mu \gamma \operatorname{sh}(\gamma_0 h) \quad (32)$$

Функции  $L_1(\sigma)$  и  $L_2(\sigma)$  имеют действительные корни при  $k < \sigma < k_0$ . Число этих корней и их распределение существенно зависит от параметра  $h\sqrt{k_0^2 - k^2}$ .

Обозначим эти корни через  $-\sigma_m^{(j)}, \sigma_m^{(j)}$  ( $j=1,2$ ). Действительная ось обходит точки  $-\sigma_m^{(j)}$  сверху, а точки  $\sigma_m^{(j)}$  – снизу.

Решение функциональных уравнений построено методом факторизации, при помощи которого решение задачи представлено в виде интегралов Фурье в областях  $|y| \geq h$  и  $|y| \leq h$  при четных и нечетных  $N$ . Методом, изложенным в §4.1, получены асимптотические формулы, определяющие распределение и особенности волнового поля в каждой из частей составной плоскости. Так для волнового поля  $|y| \leq h$  при  $x \rightarrow \infty$  имеем

$$w_0(x, y) = \left( C_{2N} \cos\left(\sqrt{k_0^2 - k^2} y\right) - C_{2N+1} \sin\left(\sqrt{k_0^2 - k^2} y\right) \right) e^{i\left(kx - \frac{\pi}{4}\right)} \times$$

$$\times \left( (kx)^{-3/2} + O(x^{-5/2}) \right) - \Lambda(x, y) \quad (33)$$

где  $\Lambda(x, y)$  - сумма локализованных волн.

Из (33) следует, что при  $x > 0$ , т.е. в закрепленной части волновода, волновое поле представляется в виде суммы сдвиговой объемной волны и конечного числа излученных сдвиговых локализованных волн с волновыми числами  $\sigma_m^{(1)}$  и  $\sigma_m^{(2)}$ . При этом оказывается, что: а) амплитуда объемной волны

имеет порядок убывания  $O(x^{-3/2})$ , б) след объемной сдвиговой волны на ось абсцисс движется со скоростью распространения сдвиговой волны в пространстве.

При этом, оказалось, что в так называемых особых случаях, когда  $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(n-1)$  или  $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(2n-1)/2$  ( $n$  - натуральное число), объемная волна имеет порядок убывания  $O(x^{-1/2})$  (подобно однородному случаю). Если для некоторого фиксированного  $n^*$   $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(n^* - 1)$ , то поверхностная волна, соответствующая волновому числу  $\sigma_n^{(1)}$ , не появляется, а если  $h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(2n^* - 1)/2$ , то отсутствует поверхностная волна с волновым числом  $\sigma_n^{(2)}$ .

Формулы, определяющие волновое поле в свободной части волновода показывают, что в волноводе ( $x < 0$ ) возбуждаются конечное число распространяющихся отраженных волн и бесконечное число нераспространяющихся отраженных волн. При этом, если  $\mu \rightarrow 0$ , то в волноводе остается только падающая волна. В частном случае  $N = 0$ , когда падает только нулевая волна и имеет место условие  $k_0 < \pi/2h$ , то в волноводе остается только одна распространяющаяся отраженная волна.

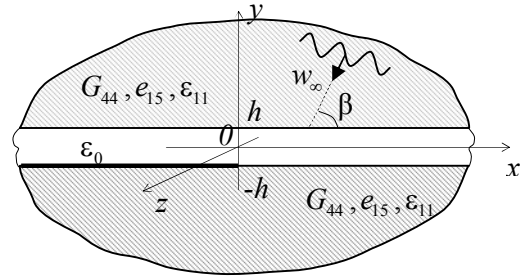
В §4.5 исследована задача о дифракции сдвиговой плоской волны на краях упругого слоя толщиной  $2h$ , вложенного в упругое пространство и частично скрепленного с ним. Эта задача отличается от задачи предыдущего параграфа лишь тем, что заданная сдвиговая плоская волна распространяется не со стороны свободного края слоя, а падает из бесконечности под некоторым углом  $\beta$ .

Решение задачи, как и в предыдущем параграфе, сводится к двум независимым краевым задачам типа Римана на действительной оси. Получены аналитические формулы, представляющие распределение дифрагированного волнового поля в каждой из подобластей составного пространства в интегралах Фурье. Исследовано распределение волнового поля в слое и получены асимптотические формулы для дальних зон слоя.

Из этих формул, в частности, следует, что при фиксированном  $k_0$  по свободной части волновода распространяется конечное число проходящих волн. При этом, если  $0 < k_0 < \pi / (2h)$ , то по свободной части слоя распространяется только одна проходящая сдвиговая плоская волна, амплитуда которой определяется при помощи факторизованных функций.

В несвободной части волновода ( $x > 0$ ) при  $x \rightarrow \infty$  волновое поле представляется в виде суммы приходящей из бесконечности объемной волны, локализованных отраженных волн и отраженной объемной волны, амплитуда которой убывает, как  $O(x^{-3/2})$ . В указанных выше особых случаях объемная волна имеет порядок убывания  $O(x^{-1/2})$  (подобно однородному случаю).

В пятой главе рассматриваются динамические задачи для составной пьезоэлектрической пространства, состоящее из двух пьезоэлектрических полупространств класса бмм, разделенных вакуумным слоем конечной толщины. В рамках квазистатической постановки задач для пьезоэлектрических тел. Исследуются вопросы связанные с тунелированием сдвиговых электроупругих плоских волн через зазор и их дифракция на полубесконечных электродах прилегающие на краях вакуумного слоя.



Фиг. 13

В §5.1 рассматривается пространство, состоящее из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств, разделенных вакуумным слоем толщины  $2h$ . Главные оси пьезоэлектрических полупространств (кристаллов класса бмм гексагональной симметрии) параллельны границе. Полу плоскость  $x < 0$  границы нижнего полупространства покрыта тонким металлическим слоем (электродом) с пренебрежимой жесткостью и нулевым потенциалом. В верхнем полупространстве распространяется сдвиговая плоская волна,  $u_z^{(\infty)}(x, y, t) = \exp(-ik(x \cos \beta + y \sin \beta) - i\omega t)$ ,  $\beta(0 < \beta < \pi/2)$  – угол скольжения падающей упругой волны (фиг.13).

В рамках квазистатического приближения, решение задачи сводится к следующим краевым задачам относительно амплитуд упругого смещения и потенциала электрического поля

$$\begin{aligned} \Delta w_j(x, y) + k^2 w_j(x, y) &= 0, \\ \Delta \phi_j(x, y) - (e_{15}/\varepsilon_{11}) w_j(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (x, y) \in \Omega_j, \quad j=1,2 \quad (34)$$

$$\Delta \phi_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0$$

с граничными и контактными условиями

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(x, \pm h) &= 0, \quad |x| < \infty \\ D_{1y}(x, h+0) &= D_{0y}(x, h-0), \quad \phi_1(x, h+0) = \phi_0(x, h-0), \quad |x| < \infty \\ \phi_0(x, -h+0) &= \phi_2(x, -h-0) = F_+(x), \quad 0 < x < \infty \\ D_{0y}(x, -h+0) - D_{2y}(x, -h-0) &= \psi_-(x), \quad -\infty < x < 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Решение краевых задач (34) сводится к следующей задаче типа Римана на действительной оси

$$c_0 |\sigma| \bar{K}(\sigma) \bar{F}_+(\sigma) + \bar{\psi}_-(\sigma) = 2\pi c_1 \delta(\sigma - k \cos \beta) \quad (36)$$

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{2}{1 + \varepsilon_{10}(1 + \chi_1^2)} \frac{\Delta_2(\sigma) \Delta_4(\sigma)}{\Delta_1(\sigma) \Delta_3(\sigma)}$$

$$\Delta_1(\sigma) = \varepsilon_{01}(\gamma - \chi|\sigma|), \quad \Delta_2(\sigma) = \Delta_1(\sigma) + \gamma \operatorname{th}(h|\sigma|),$$

$$\Delta_3(\sigma) = (1 + \operatorname{th}^2(h|\sigma|)) \Delta_1(\sigma) + 2\gamma \operatorname{th}(h|\sigma|), \quad \Delta_4(\sigma) = \gamma + \Delta_1(\sigma) \operatorname{th}(h|\sigma|)$$



Каждая из дисперсионных функций  $\Delta_j(\sigma)$  ( $j = \overline{1,4}$ ) на действительной оси имеет только два корня  $\pm\sigma_j$ , которые расположены в порядке

$$0 < k < \sigma_4^* < \sigma_3^* < \sigma_2^* < \sigma_1^* < \infty \quad (37)$$

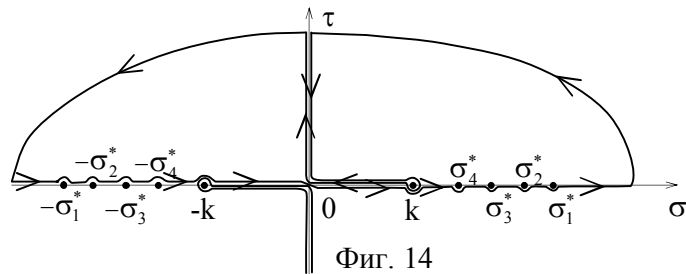
Числа  $\sigma_j^*$  ( $j = \overline{1,4}$ ) являются волновыми числами поверхностных волн, которые могут быть возбуждены в рассматриваемой среде.

Методом факторизации построено решение уравнения (36), при помощи которого получены аналитические представления для амплитуд компонентов электроупругого поля - упругое перемещение и потенциал электрического поля - в пьезоэлектрических полупространствах и в слое. В формулах для амплитуд волновых полей в верхнем полупространстве  $y > h$  вместе с дифрагированными составляющими, представленными в виде интегралов Фурье, фигурируют также составляющие амплитуды падающей и отраженной волн, а также неоднородной (щелевой) волны потенциала электрического поля.

Получены также решения задачи для следующих частных случаев: а) полубесконечный электрод отсутствует, т.е. оба края щели свободны; б) граница нижнего полупространства полностью покрыта заземленным электродом.

Далее, исследование проведено только для волнового поля упругих перемещений. При помощи подхода, описанного в §4.1, проведено исследование волнового поля упругих перемещений в каждой из частей пространства. При этом, в разрезанной комплексной плоскости действительная ось обходит точки  $-\sigma_i^*$  ( $i = \overline{1,4}$ ) сверху, а точки  $\sigma_i^*$  - снизу (фиг. 14).

Исследования показали, что в каждом конкретном случае, внутри контура интегрирования, аналитические продолжения подынтегральных функций кроме отдельных точек  $\pm\sigma_i^*$ , в которых они имеют простые полюса, других особых точек не могут иметь. Исходя из этих соображений, амплитуда упругого перемещения, в каждой четверти пьезоэлектрических полупространств, представляется в виде суммы амплитуд падающей, отраженной, поверхностных волн и регулярных интегралов. Из последних интегральных представлений, подходом §4.1, получены соответствующие асимптотические формулы, определяющие поведение волнового поля в данных зонах. Так, волновое поле в квадранте  $\pi/2 < \theta < \pi$  при  $r \rightarrow \infty$  представляется в виде:



Исходя из этих соображений, амплитуда упругого перемещения, в каждой четверти пьезоэлектрических полупространств, представляется в виде суммы амплитуд падающей, отраженной, поверхностных волн и регулярных интегралов. Из последних интегральных представлений, подходом §4.1, получены соответствующие асимптотические формулы, определяющие поведение волнового поля в данных зонах. Так, волновое поле в квадранте  $\pi/2 < \theta < \pi$  при  $r \rightarrow \infty$  представляется в виде:

$$\begin{aligned} \pi - \beta < \theta < \pi & \quad w_1(r, \theta) = w_{11}(r, \theta) + q(r, \theta) + O(r^{-5/2} \ln r) \\ \theta = \pi - \beta & \quad w_1(r, \theta) = 0.5 A_{omp}^{(2)} e^{ikr} + w_{11}(r, \pi - \beta) + O(r^{-1/2}) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\pi/2 < \theta < \pi - \beta \quad w_1(r, \theta) = A_{omp}^{(2)} e^{-ikr \cos(\theta+\beta)} + w_{11}(r, \theta) + q(r, \theta) + O(r^{-5/2} \ln r)$$

где  $w_{11}(r, \theta) = e^{-ikh \sin \beta} e^{-ikr \cos(\theta-\beta)} + A_{отр}^{(1)} e^{-ikr \cos(\theta+\beta)} + A_{пов}^{(3)} e^{-\gamma_3^* r \sin \theta} e^{i\sigma_3^* r |\cos \theta|}$ ,  $q(r, \theta)$  - объемная волна.

По линиям  $y = \pm h$  при  $x \rightarrow \infty$  имеем

$$w_1(x, h) = \left[ e^{-ikh \sin \beta} + A_{отр}^{(1)} + A_{отр}^{(2)} \right] e^{-ikx \cos \beta} + A_{пов}^{(2)} e^{i\sigma_2^* x} + A_{пов}^{(4)} e^{i\sigma_4^* x} + B_{11} \frac{e^{i(kx+\pi/4)}}{x^{3/2}} + O(x^{-5/2} (1 + \ln x))$$

$$w_2(x, -h) = A_{пов}^{(22)} e^{i\sigma_2^* x} + A_{пов}^{(24)} e^{i\sigma_4^* x} + B_{12} \frac{e^{i(kx+\pi/4)}}{x^{3/2}} + O(x^{-5/2} (1 + \ln x)) \quad (39)$$

а по лучу  $\theta = -\pi + \beta$  при  $r \rightarrow \infty$

$$w_{-\pi+\beta}(r) = \frac{1}{2} A_{21} e^{ikr} + A_{пов}^{(21)} e^{-\gamma_1^* r \sin \beta + i\sigma_1^* \cos \beta} + O(r^{-1/2}) \quad (40)$$

Полученные представления удобны для анализа волнового поля, поскольку составлены из слагаемых, обусловленных различными факторами, в том числе пьезоэффектом. В частности, нетрудно заметить, что в верхнем полупространстве полубесконечный электрод возбуждает неоднородную волну электрического потенциала и три упругие поверхностные волны, две из которых распространяются в положительном направлении оси  $x$ , а одна – в отрицательном. Кроме того в секторе, зеркальном к теневой области, полубесконечный электрод поглощает часть отраженной волны, обусловленную свободной границей нижнего полупространства.

Эти формулы, в частности, показывают, что по лучам  $\theta = \pi - \beta$  (верхнее полупространство) и  $\theta = -\pi + \beta$  (нижнее полупространство) распространяется объемная волна ( $Ae^{ikr}$ ). Так что, существование полубесконечного электрода на границе нижнего полупространства возбуждает объемную волну как при  $\theta = -\pi + \beta$ , что следовало ожидать; так и при  $\theta = \pi - \beta$ , что является не столь очевидным фактом.

В §5.2 рассматривается задача о дифракции электроупругих сдвиговых волн на краях полубесконечных электродов в пьезоэлектрическом пространстве, состоящем из двух одинаковых полупространств класса бтм, разделенных вакуумным зазором толщиной  $2h$ . Граничные поверхности обоих полупространств покрыты тонкими металлическими полубесконечными слоями (электродами), т.е. рассматривается задача, подобная предыдущей, но с двумя симметрично расположенными полубесконечными электродами.

Решение задачи сведено к следующим двум краевым задачам на действительной оси

$$c_0 |\sigma| \bar{K}_1(\sigma) \bar{F}_s^+(\sigma) - \bar{\Psi}_d^-(\sigma) = c_1^* \delta(\sigma - k_1)$$

$$\bar{K}_0 |\sigma| \bar{K}_2(\sigma) \bar{F}_d^+(\sigma) - h \bar{\Psi}_s^-(\sigma) = hc_1^* \delta(\sigma - k_1) \quad (41)$$

$$\bar{K}_0(\sigma) = \sigma h \operatorname{cth}(\sigma h), \quad \bar{K}_1(\sigma) = \varepsilon_0 \Delta_4(\sigma) / c_0 \Delta_1(\sigma), \quad \bar{K}_2(\sigma) = \varepsilon_0 \Delta_2(\sigma) / c_0 \Delta_1(\sigma)$$

Дисперсионные функции  $\Delta_j(\sigma)$  ( $j=1,2,4$ ) выражаются формулами (36).

Факторизуя функции–коэффициенты и решая уравнения (41), для амплитуд волнового электроупругого поля получены аналитические представления в каждой области составного пространства. Так, в верхнем полупространстве перемещение представляется в виде суммы падающей, отраженной и дифрагированных волн, а в представлении потенциала электрического поля добавляется и неоднородная (щелевая) волна. Получены асимптотические формулы для амплитуд упругих перемещений в верхней полуплоскости, аналогичные формулам (39). Эти формулы позволяют заключить, что добавление второго полубесконечного электрода на границе верхнего полупространства качественно не меняет характер распределения волнового поля. Разница, в основном, заключается в том, что присутствие второго электрода преобразует поверхностную волну, соответствующую волновому числу  $\sigma_3^*$ , в поверхностную волну, распространяющуюся вдоль электрода со скоростью  $\omega / \sigma_1^*$ .

## Заключение

В диссертационной работе поставлен и решен ряд новых контактных задач для упругих плоскости, полуплоскости и полосы, усиленных системой определенным образом расположенных конечных, полубесконечных или кусочно–однородных бесконечных стрингеров (накладок, включений). В рамках плоской теории упругости и при обычных физических предположениях относительно стрингеров исследовано влияние таких тонкостенных элементов на напряженно-деформированное состояние как сплошных массивных тел, так и ослабленных одной или системой трещин. Исследованы контактные задачи об изгибе однородных и кусочно-однородных балок различных длин на границе упругой полуплоскости. В постановке динамической задачи теории упругости и электроупругости исследованы стационарные задачи о распространении, дифракции и излучении сдвиговых плоских волн в упругом кусочно–однородном пространстве, содержащем неоднородности в виде полубесконечного включения, полубесконечных трещин и бесконечного слоя.

Получены следующие новые результаты:

- Поставлены и решены контактные задачи о передаче нагрузки к бесконечной упругой пластине (плоскости) и полуплоскости от конечного числа параллельно расположенных в один или в два ряда стрингеров конечной длины, периодической системы симметрично расположенных и равноотстоящих друг от друга парами полубесконечных стрингеров, периодической системы бесконечных кусочно–однородных включений. Решения задач сведены к решению сингулярного интегро-дифференциального или фредгольмовского уравнения второго рода на конечном интервале, либо краевой задачи Римана на действительной оси. Приведены расчетные формулы для определения контактных напряжений с явно выделенными особенностями на конце стрингера (корневая) и в точке приложения сосредоточенной силы (логарифмическая). Получены асимптотические формулы, определяющие распределение контактных напряжений в близкой к концу стрингера и в далеких от нее зонах. В ряде случаев построено замкнутое решение в виде интегралов Фурье.

- На основе преобразования Фурье и метода Винера–Хопфа предложен новый подход к решению контактной задачи для упругой полуплоскости с упругим конечным стрингером, позволяющий получить решение в новом представлении - в виде степенного ряда с явно выделенной особенностью в виде отдельного слагаемого. Коэффициенты разложения определяются из регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой задаются в конечном виде и имеют простую структуру. Численная реализация задачи показала совпадение с результатами вычислений другим методом с высокой степенью точности.

- На примере контактной задачи о передаче нагрузки от двух произвольно ориентированных конечных стрингеров к упругой кусочно–однородной бесконечной пластине показана применимость предложенного подхода для сведения к системе квазивполне регулярных бесконечных систем линейных

уравнений также и сингулярного интегрального уравнения, ядро которого содержит неподвижную особенность.

- Поставлены и решены новые контактные задачи для упругой бесконечной пластины (плоскости) и полосы, ослабленных трещинами и усиленными стрингерами. Исследовано взаимовлияние этих двух типов концентраторов напряжений. Получены расчетные формулы для определения основных механических характеристик рассматриваемых задач. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений под стрингерами в зависимости от характерных физических и геометрических параметров, а также влияние трещины на законы их распределения.

- В случаях, когда упругие стрингеры и трещины не имеют общих точек, определяющими уравнениями поставленных задач являются либо одно либо система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши или Гильберта, которые сводятся к вполне или квазивполне регулярным бесконечным системам линейных уравнений. В случае же пересечения указанных концентраторов напряжений в ядрах определяющих уравнений появляются слабые с неподвижной особенностью и решение, в этих случаях, строится численно-аналитическим методом дискретных особенностей. Во всех случаях осуществлена численная реализация полученных результатов в широком диапазоне изменения параметров задач и выявлены закономерности взаимовлияния двух различных концентраторов напряжений.

- Исследован класс контактных задач об изгибе однородных или кусочно-однородных балок различных длин на крае упругой полуплоскости при предположении, что под балкой возникают только нормальные контактные напряжения и в процессе деформирования балка не отрывается от края полуплоскости. В случае изгиба кусочно-однородной бесконечной балки построено замкнутое решение и получены асимптотические формулы для контактных напряжений около точки стыка и в далеких от него точках, а в случае полубесконечной балки задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма II рода относительно контактных давлений, действующих под конечной частью полубесконечной балки, допускающему решение методом последовательных приближений.

- Предложенный в работе подход позволил получить решения двух известных задач об изгибе полубесконечной и конечной балки на границе упругой полуплоскости в новом представлении. В первом случае получены асимптотические формулы для контактного давления в окрестности конца балки и на бесконечности и показан путь вычисления коэффициентов асимптотического разложения практически любого порядка. Во втором случае контактное давление представлено в виде степенного ряда с отдельно выделенными особенностями, коэффициенты которого определяются из бесконечной системы линейных уравнений простой структуры.

- Рассмотрена контактная задача об изгибе двух полубесконечных балок, свободно лежащих на границе упругой полуплоскости, под действием жесткого гладкого штампа с плоским основанием. В представлении контактного давле-

ния под балкой выделены слагаемые, явно указывающие на возникновение под крайними точками штампа сосредоточенной силы и сосредоточенного момента.

- Исследованы динамические стационарные задачи о распространении, дифракции и излучении сдвиговых плоских волн в упругом кусочно–однородном пространстве, содержащем неоднородности в виде полубесконечного включения, полубесконечных трещин и бесконечного слоя. Все рассмотренные задачи формулируются в виде функциональных уравнений (задача типа Римана на действительной оси), правой частью которых является дельта-функция Дирака, и решаются единым методом факторизации.

- При исследовании этих задач был сформулирован новый подход к определению асимптотических формул, представляющих волновое поле в дальних зонах. В отличие от хорошо известных традиционных методов решения подобных задач, здесь решение задачи сводится к краевой задаче типа Римана на действительной оси. Для исследования полученного в виде интеграла Фурье решения разрезы в комплексной плоскости проводятся по координатным осям, и, в итоге, решение задачи представляется при помощи регулярных интегралов на разрезах. Далее, асимптотические формулы, представляющие волновое поле в дальних зонах, определяются посредством простого интегрирования полученных регулярных интегралов по частям.

- Изучено волновое поле в различных областях упругого пространства в задачах о дифракции сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности под некоторым углом на полубесконечное включение или на край упругого слоя, вложенного в упругое полупространство и частично скрепленного с ним. Получены асимптотические формулы для амплитуд перемещений в дальней зоне и около концов контактных участков. В области тени и отраженной волны, а также на участке контакта эти формулы содержат волновую часть, обусловленную локализованной (поверхностной) волной Лява.

- Впервые рассмотрена динамическая контактная задача об излучении плоской сдвиговой волны из упругого волновода (слоя) в составное упругое пространство. Выяснено, что при определенных отношениях волновых чисел слоя и пространства порядок убывания объемной волны в слое уменьшается и совпадает с порядком убывания однородного случая, а след излученной объемной волны в слое распространяется со скоростью распространения объемной волны в пространстве.

- Исследована задача о дифракции сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. Построено замкнутое решение задачи, получены асимптотические формулы, определяющие поведение упругих перемещений в дальних зонах пьезоэлектрика, и вычислен коэффициент концентрации электрической индукции около конца электрода. Выявлено, что полубесконечный электрод качественно влияет на распределение волнового поля, возбуждая неоднородную (щелевую) волну, три поверхностные волны, объемную волну. Интересным является факт поглощения части отраженной волны в секторе, зеркальном к теневой области.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЕ

1. Агаян К.Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. –Изв. АН СССР. МТТ, 1972, №5, с.34-45.
2. Агаян К.Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками. Изв.АН АрмССР, Механика, 1976, 29, №4, с.3-15.
3. Агаян К.Л. Об одной периодической задаче контактного взаимодействия стрингеров с упругой пластиной, ослабленной трещинами. –ДАН Арм. ССР. 1977. т.65. №2. с.115-121.
4. Мхитарян С.М., Агаян К.Л. Об одной периодической контактной задаче для упругой полосы, ослабленной трещинами и усиленной упругими стрингерами. – Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. т.31. №3. с.3-17.
5. Агаян К.Л. Периодическая задача о контактном взаимодействии полубесконечных стрингеров с бесконечной пластиной. – Исследования по механике твердого деформируемого тела. АН АрмССР, Ереван, 1981, с.29-35.
6. Агаян К.Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин. –В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985, с.26-32.
7. Агаян К.Л. О периодической контактной задаче для упругой плоскости с бесконечными кусочно–одномерными включениями. – Механика неоднородных структур. Тезисы докладов I всесоюзной конференции. Львов, 1983, с.4-5.
8. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Кусочно–однородная пластина с произвольно ориентированными стрингерами. Изв. АН РА. Механика, 1995. т.48. №2. с.56-66.
9. Агабекян П.В., Агаян К.Л. Изгиб бесконечной кусочно–однородной балки, лежащей на границе упругой полуплоскости. –Изв. НАН Армении. Механика. 1999. т.52. №3. с.3-8.
10. Агаян К.Л., Манукян Э.А. Изгиб полубесконечной кусочно–однородной балки на границе упругой полуплоскости. – Изв. НАН РА, Механика, 2000, т.33, №2. с.3-9.
11. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. Изв. НАН РА. Механика, 56, №4, 2003, с.3-17.
12. Grigoryan E., Jilavyan S., Agayan K.. Diffraction of waves in an elastic space with semi-infinite inclusion // Days on Diffraction, St.-Petersburg, Russia, 2004, p.90-99.
13. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилаван С.А. Дифракция локализованной сдвиговой волны в упругом пространстве с полубесконечным включением. Сб. трудов «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Саратов 2005, с.105-110.
14. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная внутренним полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины. –Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд. «Гитутюн» НАН Армении, Ереван, 2006, с.138–143.
15. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство. Изв. НАН РА, Механика, 2007, 60, №3, с.23-38.
16. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Изгиб балки на границе упругой полуплоскости. Труды международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван 2007, с.32-36.
17. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О решении контактной задачи для полуплоскости с упругим креплением. Изв. НАН РА, Механика 2008, т.61. №1. с.5-14.

18. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости. Изв. НАН РА Механика 2008. т.61. №4. с.5-19.
19. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. Доклады НАН РА, 2010, т.110, №3, с.261-271.
20. Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом. –Изв. НАН Армении. Механика. 2010. т.63. №4. с.3-11.
21. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. Изв. НАН РА, Механика, 63, №1, 2010. с.50-69.
22. Агаян К.Л. Дифракция сдвиговой плоской волны на крае упругого слоя в составном пространстве. – Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV межд. конференции. Ростов–на–Дону, Азов, 2010, т.1, с.16-20.
23. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Туннелирование сдвиговой плоской электроупругой волны через зазор в пьезоэлектрическом пространстве и её дифракция на полубесконечном электроде. Труды II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, сс. 33-37.
24. Агаян К.Л. Дифракция электроупругих сдвиговых плоских волн на краях полубесконечных электродов в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. №1. с. 13-18.



## Ամփոփում

Ատենախոսությունը նվիրված է տարբեր տիպի լարումների կուտակիչներ (ճաք, վերադիր, ներդրակ, հեծան) պարունակող համասեռ և բաղադրյալ առաձգական անվերջ սալի (հարթության), կիսահարթության և շերտի լարվածային դեֆորմացիոն վիճակի ուսումնասիրությանը, ինչպես նաև լարումների կուտակիչների փոխազդեցության օրինաչափությունների բացահայտմանը:

Ուսումնասիրվում են նաև դինամիկ կոնտակտային խնդիրներ, որոնք վերաբերվում են առաձգական և պլեզոէլեկտրիկ տարածությունում սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիային կիսաանվերջ ներդրակի, ճաքի, անվերջ սալի և մետաղականացված կիսաանվերջ էլեկտրոդի վրա:

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, հինգ գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից:

Ներածության մեջ հիմնավորված է ատենախոսության թեմայի արդիականությունը, համառոտ շարադրված է ատենախոսության բովանդակությունը, նշված է աշխատանքի նպատակը և գիտական նորույթը:

Առաջին գլուխը նվիրված է վերջավոր կամ կիսաանվերջ երկարության առաձգական վերադիրներից կամ ներդրակներից առաձգական հարթության կամ կիսահարթության տեսք ունեցող զանգվածեղ մարմիններին բեռի փոխանցման խնդիրներին, որոնք Մելանի երկրորդ և Կոյտերի խնդիրների ընդհանրացումներն են:

Խնդիրների լուծումը հանգեցվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների ռեգուլյար անվերջ համակարգերի լուծմանը: Այնպիսի խնդրի համար, երբ կիսաանվերջ վերադիրը կիսահարթության եզրին զուգահեռ է, կառուցված է փակ լուծում:

Երկրորդ գլխում դիտարկվում են կոնտակտային խնդիրներ առաձգական հարթության և շերտի համար, որոնք թուլացված են վերջավոր երկարության ճաքով կամ դրանց պարբերական համակարգով, և ուժեղացված են վերջավոր կամ անվերջ երկարության առաձգական ներդրակների կամ վերադիրների վերջավոր և կիսաանվերջ համակարգով: Ճաքերը դասավորված են ուժեղացնող ստրինգերներին սիմետրիկ և ուղղահայաց են նրանց դասավորության գծերին: Դիտարկված են նաև այն դեպքերը, երբ ստրինգերներն անցնում են ճաքի վրայով: Կախված որոշիչ ինտեգրալ հավասարումների կորիզների կառուցվածքից, այս խնդիրների լուծումները կառուցվում են օրթոգոնալ բազմանդամների կամ դիսկրետ եզակիությունների մեթոդով: Խնդիրների պարամետրերի փոփոխության

մեծ դիպացանոցում բացահայտված են ստրիկներների և ճաքերի փոխազդեցության օրինաչափությունները:

Երրորդ գլխում ներառված են առաձգական կիսահարթության եզրին տարբեր երկարության համասեռ կամ կտոր առ կտոր համասեռ հեծանների ծռման հինգ կոնտակտային խնդիրներ: Ծռումն իրականացվում է ուժային գործոնների ազդեցությամբ կամ կոշտ դրոշմի միջոցով: Հեծանները դիտարկվում են հեծանների ծռման դասական տեսության շրջանակում, հետևյալ ենթադրությունների դեպքում.

- հեծանների տակ առաջանում են միայն նորմալ կոնտակտային լարումներ,

- դեֆորմացման ընթացքում հեծանը կիսահարթության եզրից չի պոկվում:

Խնդիրների լուծումը հանգեցվում է ֆունկցիոնալ հավասարումների լուծման, որոնց համար կառուցված են փակ լուծումներ, կամ հանգեցվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների ռեգուլյար անվերջ համակարգերի:

Չորրորդ գլխում դիտարկվում են առաձգական կտոր առ կտոր համասեռ տարածությունում սահքի հարթ ալիքների տարածման և դիֆրակցիայի ստացիոնար դինամիկ խնդիրները, որոնք պարունակում են անհամասեռություն՝ կիսաանվերջ ճաքի, կիսաանվերջ առաձգական ներդրակի կամ տարածության հետ մասնակիորեն ամրակցված անվերջ սալի տեսքով: Խնդիրների լուծումը հանգեցվում է իրական առանցքի վրա Ռեիմանի խնդրին, որը լուծված է ֆակտորիզացիայի մեթոդով:

Առաջարկված է հեռավոր տիրույթներում ասիմպտոտիկ բանաձևերի կառուցման նոր, ավելի պարզ և արդյունավետ մոտեցում: Ստացված ասիմպտոտիկ բանաձևերի հիման վրա հետազոտված են տարածության ներսում դիֆրակցված ալիքային դաշտի առանձնահատկությունները, առանձնացված են ալիքային դաշտի ընկնող, անդրադարձող, ծավալային, մակերևութային բաղադրիչները:

Հինգերորդ գլխում հետազոտված են խնդիրներ<sup>a</sup> վերջավոր լայնության վակուումային բացակով առանձնացված 6mm դասի երկու միատեսակ պիեզոէլեկտրական կիսատարածություններից բաղկացած բաղադրյալ պիեզոէլեկտրական տարածության համար:

Առաջին խնդրում ներքևի կիսատարածության եզրը ծածկված է կիսաանվերջ մետաղական էլեկտրոդով: Երկրորդ խնդրում երկու կիսատարածությունների եզրերը ծածկված են էլեկտրոդներով: Հետազոտվում է բացակով անցնելու խնդիրը և կիսաանվերջ էլեկտրոդի վրա վերևի կիսատարածությունում տարածվող սահքի հարթ էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան: Պիեզոէլեկտրական

կիսատարածությունների յուրաքանչյուր տեղամասում հետազոտված է էլեկտրաառաձգական ալիքային դաշտի կառուցվածքը: Ցույց է տրված, որ բաղադրյալ կիսատարածությունում կիսասանվերջ էլեկտրոդների գոյությունը որակապես ազդում է ալիքային դաշտի կառուցվածքի վրա: Դիֆրակցիայի ընթացքում բացի ընկնող, անդրադարձող և ծավալային ալիքներից, առաջանում են տեղայնացված մակերևութային և անհամասեռ / ճեղքավոր/ ալիքներ:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները.

- Մեթոդներ և հետազոտության արդյունքներ որոշակի եղանակով դասավորված ստրիկերների վերջավոր կամ անվերջ համակարգով ուժեղացված և վերջավոր երկարության ճաքերով թուլացված առաձգական անվերջ հարթության, կիսահարթության և շերտի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրներում:

- Առաձգական բարակապատ էլեմենտներից զանգվածային/զանգվածեղ մարմիններին բեռի փոխանցման մի շարք հարթ կոնտակտային խնդիրներին համապատասխանող սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման նոր մոտեցման մշակում, որը կարելի է անվանել մնացքների մեթոդ:

- Առաձգական կիսատարածության եզրի վրա կիսասանվերջ հեծանի ծոման խնդրում ասիմպտոտիկ վերլուծությունների ցանկացած վերջավոր կարգի գործակիցների որոշումը, երբ  $x \rightarrow 0$  և  $x \rightarrow \infty$ :

- Կտոր առ կտոր համասեռ և պիեզոէլեկտրիկ տարածություններում դիֆրակցիայի և սահքի հարթ ալիքների տարածման-ճառագայթման խնդիրներում փակ լուծումների կառուցում:

- Նոր մեթոդի մշակում և զարգացում, որը թույլ է տալիս առաձգական և պիեզոէլեկտրիկ տարածություններում էլեկտրաառաձգական սահքի հարթ ալիքների դիֆրակցիայի խնդիրներում, հեռավոր տիրույթների համար որոշել ասիմպտոտիկ բանաձևերը:

- Կտոր առ կտոր համասեռ տարածությունում ալիքային էլեկտրաառաձգական դաշտի կառուցվածքի որոշում, և դրա ներկայացում առանձին ալիքային գումարելիների տեսքով՝ ընկնող, անդրադարձող, ծավալային, մակերևութային /Լյավի ալիքներ /, անհամասեռ / ճեղքավոր /:

## Abstract

The thesis is devoted to the investigation of problems of stress-strain state of homogeneous, piecewise-homogeneous infinite plate (plane), half-plane and strip with different types of stress concentrators (crack, punch, stringer, beam), as well as to the the problems of detections of singularities of concentrator interaction. Dynamic contact problems relate to diffraction of shear plane wave on semi-infinite inclusion, cracks and semi-infinite electrodes in elastic or piezoelectric spaces are also investigated herein.

The thesis consists of introduction, five chapters, conclusion and a bibliography.

In introduction the brief review of the thesis topic is given. Actuality of the thesis subject is substantiated, aim and scientific novelty of the work are presented. Brief content of dissertation is given.

First chapter is devoted to the contact problems of transfer of a load from finite and periodic system of elastic stringer or inclusion of finite and semi-infinite length to bulk bodies of an elastic plane or half-plane kinds. The problem under consideration generalizes Melan's second problem and Koiter problem. The solution of problems is reduced to solution of regular infinite system of linear algebraic equations. When semi-infinite stringer is parallel to half-plane edge the appropriate solution in the closed form is constructed.

In second chapter the contact problems for the elastic plane and bar, weakened by single or periodical system of finite length cracks and reinforced by finite and periodical system of elastic strips or inclusions of finite and infinite length are investigated. The cracks are symmetrically located in regard to reinforced stringers perpendicular to the lines of positioning. It is also considered the cases when stringers pass across crack. Solution of these problems depending from a structure of a kernel characterizing integral equation type are build by a method of orthogonal polynomials or by a method of discrete singularities. In sufficiently wide range of problem parameter modification the effects of stringer and crack interaction are disclosed.

Third chapter contains five contact bending problems of homogeneous or piecewise-homogeneous beams with various length on the boundary of elastic half-plane. The bending is implemented by means of force factors or via rigid punch. The beams are considered in the framework of classical theory of beams bending under following assumptions: in the beam there are only normal contact stresses; in the process of deformation a beam is inseparable from the edge of half-plane. Solution of the problems is reduced to the solution of functional equations having solutions of closed type or to regular infinite systems of linear algebraic equations.

In forth chapter the stationary dynamic problems of plane shear wave propagation and diffraction in elastic piecewise-homogeneous space having non-homogeneity in

the form of semi-infinite crack, semi-infinite elastic inclusion or infinite layer partially contacted with space are investigated.

The solution of the problems are reduced to the solution of Riemann problem type on the real axis solving by means of the factorization method. A novel, more simple and efficient approach for the asymptotic formula construction in far-field zone is suggested. On the base of received asymptotic formula the peculiarities of diffracted wave field inside of space is investigated as well as wave field components, such as: incident, reflected, bulk, surface are assigned.

In fifth chapter the problems of compound piezoelectric space consisting of two identical piezoelectric half-space of 6mm class divided by vacuum gap of finite width are investigated. In the first problem the edge of lower half-space covered with semi-infinite electrode. In second problem the edges of both half-spaces are covered by electrodes. For shear plane electroelastic wave, propagating in upper half-space the tunneling and diffraction problem through gap is investigated. The structure of electroelastic wave field is studied at any part of piezoelectric half-spaces. It is shown that existence of semi-infinite electrodes is influenced qualitatively on the structure of wave field in compound half-space. In the process of diffraction besides of incident, reflected and bulk waves the localized surface and inhomogeneous (gap) waves are arised also.

The following basic achievements of the thesis are representing for consideration:

- Methods and results of investigation in the problems of contact interaction of elastic infinite plane, half-plane and strip, reinforced forced by finite or infinite system, definitely located stringers and weakened with cracks of finite length.
- New approach establishment, which can be called as a residue method allowing solution of singular integro-differential equations corresponding to the class of plane contact problems of a load transmission from elastic thin-walled elements to solid bodies.
- Determination of coefficients of any finite order of asymptotic expansion at  $x \rightarrow 0$  and  $x \rightarrow \infty$  in the problem of semi-infinite beam bending on the edge of elastic half-plane.
- Construction of closed solutions of the problem of diffraction and radiation of shear plane waves in piecewise-homogeneous elastic and piezoelectric spaces.
- Establishment and development of new approach making possible to define the asymptotic formulas for far-field zone at the problems of diffraction of electro-elastic plane shear waves in elastic and piezoelectric space.
- Determination of the structure of wave electro-elastic field at piecewise-homogeneous space and its representation as a sum of separate wave components, such as: incident, reflected, bulk, surface (Love wave), inhomogeneous (gap) waves.