

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՄԱՍՈՒԴ ՌԵԶՍԵ

ՈՐՈՇ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ
ԿԱՅՈՒՆԱՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա.02.01-«Տեսական մեխանիկա» մասնագիտությամբ տեխնիկական
գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2017

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

Масуд Резайи

ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой
степени кандидата технических наук
по специальности 01.02.01 - "Теоретическая механика"

ЕРЕВАН – 2017

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում
Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.թ., Ս.Գ.Շահինյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ա.Ա.Ղուկասյան
ու.գ.դ., պրոֆեսոր Օ.Ն.Գասպարյան
Առաջատար կազմակերպություն՝ Ճարտարապետության և շինարարության
Հայաստանի ազգային համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2017թ. հունիսի 30-ին- ժամը 14⁰⁰-ին ՀՀ ԳԱԱ
Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդում:

Հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2, avsah@mechins.sci.am

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2017թ. մայիսի 29-ին:

Մասնագիտական խորհրդի փոսական
քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.



Ա.Վ.Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель к.ф.м.н., доцент С.Г.Шагинян

Официальные оппоненты д.ф.м.н., профессор А.А. Гукасян
д.т.н., профессор О.Н.Гаспарян

Ведущая организация: Национальный университет архитектуры
и строительства Армении

Защита состоится 30 июня 2017г. в 14⁰⁰ на заседании специализированного совета
Механики-047 в Институте механики.

Адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б, avsah@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан ---29 мая - 2017г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук



А.В.Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие об устойчивости является одним из важных понятий, с которым приходится сталкиваться при изучении различных процессов, происходящих в реальной жизни - в физике, технике, экономике и т.п. В самых разнообразных областях человеческой деятельности возникает потребность в анализе свойств прочности, неподатливости процессов, их способности препятствовать воздействиям всякого рода возмущений, и это определяет то пристальное внимание, которое оказывалось и оказывается проблеме устойчивости исследователями прошлого и настоящего. Задача об устойчивости движения впервые во всей ее общности была поставлена А. М. Ляпуновым. Ляпунов же получил первые основополагающие результаты в теории устойчивости, предложил строгие методы ее решения.

Дальнейшее развитие задачи устойчивости движения связано с построением теории оптимального управления динамических систем. Оптимальное управление имеет дело с проблемой нахождения закона управления для данной системы так, что выполняется некоторый критерий оптимальности. Задача управления включает в себя функционал, который является функцией состояния и управляющих переменных. Среди проблем оптимального управления важное место занимает задача о стабилизации заданного движения. Кроме того, исследование устойчивости и стабилизации нелинейных систем являются одними из наиболее важных и широко изученных проблем в теории управления. Метод, основанный на функции Ляпунова, играет важную роль в обеспечении решения этих проблем. Исследования в теории оптимальной стабилизации имеют своим источником проблему аналитического конструирования регуляторов, поставленную А. М. Летовым. Решение задачи в такой постановке получено с помощью классического вариационного метода.

Для решения задач об оптимальной стабилизации Н. Н. Красовский доказал основную теорему второго метода Ляпунова, представляющего собой соединение метода динамического программирования Беллмана с теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости.

В настоящей работе исследованы задачи устойчивости, стабилизации и оптимальной стабилизации плоского и пространственного движения различных механических систем (материальной точки переменной массы, искусственного спутника Земли, абсолютно твердого тела с одной неподвижной точкой и т.д.).

Целью диссертационной работы является построение оптимальных функций Ляпунова для рассматриваемых механических систем, нахождение оптимальных управляющих воздействий, получение минимальных значений минимизируемых функционалов и формы оптимальных движений.

Научная новизна. Используя возможности, предоставляемые современными компьютерными пакетами (Wolfram Mathematica 9, Excel 2013), поставленные задачи были решены в зависимости от параметров, участвующих в системах. Построены оптимальные функции Ляпунова, получены оптимальные управляющие воздействия, найдены минимальные значения функционалов. Построены графики оптимальных движений. Представлен алгоритм для решения таких задач. Предложен метод решения задач, который дает возможность использовать полученные результаты для различных значений параметров.

Методы исследования. В работе были использованы методы теоретической

механики, дифференциальных уравнений, линейной алгебры, теории устойчивости движения, теории стабилизации и оптимальной стабилизации.

Практическая ценность работы. Решения задач устойчивости и оптимальной стабилизации изученных механических систем при различных значениях параметров, входящих в данные системы, имеют важное практическое значение, дают возможность увеличить эффективность оптимальной стабилизации движения систем и могут найти применение в решении новых задач оптимальной стабилизации механических систем.

Обоснованность и достоверность. Полученные в работе результаты базируются на обоснованном использовании строгого математического аппарата, теорий устойчивости, управления и стабилизации, а также сравнении теоретических выводов с решениями конкретных задач и численных результатов (выполненных в среде Wolfram Mathematica 9) с теоретическими выводами.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались:

- на Второй международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (2010, Дилижан, Армения)
- на семинаре кафедры механики Ереванского государственного университета (2010, Ереван, Армения)
- на 21-ой ежегодной Международной конференции машиностроения" (2013, Тегеран, Иран).

Диссертация была полностью представлена и обсуждена на семинаре кафедры механики Ереванского государственного университета и на семинаре Института механики НАН РА (2017, Ереван, Армения).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем работы составляет 129 страниц печатного текста, включая 85 фигур, 10 таблиц, а список литературы содержит 62 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность диссертационной работы, дается краткий обзор работ, непосредственно примыкающих к задачам, рассмотренным в диссертации. Сформулированы цель и основные задачи работы, в сжатом виде излагается содержание всех глав.

В первой главе приведены постановки задач стабилизации и оптимальной стабилизации, установлены достаточные условия их решений, сформулирована теорема Красовского, а также приведены способ построения оптимальной функции Ляпунова для линейных систем и алгоритм для получения оптимального управления. Приведены также некоторые обозначения и известные результаты.

Во второй главе рассмотрена задача оптимальной стабилизации кругового движения материальной точки переменной массы и задача оптимальной стабилизации центра масс искусственного спутника Земли.

В §2.1 рассмотрена задача оптимальной стабилизации кругового движения материальной точки переменной массы m , движущейся под действием силы всемирного тяготения со стороны другой неподвижной материальной точки M .

Пусть точка совершает движение по некоторой плоской кривой L , мало отличающейся от круговой орбиты заданного радиуса r_0 , лежащей в той же плоскости, что и кривая L . Предполагается, что масса точки выбрасывается так, что возникающая реактивная сила \vec{F} лежит в плоскости кривой L (Рис. 1).

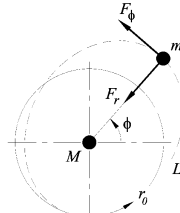


Рис.1

Круговое движение материальной точки переменной массы описывается в полярной системе координат r и φ . Дифференциальные уравнения движения материальной точки будут

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \left(\frac{\mu}{r^2} \right) + \left(\frac{1}{m} \right) F_r, \quad \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = \left(\frac{r}{m} \right) F_\varphi. \quad (1)$$

где μ – гравитационная постоянная неподвижной точки.

После несложных преобразований получена следующая система первого приближения (1)

$$\dot{x}_1 = x_2 - u_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u_1, \quad \dot{x}_3 = u_2. \quad (2)$$

$$\text{где } \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt'}; \quad (i=1, \dots, 3), \quad x_1 = r + r_0 - 2\sqrt{\left(\frac{r_0}{\mu}\right)} r^2 \dot{\varphi}, \quad x_2 = \sqrt{\left(\frac{r_0^3}{\mu}\right)} \dot{r},$$

$$x_3 = 2\sqrt{\left(\frac{r_0}{\mu}\right)} r^2 \dot{\varphi} - 2r_0, \quad t' = \sqrt{\left(\frac{\mu}{r_0^3}\right)} t, \quad u_1 = \frac{1}{m} \left(\frac{r_0}{\mu} \right) F_r, \quad u_2 = \frac{1}{m} \left(\frac{2r_0^3}{\mu} \right) F_\varphi.$$

Поставлена задача оптимальной стабилизации: требуется найти такие управляющие воздействия u_1^0 и u_2^0 , которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x_i = 0; \quad i=1, \dots, 3$ уравнений (2) и при этом на движениях системы (2) функционал

$$J[u] = \int_{t_0}^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u_1^2 + u_2^2) dt. \quad (3)$$

принимает минимальное значение. Показано, что система (2) вполне управляема.

Используя метод Ляпунова-Беллмана-Красовского для решения задач оптимальной стабилизации линейных систем для оптимальной функции Ляпунова получено

$$V^0(x_1, \dots, x_3) = 2.3475x_1^2 + 1.4891x_2^2 + 1.7523x_3^2 + 1.2186x_1x_2 + 1.9765x_1x_3 + 1.2905x_2x_3. \quad (4)$$

Оптимальные управляющие воздействия будут

$$u_1^0 = -0.6093x_1 - 1.4891x_2 - 0.6453x_3, u_2^0 = 1.3592x_1 - 0.0360x_2 - 0.7640x_3. \quad (5)$$

Для минимального значения функционала (3) получено

$$J^0 = V^0(x_1, \dots, x_3) = 2.3475x_{10}^2 + 1.4891x_{20}^2 + 1.7523x_{30}^2 + 1.2186x_{10}x_{20} + 1.9765x_{10}x_{30} + 1.2905x_{20}x_{30}. \quad (6)$$

где $x_{i0} = x_i(0); (i=1, \dots, 3)$.

Подставляя значения u_1^0, u_2^0 (5) в (2), получена система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.3592x_1 + 1.0360x_2 + 0.7640x_3, \\ \dot{x}_2 = -1.6093x_1 - 1.4891x_2 - 0.6453x_3, \\ \dot{x}_3 = 1.3592x_1 - 0.0360x_2 - 0.7640x_3. \end{cases} \quad (7)$$

где $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}; (i=1, \dots, 3)$.

Предполагая, что $x_i(0)=1; (i=1, \dots, 3)$, решения системы (7) будут:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -0.5403e^{-2.2420t} \left(e^{1.3703t} - 5.2449e^{0.8717t} \sin(0.7342t) - 2.8507e^{0.8717t} \cos(0.7342t) \right), \\ x_2(t) &= -1.13e^{-2.2420t} \left(3.75e^{1.3703t} + 0.3128e^{0.8717t} \sin(0.7342t) - 4.6357e^{0.8717t} \cos(0.7342t) \right), \\ x_3(t) &= 6.23e^{-2.2420t} \left(0.87e^{1.3703t} - 0.17e^{0.8717t} \sin(0.7342t) - 0.7063e^{0.8717t} \cos(0.7342t) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 2-4 приведены графики функции $x_i(t); (i=1, 2, 3, t=0, \dots, 10)$.

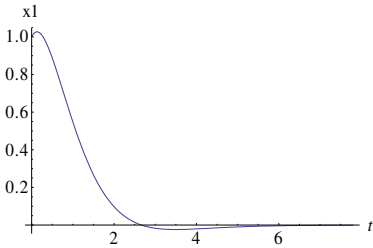


Рис. 2. График функции $x_1(t)$.

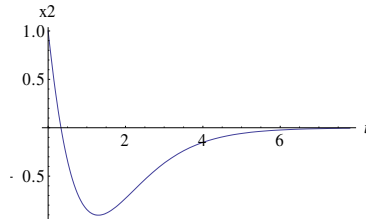


Рис. 3. График функции $x_2(t)$.

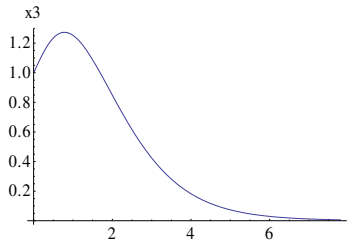


Рис. 4. График функции $x_3(t)$.

Очевидно, что все функции $x_i(t) (i=1, \dots, 3)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

В §2.2 рассмотрена задача оптимальной стабилизации центра масс искусственного

спутника Земли.

Рассмотрено движение центра масс искусственного спутника Земли на круговой орбите. Предполагается, что на спутник действует только сила притяжения Земли \vec{F} , приложенная к центру масс спутника, модуль которой определяется законом всемирного тяготения $F = \frac{\mu m}{r^2}$, где $\mu = gR^2 = fM$ – гравитационный параметр Земли

(R – ее радиус, g – ускорение силы тяжести на поверхности Земли, M – ее масса, f – гравитационная постоянная), $r = OC$ – расстояние от центра Земли O до центра масс C спутника, m – масса спутника.

Рассмотрено равномерное движение центра масс искусственного спутника по круговой орбите радиуса r_0 , лежащей в плоскости π (Рис. 5). Параметры, определяющие стационарное движение спутника, должны удовлетворять условию:

$$\omega^2 r_0^3 = \mu, \quad (9)$$

где $\omega = \dot{\varphi} = const$ – угловая скорость вращения радиуса-вектора r_0 спутника в стационарном движении.

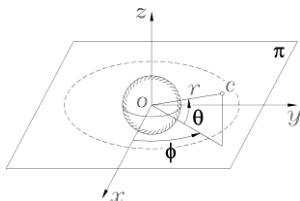


Рис. 5.

Для составления уравнений возмущенного движения спутника построена система отсчета $Oxyz$, координатная плоскость xy которой совмещена с плоскостью π .

Положение центра масс C искусственного спутника в возмущенном движении определено сферическими координатами r, φ, θ (Рис. 5).

Обозначая $x_1 = r - r_0$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$, $x_5 = \dot{\varphi} - \omega$ получены дифференциальные уравнения первого приближения возмущенного движения искусственного спутника

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 3\omega^2 x_1 + 2r_0 \omega x_5, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -2\omega^2 x_3, \quad \dot{x}_5 = -\left(\frac{2\omega}{r_0}\right) x_2. \quad (10)$$

Известно, что система (10) устойчива по Ляпунову.

Пусть на систему действуют управляющие воздействия \bar{u}_1 и \bar{u}_2 по направлениям обобщенных координат φ и θ соответственно. Тогда дифференциальные уравнения первого приближения в безразмерных координатах будут

$$\dot{y}_1 = ay_2, \quad \dot{y}_2 = 3by_1 + 2y_5, \quad \dot{y}_3 = ay_4, \quad \dot{y}_4 = -2by_3 + u_1, \quad \dot{y}_5 = -2y_2 + u_2. \quad (11)$$

Здесь $y_1 = \left(\frac{1}{r_0}\right)x_1$, $y_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{r_0 g}}\right)x_2$, $y_3 = x_3$, $y_4 = \left(\frac{r_0}{g}\right)x_4$, $y_5 = \left(\frac{r_0}{g}\right)x_5$. $\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt'}$;

$$t' = \omega t, \quad u_1 = \frac{\bar{u}_1}{\omega\sqrt{r_0 g}}, \quad u_2 = \frac{\bar{u}_2}{\omega r_0 \sqrt{r_0 g}}, \quad a = \left(\frac{1}{\omega}\right)\left(\sqrt{\frac{g}{r_0}}\right), \quad b = \frac{1}{a}, \quad (i=1, \dots, 5), \quad (12)$$

Показано, что система (11) вполне управляема.

Затем поставлена задача оптимальной стабилизации системы (11) при минимизации функционала

$$J[u] = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^5 y_i^2 + \sum_{k=1}^2 u_k^2 \right) dt. \quad (13)$$

Используя метод Ляпунова-Беллмана-Красовского для решения задач оптимальной стабилизации линейных систем при $\omega=0.001$; $g=9.81$; $r_0=7000000$ получена оптимальная функция Ляпунова в виде

$$V^0(y_1, \dots, y_5) = 13.5479y_1^2 + 4.0657y_2^2 + 2.1290y_3^2 + 1.2838y_4^2 + 3.3275y_5^2 + 13.0192y_1y_2 + 1.6607y_1y_5 + 5.0360y_2y_5 + 0.5475y_3y_4. \quad (14)$$

Тогда оптимальные управляющие воздействия будут

$$u_1^0 = -0.2737y_3 - 1.2838y_4, \quad u_2^0 = -5.8303y_1 - 2.5180y_2 - 3.3275y_5. \quad (15)$$

Для минимального значения функционала (13) получено:

$$J^0 = V^0(y_{i0}, \dots, y_{50}) = 13.5479y_{10}^2 + 4.0657y_{20}^2 + 2.1290y_{30}^2 + 1.2838y_{40}^2 + 3.3275y_{50}^2 + 13.0192y_{10}y_{20} + 1.6607y_{10}y_{50} + 5.0360y_{20}y_{50} + 0.5475y_{30}y_{40}. \quad (16)$$

где $y_{i0} = y_i(0)$; $(i=1, \dots, 5)$.

Подставляя значения u_1^0, u_2^0 (15) в (11), получена система дифференциальных уравнений, решения которой при $y_i(0)=1$; $(i=1, \dots, 5)$, и при $\omega=0.001$; $g=9.81$; $r_0=7000000$, будут:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 4.97e^{-2.1876t} \left(e^{1.1399t} - 0.7988e^{1.0478t} \cos(1.5323t) + 0.245e^{1.0478t} \sin(1.5323t) \right), \\ y_2(t) &= -4.4e^{-2.1876t} \left(e^{1.1399t} - 1.2273e^{1.0478t} \cos(1.5323t) - 0.9e^{1.0478t} \sin(1.5323t) \right), \\ y_3(t) &= -3.99363e^{-2.1876t} \left(e^{1.1399t} - 1.2504e^{1.0478t} \cos(1.5323t) + 1.99e^{1.0478t} \sin(1.5323t) \right), \\ y_4(t) &= e^{-0.6419t} \left(\cos(1.3827t) + 1.3204 \sin(1.3827t) \right), \\ y_5(t) &= e^{-0.6419t} \left(\cos(1.3827t) - 1.8840 \sin(1.3827t) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Построены графики оптимальных движений.

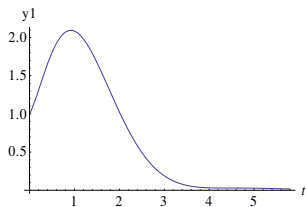


Рис. 6. График функции $y_1(t)$.

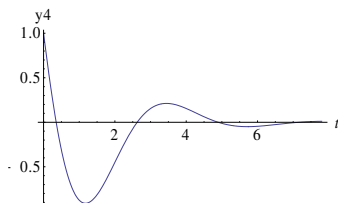


Рис. 7. График функции $y_4(t)$.

На рис. 6-7 приведены графики функций $y_1(t)$ и $y_4(t)$ ($t = 0, \dots, 10$):

Третья глава диссертации посвящена рассмотрению задач оптимальной стабилизации вращательного движения твердого тела в разных случаях.

В §3.1 рассмотрена задача оптимальной стабилизации движения волчка.

Пусть имеем тяжелый волчок, вращающийся вокруг своей оси динамической симметрии с угловой скоростью $\dot{\varphi}$. На волчок действуют две внешние силы: сила тяжести \vec{P} , приложенная к центру масс C волчка, и реакция \vec{R}_0 опоры O (Рис. 8). Положение оси z симметрии волчка относительно неподвижных осей $\xi\eta\zeta$ будет определяться углами α и β (Рис. 9).

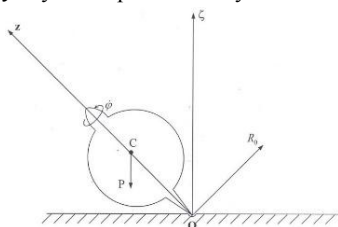


Рис. 8

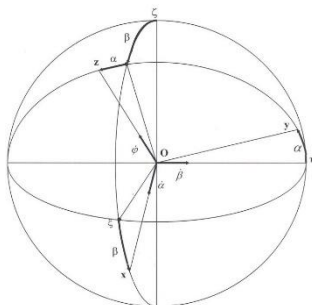


Рис. 9

Введены оси x, y, z (Рис. 9) и через p, q, r обозначены проекции угловой скорости ω вращения волчка относительно осей x, y, z соответственно:

$$p = \dot{\alpha}, \quad q = \dot{\beta} \cos \alpha, \quad r = \dot{\varphi} - \dot{\beta} \sin \alpha. \quad (18)$$

Сначала исследована устойчивость движения

$$\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \beta = 0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \omega = const \quad (19)$$

Введены следующие обозначения:

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \dot{\alpha}, \quad x_3 = \beta, \quad x_4 = \dot{\beta}, \quad x_5 = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0. \quad (20)$$

и получена система дифференциальных уравнений первого приближения в следующем виде:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = b \cdot x_1 - \sqrt{a} \cdot x_4, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \sqrt{a} \cdot x_2 + b \cdot x_3, \quad \dot{x}_5 = 0. \quad (21)$$

где l – расстояние от центра масс C волчка до опоры O , $I_x = I_y$ – экваториальные, а I_z – аксиальный моменты инерции волчка.

$$a = \left(\frac{I_z}{I_x} \omega \right)^2, \quad b = \frac{Pl}{I_x}. \quad (22)$$

Известно, что при

$$\omega > \frac{2\sqrt{I_x Pl}}{I_z} \quad (23)$$

система (21) устойчива по Ляпунову.

Пусть ω – заданная угловая скорость и пусть на систему действуют управляющие воздействия \bar{u}_1 и \bar{u}_2 по направлениям обобщенных координат x_2 и x_5 соответственно. Тогда систему дифференциальных уравнений (21) можем написать с безразмерными величинами:

$$\dot{y}_1 = ky_2, \quad \dot{y}_2 = y_1 - y_4 + u_1, \quad \dot{y}_3 = ky_4, \quad \dot{y}_4 = y_2 + y_3, \quad \dot{y}_5 = u_2. \quad (24)$$

Здесь

$$y_1 = kx_1, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} x_2, \quad y_3 = kx_3, \quad y_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} x_4, \quad y_5 = \frac{1}{\sqrt{a}} x_5; \quad (25)$$

$$u_1 = \frac{\bar{u}_1}{a}, \quad u_2 = \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{a}}, \quad k = \frac{b}{a}, \quad t' = \sqrt{a}t, \quad \dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt}; \quad (i=1, \dots, 5)$$

Поставлена задача оптимальной стабилизации: требуется найти такие управляющие воздействия u_1^0 и u_2^0 , которые обеспечивают асимптотическую устойчивость системы (24) и при этом на движениях системы (24) функционал

$$J[u] = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^5 y_i^2 + \sum_{k=1}^2 u_k^2 \right) dt. \quad (26)$$

принимает минимальное значение.

Нетрудно показать, что система (24) вполне управляема.

Используя метод Ляпунова-Беллмана-Красовского для решения задач оптимальной стабилизации линейных систем, аналогично главе 2, для нахождения коэффициентов c_j получена система алгебраических уравнений, зависящих от параметра k .

Используя программные пакеты Exel и Matematica, составлены таблицы и построены графики для оптимальных значений этих коэффициентов, зависящих от параметра k . Например, график и формула для константа c_{11} приведены на рисунке 10.

Точки показывают решения c_{11} при соответствующих значениях параметра k , а непрерывная кривая иллюстрирует наилучшую аппроксимацию функции c_{11} , зависящей от k .

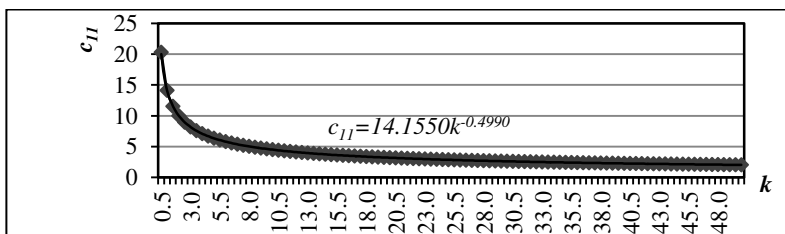


Рис. 10. График и наилучшая аппроксимация функции c_{11} , зависящей от k

Таким образом, получено:

$$\begin{aligned}
 c_{11}^0 &= 14.16k^{-0.499}; & c_{12}^0 &= -0.8284; & c_{22}^0 &= 8.1943k^{0.5067}; \\
 c_{13}^0 &= (2 \times 10^{-8})k^6 - (3 \times 10^{-6})k^5 + 0.0002k^4 - 0.0074k^3 + 0.1226k^2 - 0.99k - 22.85; \\
 c_{14}^0 &= (1 \times 10^{-7})k^6 - (2 \times 10^{-5})k^5 + 0.0012k^4 - 0.041k^3 + 0.81k^2 - 11.77k - 14.778; \\
 c_{23}^0 &= 18.204k^{0.5036}; & c_{24}^0 &= 18.443k^{-2.5861}; & c_{33}^0 &= 84.02k^{0.5029}; \\
 c_{34}^0 &= 85.05k^{-6.0128}; & c_{44}^0 &= 82.502k^{1.5082}; & c_{55}^0 &= 2.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Следовательно, оптимальная функция Ляпунова будет

$$\begin{aligned}
 V^0(y_1, \dots, y_5) &= \frac{c_{11}^0}{2} y_1^2 + \frac{c_{22}^0}{2} y_2^2 + \frac{c_{33}^0}{2} y_3^2 + \frac{c_{44}^0}{2} y_4^2 + y_5^2 - \\
 &- 0.8284y_1y_2 + c_{13}^0y_1y_3 + c_{14}^0y_1y_4 + c_{23}^0y_2y_3 + c_{24}^0y_2y_4 + c_{34}^0y_3y_4,
 \end{aligned} \tag{28}$$

А оптимальные управляющие воздействия

$$u_1^0 = 0.4142y_1 - \frac{c_{22}^0}{2} y_2 - \frac{c_{23}^0}{2} y_3 - \frac{c_{24}^0}{2} y_4, \quad u_2^0 = -y_5. \tag{29}$$

Для минимального значения функционала (26) получено

$$\begin{aligned}
 J^0 = V^0(y_{10}, \dots, y_{50}) &= \frac{c_{11}^0}{2} y_{10}^2 + \frac{c_{22}^0}{2} y_{20}^2 + \frac{c_{33}^0}{2} y_{30}^2 + \frac{c_{44}^0}{2} y_{40}^2 + y_{50}^2 - \\
 &- 0.8284y_{10}y_{20} + c_{13}^0y_{10}y_{30} + c_{14}^0y_{10}y_{40} + c_{23}^0y_{20}y_{30} + c_{24}^0y_{20}y_{40} + c_{34}^0y_{30}y_{40},
 \end{aligned} \tag{30}$$

где $y_{i0} = y_i(0)$; ($i = 1, \dots, 5$).

Предполагая, что $y_i(0) = 1$; ($i = 1, \dots, 5$), при $k = 1.0$, получены оптимальные движения системы в виде:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= -1.8167e^{-2.0486t} \left(e^{1.6234t} \cos(0.3421t) - 1.5504e^{0.4252t} \cos(1.4537t) + \right. \\
 &+ \left. 5.2207e^{1.6234t} \sin(0.3421t) - 3.0463e^{0.4252t} \sin(1.4537t) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= -2.4724e^{-2.0486t} \left(e^{1.6234t} \cos(0.3421t) - 1.4045e^{0.4252t} \cos(1.4537t) - \right. \\
&\quad \left. - 1.8824e^{1.6234t} \sin(0.3421t) + 5.29e^{0.4252t} \sin(1.4537t) \right), \\
y_3(t) &= 3.8167e^{-2.0486t} \left(e^{1.6234t} \cos(0.3421t) - 0.738e^{0.4252t} \cos(1.4537t) - \right. \\
&\quad \left. - 0.9917e^{1.6234t} \sin(0.3421t) - 0.1181e^{0.4252t} \sin(1.4537t) \right), \\
y_4(t) &= -2.9176e^{-2.0486t} \left(e^{1.6234t} \cos(0.3421t) - 1.3427e^{0.4252t} \cos(1.4537t) - \right. \\
&\quad \left. - 0.104e^{1.6234t} \sin(0.3421t) - 1.6541e^{0.4252t} \sin(1.4537t) \right), \quad y_5(t) = e^{-t}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Построены графики оптимальных движений. Например, на рис. 11, 12 приведены графики функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$; ($t = 0, \dots, 20$).

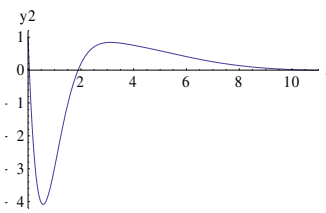
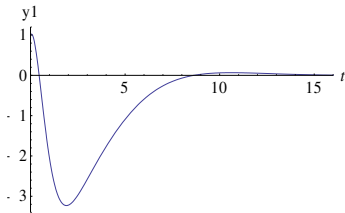


Рис. 11 График функции $y_1(t)$. Рис. 12 График функции $y_2(t)$.

В §3.2 рассматриваются задачи устойчивости и стабилизации вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг точки, находящейся на оси динамической симметрии тела. Предполагается, что точка, вокруг которой вращается тело, движется по горизонтальной плоскости.

Пусть абсолютно твердое тело массы m , вращающееся вокруг точки O , одновременно вращается вокруг своей оси динамической симметрии с угловой скоростью ω . Точка O в свою очередь, может свободно двигаться по горизонтальной плоскости.

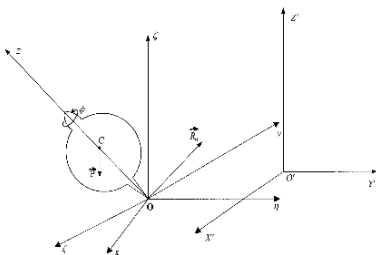


Рис.13

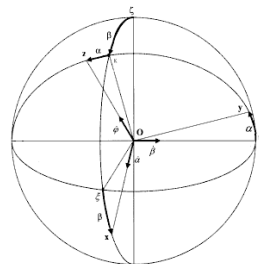


Рис.14

Для исследования рассматриваемого движения твердого тела выбрана неподвижная система отсчета $O'X'Y'Z'$ и подвижные системы отсчета $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$. Система

$Oxuz$ неподвижно связана с телом, а система $O\xi\eta\zeta$ движется так, что оси $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$ остаются параллельными осям $O'X'$, $O'Y'$ и $O'Z'$ соответственно (Рис. 13).

Обозначим через OK линию пересечения плоскостей yOz и $\xi O\zeta$, через α – угол между OK и Oz , через β – угол между OK и $O\zeta$, а через φ – угол вращения тела вокруг оси Oz (Рис. 14). Положения тела для любого момента времени определяются координатами α, β, x и y , где x и y координаты точки O на плоскости $O'X'Y'$.

Пусть при движении точки O на плоскости $O'X'Y'$ возникает сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости

$$\vec{R} = -\mu_1 \cdot \vec{V}_0 \quad (33)$$

Рассмотрено движение твердого тела

$$\alpha = \dot{\alpha} = \beta = \dot{\beta} = \dot{x} = \dot{y} = 0, \dot{\varphi} = \omega \quad (34)$$

Принимая это движение за невозмущенное, исследована устойчивость этого движения.

Сделаны следующие обозначения:

$$x_1 = \alpha, x_2 = \dot{\alpha}, x_3 = \beta, x_4 = \dot{\beta}, x_5 = \dot{\varphi} - \omega, x_6 = x, x_7 = \dot{x}, x_8 = y, x_9 = \dot{y}. \quad (35)$$

Для линейного приближения дифференциальных уравнений тела получено:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sqrt{a} \cdot x_4 + b \cdot x_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \sqrt{a} \cdot x_2 + b \cdot x_3, \quad \dot{x}_5 = 0, \\ \dot{x}_6 &= x_7, \quad \dot{x}_7 = -\mu \cdot x_7, \quad \dot{x}_8 = x_9, \quad \dot{x}_9 = -\mu \cdot x_9. \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$a = \left(\frac{J_z}{J_x} \omega \right)^2; \quad b = \frac{mgl}{J_x}; \quad \mu = \frac{\mu_1}{m} \quad (37)$$

Показано, что при условии

$$\omega > \frac{2\sqrt{J_x mgl}}{J_z} \quad (38)$$

система (36) будет устойчива по Ляпунову.

Пусть ω является некоторой данной угловой скоростью, удовлетворяющей условию (38). По направлениям обобщенных координат x_2, x_5, x_7 и x_9 присоединим управления $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, и \bar{u}_4 так, чтобы движение (34) абсолютно твердого тела стало бы асимптотически устойчиво. Сделаем следующие обозначения:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1; y_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} x_2; y_3 = kx_3; y_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} x_4; y_5 = \frac{1}{\sqrt{a}} x_5; \\ y_6 = \frac{x_6}{l}; y_7 = \frac{1}{l\sqrt{a}} x_7; y_8 = \frac{x_8}{l}; y_9 = \frac{1}{l\sqrt{a}} x_9; u_1 = \frac{\bar{u}_1}{a}; \\ u_2 = \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{a}}; u_3 = \frac{\bar{u}_3}{al}; u_4 = \frac{\bar{u}_4}{al}; k = \frac{b}{a}; f = \frac{\mu}{\sqrt{a}}; t' = \sqrt{at}. \end{cases} \quad (39)$$

В этом случае систему (36) при управляющих воздействиях можно записать в безразмерных величинах:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= ky_2, \quad \dot{y}_2 = y_1 - y_4 + u_1, \quad \dot{y}_3 = ky_4, \quad \dot{y}_4 = y_2 + y_3, \quad \dot{y}_5 = u_2, \\ \dot{y}_6 &= y_7, \quad \dot{y}_7 = -fy_7 + u_3, \quad \dot{y}_8 = y_9, \quad \dot{y}_9 = -fy_9 + u_4. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt}$.

Показано, что система (40) вполне управляема.

Решена задача оптимальной стабилизации системы (40). В качестве переходного процесса оценен функционал

$$J[u] = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^9 y_i^2 + \sum_{k=1}^4 u_k^2 \right) dt. \quad (41)$$

Используя метод Ляпунова-Беллмана-Красовского, для оптимальной функции Ляпунова получено:

$$\begin{aligned} V^0(y_1, \dots, y_9) &= \frac{c_{11}^0}{2} y_1^2 + \frac{c_{22}^0}{2} y_2^2 + \frac{c_{33}^0}{2} y_3^2 + \frac{c_{44}^0}{2} y_4^2 + \\ &+ \frac{c_{55}^0}{2} y_5^2 + \frac{c_{66}^0}{2} y_6^2 + \frac{c_{77}^0}{2} y_7^2 + \frac{c_{88}^0}{2} y_8^2 + \frac{c_{99}^0}{2} y_9^2 + \\ &+ c_{12}^0 y_1 y_2 + c_{13}^0 y_1 y_3 + c_{14}^0 y_1 y_4 + c_{23}^0 y_2 y_3 + c_{24}^0 y_2 y_4 + c_{34}^0 y_3 y_4 + \\ &+ c_{67}^0 y_6 y_7 + c_{68}^0 y_6 y_8 + c_{69}^0 y_6 y_9 + c_{78}^0 y_7 y_8 + c_{79}^0 y_7 y_9 + c_{89}^0 y_8 y_9, \end{aligned} \quad (42)$$

а оптимальные управляющие воздействия будут:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= -\frac{1}{2} (c_{22}^0 y_2 + c_{12}^0 y_1 + c_{23}^0 y_3 + c_{24}^0 y_4), \quad u_2^0 = -\frac{1}{2} c_{55}^0 y_5, \\ u_3^0 &= -\frac{1}{2} (c_{77}^0 y_7 + c_{67}^0 y_6 + c_{78}^0 y_8 + c_{79}^0 y_9), \quad u_4^0 = -\frac{1}{2} (c_{99}^0 y_9 + c_{69}^0 y_6 + c_{79}^0 y_7 + c_{89}^0 y_8). \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= 88056.7k^4 - 76174.5k^3 + 24567.8k^2 - 3631k + 249.3; \quad c_{12} = -0.8284; \\ c_{13} &= -31181k^4 + 27000k^3 - 8708k^2 + 1268.9k - 96; \\ c_{14} &= -6.8357k^2 - 15.2078k - 9.404; \quad c_{22} = 1.8622k^2 + 5.3865k + 2.6777; \\ c_{23} &= 4.8301k^2 + 10.75k + 6.6496; \quad c_{24} = 12.4402k^2 + 7.6476k + 0.8072; \\ c_{33} &= 88024.7k^4 - 76256k^3 + 24657.4k^2 - 3592.9k + 261.0052; \\ c_{34} &= 59.2929k^2 + 33.6360k + 10.1351; \quad c_{44} = 68.63k^2 + 16.85k + 3.904; \quad c_{55} = 2; \\ c_{66} &= -9.8608f^4 + 7.6708f^3 - 1.5262f^2 + 0.1205f + 3.4611; \\ c_{67} &= 2; \quad c_{77} = 190.1f^4 - 119f^3 + 20.97f^2 - 2.1271f + 3.5111 = c_{99}; \\ c_{88} &= -9.8608f^4 + 7.6708f^3 - 1.5262f^2 + 0.1205f + 3.4611; \quad c_{89} = 2. \end{aligned} \quad (44)$$

Предполагая, что $y_i(0) = 1$; ($i = 1, \dots, 9$), при $k = 0.20$, $f = 0.05$, получены оптимальные движения системы в следующем виде:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= 0.4680e^{-0.9581t} (e^{0.7937t} \cos(0.1191t) + 1.1368e^{0.1644t} \cos(0.8610t) - \\
&\quad - 4.5654e^{0.7937t} \sin(0.1191t) + 2.3643e^{0.1644t} \sin(0.8618t)), \\
y_2(t) &= -1.6570e^{-0.9581t} (e^{0.7937t} \cos(0.1191t) - 1.6035e^{0.1644t} \cos(0.8610t) - \\
&\quad - 0.8918e^{0.7937t} \sin(0.1191t) + 4.0334e^{0.1644t} \sin(0.8618t)), \\
y_3(t) &= 2.0130e^{-0.9581t} (e^{0.7937t} \cos(0.1191t) - 0.5032e^{0.1644t} \cos(0.8610t) - \\
&\quad - 0.5752e^{0.7937t} \sin(0.1191t) - 0.0779e^{0.1644t} \sin(0.8618t)), \\
y_4(t) &= -2.3441e^{-0.9581t} (e^{0.7937t} \cos(0.1191t) - 1.4266e^{0.1644t} \cos(0.8610t) + \\
&\quad + 0.1053e^{0.7937t} \sin(0.1191t) - 2.1275e^{0.1644t} \sin(0.8618t)), \\
y_5(t) &= e^{-t}, y_6(t) = e^{-0.8675t} (\cos(0.4975t) + 3.7535\sin(0.4975t)), \\
y_7(t) &= e^{-0.8675t} (\cos(0.4975t) - 3.7535\sin(0.4975t)), \\
y_8(t) &= e^{-0.8675t} (\cos(0.4975t) + 3.7535\sin(0.4975t)), \\
y_9(t) &= e^{-0.8675t} (\cos(0.4975t) - 3.7535\sin(0.4975t)).
\end{aligned} \tag{45}$$

Ниже приведены некоторые графики функций $y_i(t)$; ($i = 1, \dots, 9, t = 0, \dots, 30$)

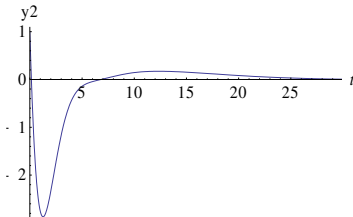


Рис. 15 График функции $y_2(t)$.

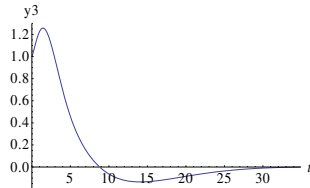


Рис. 16 График функции $y_3(t)$.

В §3.3 рассмотрено вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Эйлера.

Предположено, что твердое тело вращается вокруг своего центра масс, а центр масс тела совершает свободное движение в пространстве $oxuz$.

Пусть x_c, y_c, z_c – координаты центра масс тела, A, B, C – главные моменты инерции, p, q, r – координаты мгновенной угловой скорости вращения относительно осей x, y, z соответственно, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – направляющие косинусы.

Рассмотрено следующее движение тела:

$$p = q = 0, \quad r = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad x_c = y_c = z_c = 0, \quad \dot{x}_c = \dot{y}_c = \dot{z}_c = 0. \tag{46}$$

Для простоты предположено, что $A > B > C$.

Затем приведены описанные решения задачи оптимальной стабилизации.

Так как $A > B > C$, то можно обозначить $B = k.A$; $C = f.k.A$, где $f, k \in (0, 1)$.

Для определения коэффициентов c_{ij} полученная система алгебраических уравнений решена при разных значениях $f, k \in (0, 1)$ (т.е. при разных значениях A, B, C), затем построены графики нужных коэффициентов и найдены наилучшие аппроксимации. Например, на рис. 17 приведен график функции константы c_{77} и наилучшая

аппроксимация, зависящая от f при $k = 0.05$ $\left(f = \frac{20C}{A} \right)$.

Таким образом, получены коэффициенты c_{ij}^0 , оптимальная функция Ляпунова, оптимальные управляющие воздействия, минимальное значение функционала, а так же графики оптимальных движений.

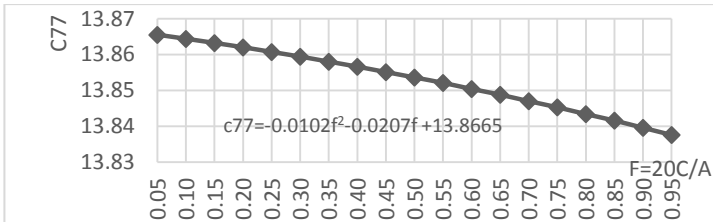


Рис. 17 График функции и наилучшая аппроксимация c_{77} , зависящая от f .

Точки показывают решения c_{77} при соответствующих значениях параметра $f = \frac{20C}{A}$, а непрерывная кривая иллюстрирует наилучшую аппроксимацию функции c_{77} , зависящую от $f = \frac{20C}{A}$.

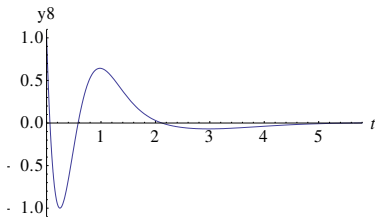


Рис. 18 График функции $y_2(t)$.

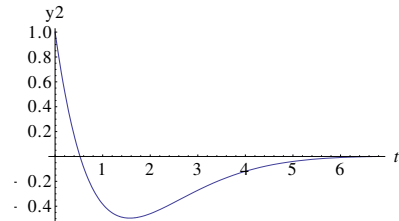


Рис. 19 График функции $y_8(t)$.

На рис. 18 и 19 приведены графики функций $y_i(t)$; ($i=2,8$; $t=0, \dots, 10$).

В § 3.4 рассмотрены задачи устойчивости и оптимальной стабилизации вращательного движения тяжелого волчка вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$. Предположено, что волчок имеет цилиндрическую полость, не полностью наполненную несжимаемой жидкостью.

Введены три системы координатных осей в неподвижной точке O с общим началом:

а) неподвижная система координат XYZ , ось Z , направлена вертикально вверх, а оси X и Y , лежащие в горизонтальной плоскости, составляют правую тройку (Рис. 20);

б) подвижная система координат xuz , ось z направлена вертикально вверх, а оси x и y расположены в горизонтальной плоскости и вращаются вокруг оси z с угловой скоростью ω ;

в) подвижная система $x'y'z'$; ось z' направлена по оси симметрии волчка, а оси x' и y' вращаются вокруг z' с угловой скоростью ω .

Пусть направляющие косинусы оси z' относительно XYZ будут l_1, m_1, n_1 . В положении динамического равновесия $l_1 = m_1 = 0, n_1 = 1$. Если считать малыми отклонения от равномерного движения, то уравнение движения волчка будет

$$A_1 \ddot{l}_1 + C_1 \omega \dot{m}_1 - M_y = 0, \quad A_1 \ddot{m}_1 - C_1 \omega \dot{l}_1 + M_x = 0, \quad (47)$$

где A_1 и C_1 - главные моменты инерции твердого тела относительно неподвижной точки O , M_x и M_y - проекции момента всех сил, действующих на оболочку относительно точки O .

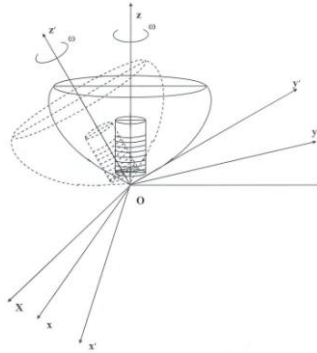


Рис. 20 Тяжелый волчок, имеющий цилиндрическую полость.

После некоторых предположений и упрощений, получена система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ax_1 - bx_4, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = bx_2 + ax_3 \quad (48)$$

где $x_1 = l_1, x_2 = \dot{l}_1, x_3 = m_1, x_4 = \dot{m}_1$,

$$a = \frac{M_1}{A_1} gh_1 + \frac{M_2}{A_1} gh + \frac{A_2 - C_2}{A_1} \omega^2, \quad b = \frac{C_1}{A_1} \omega.$$

Показано, что:

а) если $b^2 - 2a < 0 \Rightarrow \frac{C_1^2}{A_1} \omega^2 - 2(M_1 gh_1 + M_2 gh + (A_2 - C_2) \omega^2) < 0,$ (49)

то система (48) неустойчива.

б) если $b^2 - 2a > 0 \Rightarrow \frac{C_1^2}{A_1} \omega^2 - 2(M_1 gh_1 + M_2 gh + (A_2 - C_2) \omega^2) > 0,$ (50)

или $a = 0 \Rightarrow M_1 gh_1 + M_2 gh + (A_2 - C_2) \omega^2 = 0,$ (51)

то система (48) устойчива.

Пусть ω -заданная угловая скорость, удовлетворяющая условию (50) или (51). Пусть на систему действуют управляющие воздействия \bar{u}_1 и \bar{u}_2 по направлениям обобщенных координат x_2 и x_4 соответственно. Тогда система (48) принимает вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ax_1 - bx_4 + \bar{u}_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = bx_2 + ax_3 + \bar{u}_2. \quad (52)$$

Введем следующие обозначения:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \frac{1}{b}x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = \frac{1}{b}x_4; \quad u_1 = \frac{\bar{u}_1}{b^2}, \quad u_2 = \frac{\bar{u}_2}{b^2}, \quad k = \frac{a}{b^2}, \quad t' = bt. \quad (53)$$

Напишем систему дифференциальных уравнений (52) в безразмерных переменных

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = ky_1 - y_4 + u_1, \quad \dot{y}_3 = y_4, \quad \dot{y}_4 = y_2 + ky_3 + u_2. \quad (54)$$

Здесь $\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt}$; ($i = 1, \dots, 4$).

Нетрудно показать, что система (54) вполне управляема.

Поставлена задача оптимальной стабилизации: требуется найти такие управляющие воздействия u_1^0 и u_2^0 , которые обеспечивают асимптотическую устойчивость системы (54) и при этом на движениях системы (54) функционал

$$J[u] = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^4 y_i^2 + \sum_{k=1}^2 u_k^2 \right) dt. \quad (55)$$

принимает минимальное значение.

Функция Ляпунова выбрана в форме

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 c_{ij} y_i y_j, \quad (56)$$

Используя метод Ляпунова-Беллмана-Красовского, получена система алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_{ij} ($i, j = 1, \dots, 4$), зависящих от параметра k . Решая полученную систему описанным выше методом, получены те значения c_{ij} ($i, j = 1, \dots, 4$), при которых функция Ляпунова становится определенно положительной.

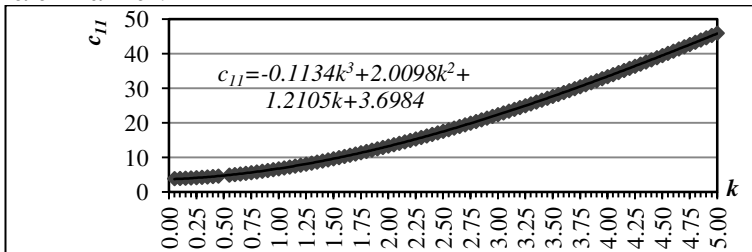


Рис. 21 График функции и наилучшая аппроксимация коэффициента c_{11} , зависящая от параметра k .

На рис. 21 приведен график функции константы c_{11} и наилучшая аппроксимация, зависящая от параметра k .

Таким образом, оптимальные значения c_{ij} ($i, j = 1, \dots, 4$) будут

$$c_{11}^0 = -0.1134k^3 + 2.0098k^2 + 1.2105k + 3.6984; c_{12}^0 = -0.0476k^3 + 0.4992k^2 + 2.2206k + 1.5437;$$

$$c_{14}^0 = -0.0008k^3 + 0.0539k^2 - 0.9051k - 0.9892; c_{22}^0 = -0.0054k^3 - 0.0210k^2 + 1.3945k + 3.1982;$$

$$c_{23}^0 = 0.0008k^3 - 0.0539k^2 + 0.9051k + 0.9892; c_{33}^0 = -0.1134k^3 + 2.0098k^2 + 1.2105k + 3.6984;$$

$$c_{34}^0 = -0.048k^3 + 0.5k^2 + 2.22k + 1.54; c_{44}^0 = -0.0054k^3 - 0.021k^2 + 1.39k + 3.2; c_{13}^0 = c_{24}^0 = 0.$$

Затем построена оптимальная функция Ляпунова, получены оптимальные управляющие воздействия и минимальное значение функционала. При $k=1.0$ получены аналитические выражения оптимальных движений и построены их графики. На рис. 22 и 23 приведены графики функций $y_i(t)$; ($i=1, 2, t=0, \dots, 10$).

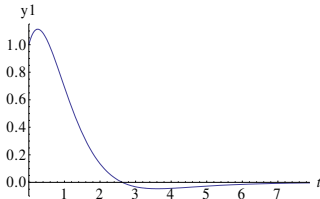


Рис. 22 График функции $y_1(t)$.

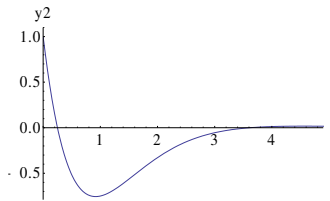


Рис. 23 График функции $y_2(t)$.

В заключении приведены основные результаты работы.

В приложении приведены таблицы численных значений и графики построенных функций с помощью этих значений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследованы задачи устойчивости, стабилизации и оптимальной стабилизации плоского и пространственного движения различных механических систем. Получены следующие основные результаты:

- Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации кругового движения материальной точки переменной массы. Построена оптимальная функция Ляпунова, получены оптимальные управляющие воздействия, найдены минимальные значения функционалов.
- Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации центра масс искусственного спутника Земли в круговом движении. Построена оптимальная функция Ляпунова, получены оптимальные управляющие воздействия, найдены минимальные значения функционалов.
- Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации вращательного движения волчка, зависящего от параметра, входящего в систему.
- Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации вращательного движения твердого тела вокруг точки, находящейся на оси динамической симметрии тела (случай Лагранжа-Пуассона). Предполагается, что точка, вокруг которой вращается тело, движется по горизонтальной плоскости.

- Рассмотрена задача движения свободного твердого тела. Задача приведена к задаче вращательного движения твердого тела вокруг центра масс (случай Эйлера-Пуансо). Показано, что такое движение тела неустойчиво. По направлениям обобщенных координат введены управляющие воздействия, проверена вполне управляемость линейного приближения полученной системы. Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации рассматриваемого движения.
- Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации вращательного движения волчка, имеющего цилиндрическую полость, не полностью наполненную несжимаемой идеальной жидкостью.

Для всех случаев построены оптимальные функции Ляпунова, получены оптимальные управляющие воздействия, найдены минимальные значения функционалов. Построены графики оптимальных движений. Представлен алгоритм для решения таких задач. Предложен метод решения задач, который представляет возможность использовать полученные результаты для различных значений параметров.

Список научных работ по теме диссертации

1. Shahinyan S.G., Rezaei M., Optimal Stabilization of the Rotational Motion of a Rigid Body under Integrally Small Perturbations, TPCM2010, Dilijan, Armenia, 2010, p.p. 221-225.
2. Shahinyan S.G., Rezaei M., The Problem of Optimal Stabilization of Planar Motion of a Variable Mass Material Point, 21st Annual International Conference on Mechanical Engineering-ISME2013, School of Mechanical Eng., K.N.Toosi University, Tehran, Iran, 2013.
3. Rezaei M., The Problem of Optimal Stabilization under Integrally Small Perturbations, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, No. 2, 2013, pp. 34–41.
4. Rezaei M., Shahinyan S.G., Optimal Stabilization of the Spinning Top Having a Cylindrical Cavity Motion under Integrally Small Perturbations, IJCLS, Vol. 4, Issue 12, 2014, pp. 12164-12170.
5. Shahinyan S.G., Rezaei M., The Problem of the Optimal Stabilization of the Spinning Top Motion, Proceedings of NAS RA Mechanics, Vol. 69, No. 1, 2016, pp. 66-75.

Ամփոփում

Ատենախոսությունում ուսումնասիրված է տարբեր մեխանիկական համակարգերի (փոփոխական զանգվածով նյութական կետ, Երկրի արհեստական արբանյակ, մեկ անշարժ կետ ունեցող բացարձակ պինդ մարմին և այլն) հարթ կամ տարածական շարժման կայունության, կայունացման և օպտիմալ կայունացման խնդիրները:

Ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- դիտարկված և լուծված է փոփոխական զանգվածով նյութական կետի շրջանային շարժման օպտիմալ կայունացման խնդիրը:
- դիտարկված և լուծված է Երկրի արհեստական արբանյակի զանգվածների կենտրոնի ստացիոնար շարժման օպտիմալ կայունացման խնդիրը:
- դիտարկված և լուծված է հոլի՝ որպես պինդ մարմնի պտտական շարժման օպտիմալ կայունացման խնդիրը՝ կախված համակարգում մասնակցող պարամետրից:
- դիտարկված և լուծված է հոլի շարժման օպտիմալ կայունացման խնդիրը այն ենթադրությամբ, որ հոլի հենման կետը կարող է շարժվել հորիզոնական հարթության մեջ (պինդ մարմնի պտույտ անշարժ կետի շուրջ, Լագրանժի դեպք):
- դիտարկված և լուծված է պինդ մարմնի՝ իր զանգվածների կենտրոնի շուրջը պտտական շարժման օպտիմալ կայունացման խնդիրը (պինդ մարմնի պտույտ անշարժ կետի շուրջ, Էյլերի դեպք): Ենթադրվում է նաև, որ մարմնի զանգվածների կենտրոնը կարող է շարժվել տարածության մեջ:
- դիտարկված և լուծված է գլանաձև խոռոչ ունեցող և հեղուկով լցված հոլի պտտական շարժման օպտիմալ կայունացման խնդիրը:

Բոլոր դեպքերի համար կառուցված են Լյապունովի օպտիմալ ֆունկցիաները, ստացված են օպտիմալ դեկավարող ազդեցությունները, ֆունկցիաների մինիմալ արժեքները, կառուցված են օպտիմալ շարժումների գրաֆիկները:

Խնդիրների լուծման ժամանակ առաջանում են պարամետրերից կախված ոչ գծային հանարահաշվական հավասարումների համակարգ: Առաջարկված է այդպիսի համակարգերի լուծման եղանակ, որի օգնությամբ ստացված լուծումները կարելի է օգտագործել համակարգում մասնակցող պարամետրերի բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում:

Conclusion

Problems of stability, stabilization and optimal stabilization of various mechanical systems of plane and spatial motion of different mechanical systems (material point of variable mass, the Earth artificial satellite, absolute solid body with single fixed point, etc.) have been considered in the present scientific thesis.

The following main results have been obtained:

- The optimal stabilization problem in planar motion of a variable mass material point is considered. The optimal stabilization problem of considered motion is assumed and solved. Optimal Lyapunov function is constructed, the optimal controls and the optimal value of functional are obtained.
- The optimal stabilization problem in motion of the mass center of Earth satellite is considered. The optimal stabilization problem of considered motion in classical sense is assumed and solved.
- The optimal stabilization problem in motion of a spinning top as a rigid body on classical sense is considered. The optimal stabilization problem of considered motion is assumed and solved.
- The optimal stabilization problem in rotational motion of a rigid body around a point which is on the axis of dynamical symmetry of the body is considered. It is assumed that the point, which the body rotates around it, moves on a horizontal plane. The optimal stabilization problem of considered motion is assumed and solved.
- The case of the Euler rotational motion of a rigid body around a fixed point is considered. The optimal stabilization problem of considered motion is assumed, solved and turned out that the system of differential equations of the rigid body motion is unstable in the sense of Lyapunov. In direction of the generalized coordinates introduced input controls, fully controllability of linear approximation of the obtained control system is checked up and turned out that it is fully controllable then the optimal stabilization problem of that system on classical sense is solved.
- The optimal stabilization problem in rotational motion of the spinning top having a cylindrical cavity is considered. The optimal stabilization problem of considered motion is solved. In direction of the generalized coordinates introduced input controls, fully controllability of linear approximation of the obtained control system is checked and the optimal stabilization problem on classical sense is solved.

By the use of the possibilities offered by modern computer packages (Wolfram Mathematica 9, Excel 2007), the established problems have been solved depending on the parameters involved in the systems. For all of cases optimal Lyapunov functions are constructed, the optimal controls and the optimal values of functionals are obtained. The graphs of optimal movements have been constructed.

Masoud Rezaei