ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՊՈՂՈՍՅԱՆ ԴԻԱՆԱ ՄՆԱՑԱԿԱՆԻ

ՀԵՏԵՎՈՂ ՈՒԺԵՐՈՎ ՍԵՂՄՎԱԾ ՁՈՂԵՐԻ ԵՎ ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա.02.04.- «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2014

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

ПОГОСЯН ДИАНА МНАЦАКАНОВНА

ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН, СЖАТЫХ СЛЕДЯЩИМИ СИЛАМИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04- “Механика деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН-2014

© National Library of Armenia OCR by Portmind

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.թ., պրոֆեսոր Մ. Վ. Բելուբեկյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ. Գ.Ե. Բաղդասարյան
ֆ.մ.գ. թ., դոցենտ Ս.Հ. Ջիլավյան

Առաջատար կազմակերպություն Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան (Պոլիտեխնիկ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2014թ նոյեմբերի 7-ին ժամը 14^{00}-ին ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի - 047 մասնագիտական խորհրդում
(Հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2, avsah@mechins.sci.am)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 06 հոկտեմբերի 2014թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ. Ա.Վ. Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель к.ф.м.н., профессор М.В. Белубекян

Официальные оппоненты академик, д.ф.м.н. Г.Е. Багдасарян
к.ф.м.н. доцент С.А. Джилавян

Ведущая организация: Государственный инженерный университет Армении (Политехник)

Защита состоится 7-ого ноября 2014г. в 14^{00} на заседании специализированного совета Механика - 047 в Институте механики НАН РА.

Адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2, avsah@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 6-ого октября 2014г.
Ученый секретарь
специализированного совета д.ф.м.н. А.В.Саакян

© National Library of Armenia

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Пластинки прямоугольного очертания и стержневые системы входят в состав различных конструкций - крыла самолета, днища палубы и бортовых стенок корабля, стенок цельнометаллического вагона и т. д.. Стержневые системы и пластинки подвергаются в этих конструкциях действию той или иной «местной» поперечной нагрузки, которая вызывает разные деформации- сжатие, изгиб, сдвиг т. д.. Поэтому расчет стержневой системы и пластинок на устойчивость представляет собой неотъемлемую часть общего расчета конструкции. Проблемы устойчивости неконсервативных систем(стержней и пластин) со “следящими” силами возникают при проектировании конструкций в машиностроении, авиации, ракетной технике и т.д.. Большое количество работ относится к аэроупругости. Неконсервативные задачи возникают в теории двуногой ходьбы. Другим примером являются большие космические конструкции. Проблемы устойчивости неконсервативных задач со следящими силами нашли применение и в медицине. Важность задачи о действии следящей силы далеко не полностью определяется непосредственными практическими приложениями; эти задачи имеют и общеметодическое, эталонное значение.

Задачи об устойчивости неконсервативних упругих систем впервые рассмотрел Е. Л. Николаи. В одной из его работ, опубликованной впервые в 1928 г., исследуется устойчивость прямолинейной формы гибкого стержня, один конец которого защемлен, а другой (свободный) - нагружен сжимающей силой и скручивающим моментом. Было установлено, что в случае, когда вектор момента является «тангенциальным» (т. е. остается направленным по касательной к изогнутой оси стержня), не существует никаких иных форм равновесия, кроме прямолинейной. Отсюда Е. Л. Николаи сделал вывод, что обычный метод определения критической силы в данной задаче неприменим. Эту область в будущем развивали Бек М., Болотин В.В., Гроссман Е.П., Дейнеко К.С., Джанелидзе Г.Ю., Келдыш М.В., Копейкин Ю.Д., Кюснер Х., Лаврентьев М.А., Леонов М.Я., Моррис Дж., Пфлюгер А., Раушер М., Рейснер, Реут В.И., Теодорсен Т., Феодосьев В.И., Фрейзер Р.А., Циглер Г., Шашков И.Е и другие со своими задачами стержневых систем и пластин.

Многочисленные публикации посвящены задачам устойчивости неконсервативных систем со “следящей” нагрузкой, среди которых отметим работы Adali S, Elishakoff I. и Jacoby A., Gulkowski P.M.и Reisman H., Higuchi K и Dowell E.H., Hodges D.H., Katsikadelis J.T. and Kounadis A.N., Kim J.H. и Kim H.S., Langthjem M.A., Morgan M.R. и Sinha S.C., Ramasubramanian M. K., Sugiyama Y., Агафонова С.А., Губанова И.И.,Каленова В.И., Кириллова О.Н., Морозов В.М, Пановко Я.Г.,

© National Library of Armenia

Сейраняна А.П., Циглера Г. и других ученых.. Обзор почти всех исследований приводится в статье И. Елишакова. Отдельно следует отметить работы Армянской школы механиков Амбарцумяна С. А, Багдасаряна Г.Е., Белубекяна М.В, Казаряна К.Б., Мартиросяна С.Р., Минасяна М. М, Мовсисяна Л.А. по вопросам устойчивости неконсервативных систем.

Как известно, наибольший теоретический и практический интерес, и поныне, представляет своеобразное влияние диссипативных сил на устойчивость распределенных неконсервативных систем. И, особенно, расхождение между результатами, относящимися к системам с исчезающе малым затуханием и к системам, затухание в которых с самого начала предполагалось равным нулю. Одно из проявлений своеобразного влияния исчезающе малого трения на устойчивость неконсервативных систем – скачкообразное падение критической нагрузки и частоты. Это явление, получившее название «парадокс дестабилизации», впервые было отмечено Г. Циглером на примере двойного математического маятника, нагруженного на свободном конце “следящей” силой. Однако, несмотря на отдельные работы, систематического изучения эффекта дестабилизации в литературе нет. Общие свойства распределенных неконсервативных систем с диссипативными силами еще не изучены исчерпывающе. Поэтому имеет смысл дальнейшее рассмотрение таких модельных задач, в которых представление диссипативных сил наиболее корректно описывает реальную физическую модель.

Диссертационная работа в основном посвящена исследованию устойчивости стержней, с учетом различных видов трения, и пластин, сжатых “следящими” силами. Рассмотрение этих задач имеет важное прикладное и теоретическое значение. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а именно: статическую и динамическую неустойчивости или, в соответствии с новой терминалогией, дивергентную и флаттерную неустойчивости соответственно. Деформации, возникающие при флаттере, более опасны для конструкции, так как быстро приводят к потере прочности и развитию усталостных трещин.

Целью диссертационной работы является:

- Исследование влияния силы трения на устойчивость упруго закрепленного стержня, нагруженного на свободном конце следящей силой.
- Исследование устойчивости пластинки при различных способах закрепления и наличия сосредоточенных масс и инерционных моментов на ее кромках.

Методы исследования. В диссертации задачи устойчивости стержней и пластинок исследованы в рамках классической теории изгиба Кирхгофа. Использованы аналитические методы решения, а также компьютерное моделирование.

© National Library of Armenia

Научная новизна. В работе выполнено теоретическое исследование задачи устойчивости упруго закрепленного стержня, нагруженного на свободном конце следящей силой, с учетом различных видов трения. Здесь диссипативные силы введены в граничных условиях чтобы было проще решать задачи (этот подход используется и у Болотина В.В. и Ржаницына А.Р.).

А также, установлено, что для пластинок сжатыми "следящими" силами есть потеря устойчивости дивергентного типа.

Практическая ценность. Результаты, полученные в работе, могут найти применение в решении новых задач устойчивости стержней и пластин. А также, могут быть использованы для конструирования стабилизаторов, предотвращающих флаттер элементов упругих конструкций мостов и разных инженерных сооружении.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались:

- на семинарах «Волновые процессы» Института Механики НАН РА (2009-2014г.).
- на международной конференции, посвященной 100-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна, (2012 Цахкадзор, Армения)
- на международной школе-конференции молодых ученых, посвященной 70-летию Национальной Академии Наук Армении, (2013, Цахкадзор, Армения)
- на семинаре отделения «Динамика деформируемых систем и связанных полей» Института Механики НАН РА (2014г.)
- на общем семинаре Института Механики НАН Армении(2014г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 научных работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы(94 наименования). Общий объем работы составляет 137 страниц печатного текста, включая 6 таблиц и 200 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность рассматриваемой задачи, дается обзор литературы по диссертации, формулируется цель работы, в сжатом виде излагается содержание всех глав.

В первой главе приводятся основные уравнения и соотношения теории изгиба и устойчивости стержней и пластин.

Во второй главе рассматриваются задачи устойчивости вертикального стержня, конец $x=0$ которого имеет упругое закрепление, и на этом конце действуют различные вид силы внешнего конструкционного трения с коэффициентами ξ_1, ξ_2 .

© National Library of Armenia

На другом, свободном, конце $x = l$ стержня приложены следящая сжимающая нагрузка P, сосредоточенная масса M_c и сосредоточенный инерционный момент I_c (рис 1).

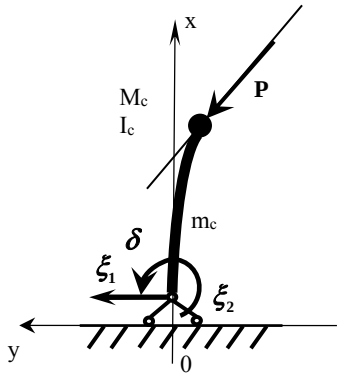


Рис. 1.

В предположении, что силы сопротивления пренебрежимо малы, уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

где где EJ - жесткость стержня при изгибе; $w = w(x,t)$ - прогиб в любой точке стержня; m_c - погонная масса стержня.

Граничные условия, соответственно, на упруго закрепленном конце $x = 0$ и на свободном конце $x = l$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x = 0: &\qquad w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - \delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \xi_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} + \xi_2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = 0 \\ x = l: &\qquad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_c\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad EJ\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = M_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \qquad (2)$$

где δ - коэффициент, характеризующий упругие свойства опоры; ξ_1, ξ_2 - коэффициенты, характеризующие вязкоупругие свойства в опоре.

ξ_1 -характеризует сопротивление, обусловленное перерезывающими силами;

ξ_2 - характеризует сопротивление относительно вращения.

В параграфе 1 главы 2 установлены знаки коэффициентов внешнего конструкционного трения поставленной модельной задачи:

$$\xi_1 \in R_n$$
$$\xi_2 > 0$$

где R_n обозначает действительные числа.

© National Library of Armenia

В параграфах 2 и 3 главы 2 задачи решаются динамическим методом. В параграфе 2 задача решается по подходам Болотина В.В. и Ржаницына А.Р., где собственная масса пластинки считается пренебрежимо малой ($m_c = 0$) сравнительно с сосредоточенной массой и/или инерционного момента(M_c, I_c), а в параграфе 3 собственная масса пластинки учитывается.

Отыскивая решение задачи устойчивости (1), (2) в виде гармонических колебаний

$$w(z,\mathrm{t}) = f(z)e^{\lambda t}, \quad z = \frac{x}{l} \text{ (в параграфе 2)}$$

$$w(z,\mathrm{t}) = f(z)e^{i\omega t}, \quad z = \frac{x}{l} \text{ (в параграфе 3)}$$

приходим к задаче на собственные значения.

Общее решение уравнения (1) имеют вид, соответственно, в случаях $m_c = 0$ и $m_c \neq 0$:

$$f(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sin(rz) + C_4 \cos(rz) \quad \text{(в параграфе 2)}$$

$$f(z) = C_1 \sin(r_1 z) + C_2 \cos(r_1 z) + C_3 sh(r_2 z) + C_4 ch(r_2 z) \quad \text{(в параграфе 3)}$$

где $r = \sqrt{\beta}$; $r_{1,2}^2 = \dfrac{\pm\beta + \sqrt{\beta^2 + 4m\omega^2}}{2}$,

учитывая $\beta = \dfrac{P}{EJ}l^2$, $m = \dfrac{m_c}{EJ}l^4$ безразмерные параметры.

Из решения задачи на собственные значения получаем следующие характеристические уравнения при $m_c = 0$ и $m_c \neq 0$ соответственно:

$$a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0 \qquad (3)$$

где

$$a_0 = -IM\left(-\left(r^2\xi_1 - 2\xi_2\right)(-1+\cos r) + r\left(-r^2\xi_1 + \xi_2\right)\sin r\right)$$

$$a_1 = -IM\left(-2 + \left(2 + r^2\delta\right)\cos r - r\left(-1+\delta\right)\sin r\right)$$

$$a_2 = -r\left(Mr\left(-r^2\xi_1 + \xi_2\right)\cos r + \left(Ir^4\xi_1 - \left(M + Ir^2\right)\xi_2\right)\sin r\right)$$

$$a_3 = r\left(r\left(-M + Ir^2\delta\right)\cos r + \left(M + Ir^2 + Mr^2\delta\right)\sin r\right)$$

$$a_4 = \xi_2 r^4, \quad a_5 = r^4$$

© National Library of Armenia

$$
\begin{aligned}
&r_1 r_2\left(r_1^3\cos r_1 - M\omega^2\sin r_1\right)*\\
&\quad *\left(-Ir_1\delta\omega^2 chr_2 + i\left(-i + r_2^2\xi_1\omega + \xi_2\omega\right)\left(r_1\cos r_1 - I\omega^2\sin r_1\right) + r_1 r_2\delta shr_2\right) +\\
&+r_1^2\left(r_1\left(1-\omega\left(ir_1^2\xi_1 - i\xi_2 + I\delta\omega\right)\right)\cos r_1 - \left(r_1^2\delta + I\omega^2 + iI\left(-r_1^2\xi_1 + \xi_2\right)\omega^3\right)\sin r_1\right)*\\
&\quad *\left(r_2^3 chr_2 + M\omega^2 shr_2\right) +\\
&+r_1 r_2\left(M\omega^2\cos r_1 + r_1^3\sin r_1\right)*\\
&\quad *\left(\left(1 + i\left(r_2^2\xi_1 + \xi_2\right)\omega\right)\left(I\omega^2\cos r_1 + r_1\sin r_1\right) + i\left(i + r_1^2\xi_1\omega - \xi_2\omega\right)\left(I\omega^2 chr_2 - r_2 shr_2\right)\right) -\\
&-r_1 r_2\left(M\omega^2 chr_2 + r_2^3 shr_2\right)*\\
&\quad *\left(\left(1 + i\left(r_2^2\xi_1 + \xi_2\right)\omega\right)\left(I\omega^2\cos r_1 + r_1\sin r_1\right) + i\left(i + r_1^2\xi_1\omega - \xi_2\omega\right)\left(I\omega^2 chr_2 - r_2 shr_2\right)\right) -\\
&-r_2^2\left(M\omega^2\sin r_1 - r_1^3\cos r_1\right)*\\
&\quad *\left(r_2\delta\left(-I\omega^2 chr_2 + r_2 shr_2\right) + \left(1 + i\left(r_2^2\xi_1 + \xi_2\right)\omega\right)\left(-I\omega^2 shr_2 + r_2 chr_2\right)\right) +\\
&+r_1 r_2\left(M\omega^2\,\mathrm{s}\,hr_2 + r_2^3\,\mathrm{c}\,hr_2\right)*\\
&\quad *\left(-r_2\delta\left(I\omega^2\cos r_1 + r_1\sin r_1\right) + i\left(i + r_1^2\xi_1\omega - \xi_2\omega\right)\left(I\omega^2 shr_2 - r_2 chr_2\right)\right) = 0
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

где $I = \dfrac{I_c}{EJ}l,\ M = \dfrac{M_c}{EJ}l^3,\ \delta = \dfrac{\delta}{l},\ \xi_2 = \dfrac{\xi_2}{l^2}$ -безразмерные параметры.

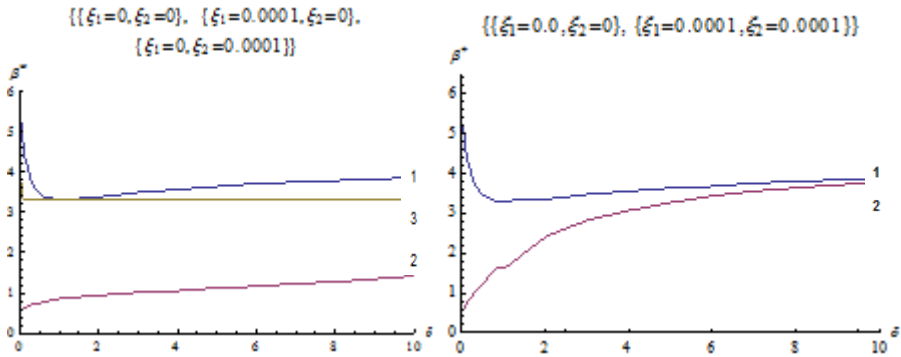
Из исследования поведения корней уравнений (3) и (4) приходим к следующим выводам:

1) Силы трения, характеризующиеся коэффициентами ξ_1, ξ_2, имеют дестабилизирующий эффект на неконсервативную систему (1), (2).
2) При $\delta = 0$, силы трения, характеризующиеся коэффициентом ξ_2, не влияют на критическую силу устойчивости.

На фигурах 1-4 представлены графики зависимости величины следящей критической силы β^* от параметров $M, I, \xi_1, \xi_2, \delta$, при различных значениях $M, I, \xi_1, \xi_2, \delta$, приводящие к флаттерной неустойчивости, которые были получены из графочисленного решения многопараметрического трансцендентного уравнения (3). В таблице 1 приведены некоторые численные результаты параметра критической силы при различных значениях ξ_1, ξ_2 и δ, когда $M = 0, I = 0, m = 1$.

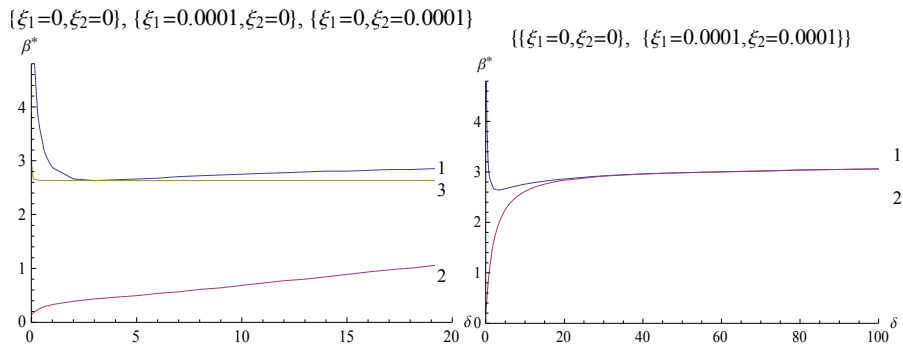
© National Library of Armenia

При $M > 0, I > 0$:



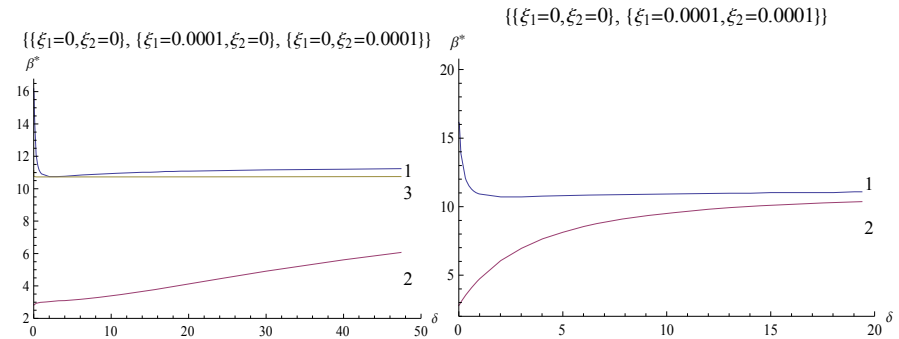
Фиг. 1 ($M = 1, I = 1, m = 1$)

При $M = 0, I > 0$:



Фиг. 2 ($M = 0, I = 1, m = 1$)

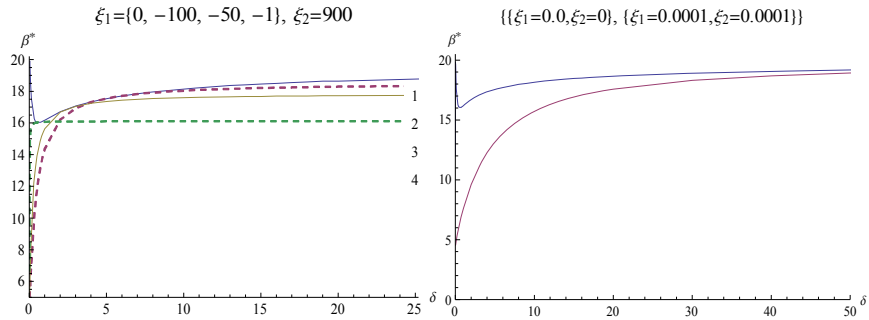
При $M > 0, I = 0$:



Фиг. 3($M = 1, I = 0, m = 1$)

© National Library of Armenia

При $M = 0, I = 0$:



Фиг. 4 ($M = 0, I = 0, m = 1$)

Таблица 1.

$m=1, M=0, I=0$		$\delta = 0$	$\delta = 0.001$
$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0$	β^*	**20.0509**	**12.0069**
$\xi_1 \neq 0,\ \xi_2 = 0$	ξ_1	-0.0001	
	β^*	**4.5342**	**4.5371**
$\xi_1 = 0,\ \xi_2 \neq 0$	ξ_2	0.0001	
	β^*	**20.0509**	**11.9975**
$\xi_1 \neq 0,\ \xi_2 \neq 0$	ξ_1	-0.0001	
	ξ_2	0.1	
	β^*	**4.5343**	**6.7824**

В третьей главе рассмотрены задачи устойчивости прямоугольных пластин, когда на них действует “следящая” сжимающая нагрузка и на сторонах пластинки задаются различные варианты граничных условий. А также рассмотрена задача устойчивости пластинки за пределами упругости, сжатой консервативными силами.

Для решения задачи используется динамический метод. Некоторые задачи решаются и по подходам Болотина В.В. и Ржаницына А.Р., где собственная масса пластинки считается пренебрежимо малой сравнительно с сосредоточенной массой и/или инерционным моментом. Найдены критические значения сил(флаттерной и/или дивергентной), при которых пластинка теряет устойчивость. Почти во всех

© National Library of Armenia

задачах сделаны сравнения значений критических сил для консервативных и неконсервативных систем.

В параграфе 1 главы 3 рассмотрена задача устойчивости возмущенного движения прямоугольной пластинки, два противоположных края которой шарнирно оперты, на свободной кромке $x=\frac{1}{2}a$ действует P "следящая" (неконсервативная) нагрузка, а на $x=-\frac{1}{2}a$ - P "мертвая" (консервативная) нагрузка. Пластинка занимает область $-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2},\ 0\le y\le b, -h\le z\le h$ (рис. 2).

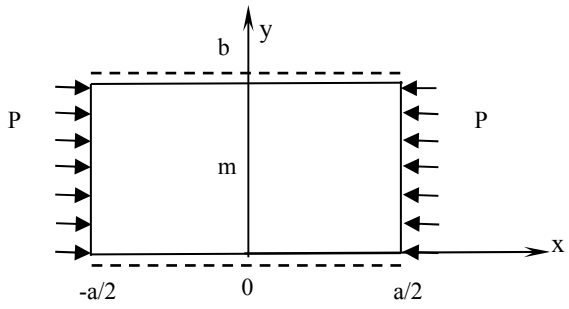


Рис. 2

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки по теории Кирхгофа имеет вид

$$D\Delta^2 w+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (5)$$

где D -изгибная жесткость пластинки, ρ -плотность материала, E -модуль Юнга, $w=w(x,y,t)$ -динамический прогиб в каждой точке пластинки.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид

$$\begin{aligned} &x=-\frac{a}{2}: \quad M_1=0, \quad \tilde{N}_1=P\frac{\partial w}{\partial x}\\ &x=\frac{a}{2}: \quad M_1=0, \quad \tilde{N}_1=0\\ &y=0,b: \quad w=0, \quad M_2=0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Решение уравнения (5), удовлетворяющее граничным условиям (6), представляется в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)\sin(n\pi\eta)*e^{i\omega t} \quad n=1,2... \quad \xi=\frac{x}{a};\ \eta=\frac{y}{b} \qquad (7)$$

© National Library of Armenia

Подстановка (7) в (5) приводит задаче на собственные значения, общее решение которой имеет вид

$$f_n(\xi) = C_{1n}\,\mathrm{sh}(r_1\xi) + C_{2n}\mathrm{ch}(r_1\xi) + C_{3n}\mathrm{sh}(r_2\xi) + C_{4n}\mathrm{ch}(r_2\xi)$$

где $r_i = \sqrt{\dfrac{-\left(\tilde{P} - 2\lambda_n^2\right) \pm \sqrt{\left(\tilde{P} - 2\lambda_n^2\right)^2 - 4\left(\lambda_n^4 - m\omega^2\right)}}{2}}$ $\quad i = 1,\ 2\,.$

Из решения задачи на собственные значения получаем следующе характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
&\Delta(\omega, \tilde{P}) = r_1 r_2 \left(2k^2 + \tilde{P}r_1^2 + \left(\tilde{P} + 2r_1^2\right)r_2^2 - 2k\left(\tilde{P} + r_1^2 + r_2^2\right)\right) * \\
&*\left(r_2^2 - \nu\lambda^2\right)\left(1 - \mathrm{ch}(r_1)\mathrm{ch}(r_2)\right) + \\
&+\Big(k\left(k - \tilde{P}\right)r_1^4 r_2^2 + r_1^2\left(k^2 + 2\tilde{P}r_1^2 + r_1^4 - k\left(\tilde{P} + 4r_1^2\right)\right)r_2^4 + r_1^4 r_2^6 - \\
&\quad - 2r_1^2 r_2^2\left(2k^2 + r_1^4 + r_2^4 + \tilde{P}\left(r_1^2 + r_2^2\right) - 2k\left(\tilde{P} + r_1^2 + r_2^2\right)\right)\nu\lambda^2 + \\
&\quad + \left(r_1^6 + r_2^6 + k^2\left(r_1^2 + r_2^2\right) + \tilde{P}\left(r_1^4 + r_2^4\right) - \right. \\
&\quad \left. - k\left(\tilde{P}\left(r_1^2 + r_2^2\right) + 2\left(r_1^4 + r_2^4\right)\right)\right)\nu^2\lambda^4\Big)\mathrm{sh}(r_1)\mathrm{sh}(r_2)
\end{aligned} \qquad (8)$$

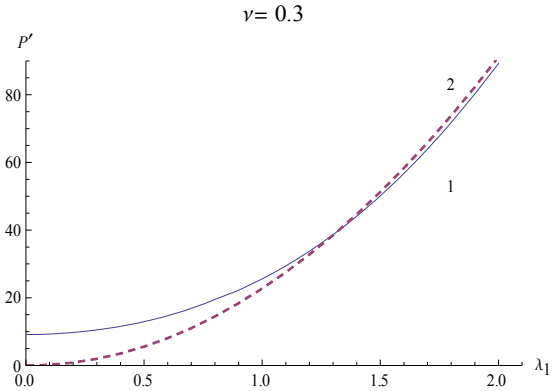
учитывая $\lambda_n = \dfrac{a}{b}\pi n;\ \tilde{P} = a^2\dfrac{P}{D};\ m = 2\dfrac{\rho h}{D}a^4$ безразмерные параметры.

Из исследования поведения корней многопараметрического характеристического уравнения (8) установлено, что в интервале $\lambda_1\pi^{-1} \in (0,\ 2)$ имеем и флаттерную и дивергентную неустойчивости. А также проведено сопоставление значений критических сил для консервативных и неконсервативных систем.

На фиг. 10 представлены график(2) зависимости величины параметра дивергентной критической силы $\tilde{P}$ от параметра $\lambda_n\pi^{-1}$ ($n = 1,\ \nu = 0.3$), численные значения которого были получены из решения трансцендентного уравнения (2.1.11) и график(1) зависимости величины дивергентной критической силы $\tilde{P}$ от параметра $\lambda_n\pi^{-1}$ ($n = 1,\ \nu = 0.3$), когда на обеих свободных сторонах пластинки действующие силы "мертвые".

В таблице 2 приведены некоторые численные результаты параметров дивергентных критических сил для консервативной и неконсервативной системы.

© National Library of Armenia



Фиг. 10($m=1$).

Таблица 2.

$\frac{\lambda_1}{\pi}(\nu=0.3)$	0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	0.6	0.8	1.0	1.1	1.2	1.3
Консервативная система	9.137	9.138	9.173	9.285	12.952	14.7	19.52	25.59	29.432	33.78	38.65
Неконсервативная система	0.0006	0.002	0.0545	0.218	5.58	8.09	14.51	22.77	27.575	32.83	38.53

В параграфе 2 главы 3 рассмотрена задача устойчивости возмущенного движения прямоугольной пластинки, два противоположных края которой шарнирно оперты, на свободных сторонах действуют "следящие" нагрузки P , сосредоточенная масса M_c и сосредоточенный инерционный момент I_c. Пластинка занимает область $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2},\ 0 \le y \le b, -h \le z \le h$ (рис. 3).

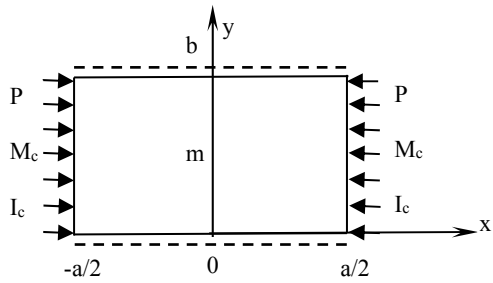


Рис. 3

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид

© National Library of Armenia

$$x=\pm\frac{a}{2}:\quad M_1=-\mathrm{I}_c\frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{t}^2},\qquad \widetilde{N}_1=M_c\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}^2}$$
$$y=0,b:\quad w=0,\quad M_2=0$$

или

$$x=\pm\frac{a}{2}:\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{\mathrm{I}_c}{D}\frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{t}^2},\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-v)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\frac{M_c}{D}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}^2}$$
$$y=0,b:\quad w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{9}$$

Для простоты, поскольку пластинка симметрична, решения по симметричной и антисимметричной формам потери устойчивости могут быть исследованы раздельно.

Из решения задачи на собственные значения получаем следующие характеристические уравнения в случае симметричного и анти-симметричного изгиба соответственно, учитывая, что $\lambda_{\mathrm{n}}=\frac{a}{b}\pi n;\ \tilde{P}=a^2\frac{P}{D};\ m=2\frac{\rho h}{D}a^4;\ I=\frac{\mathrm{I}_c}{D}a;$

$M=\frac{M_c}{D}a^3$ безразмерные параметры,

$$\Delta_{cim}\left(\omega,\tilde{P},\mathrm{I},\mathrm{M},\mathrm{m}\right)=\left(M\omega^2 ch\frac{r_1}{2}+r_1\left(-k+r_1^2\right)sh\frac{r_1}{2}\right)\left(\left(r_2^2-v\lambda^2\right)ch\frac{r_2}{2}-Ir_2\omega^2 sh\frac{r_2}{2}\right)-$$
$$-\left(M\omega^2 ch\frac{r_2}{2}+r_2\left(-k+r_2^2\right)sh\frac{r_2}{2}\right)\left(\left(r_1^2-v\lambda^2\right)ch\frac{r_1}{2}-Ir_1\omega^2 sh\frac{r_1}{2}\right)=0 \tag{10}$$

$$\Delta_{acim}\left(\omega,\tilde{P},\mathrm{I},\mathrm{M},\mathrm{m}\right)=\left(M\omega^2 sh\frac{r_1}{2}-r_1\left(k-r_1^2\right)ch\frac{r_1}{2}\right)\left(\left(r_2^2-v\lambda^2\right)sh\frac{r_2}{2}-Ir_2\omega^2 ch\frac{r_2}{2}\right)+$$
$$+\left(M\omega^2 sh\frac{r_2}{2}+r_2\left(-k+r_2^2\right)ch\frac{r_2}{2}\right)\left(\left(r_1^2-v\lambda^2\right)sh\frac{r_1}{2}-Ir_1\omega^2 ch\frac{r_1}{2}\right)=0 \tag{11}$$

Из графочисленного исследования поведения корней многопараметрических характеристических уравнений (10) и (11) приходим к выводам, что при $\mathrm{M}\neq 0,\ I\neq 0$ может возникать и флаттерная и дивергентная неустойчивость, а при $\mathrm{M}=0,\ I=0$ -только дивергентная. В интервале $\lambda_1\pi^{-1}\in(0.1,\ 2)$ дивергентная критическая сила больше флаттерной. А в интервале $\lambda_1\pi^{-1}\in(0,\ 2)$ дивергентная критическая сила сравнительно больше дивергентной критической силы консервативной системы (когда на обеих сторонах пластинки действует “мертвая” сила), при $\mathrm{M}=0,\ I=0$.

В параграфе 3 главы 3 рассмотрены задачи устойчивости упругих прямоугольных пластин, когда на одной из сторон, свободной от ограничений на перемещения и

© National Library of Armenia

углы поворота, действует "следящая" сжимающая нагрузка P, сосредоточенная масса M_c и сосредоточенный инерционный момент I_c. Одна кромка пластинки жестко защемлена, а на остальных сторонах задаются различные варианты граничных условий.Пластинки занимают область $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b, -h \le z \le h$ (рис. 4,5).

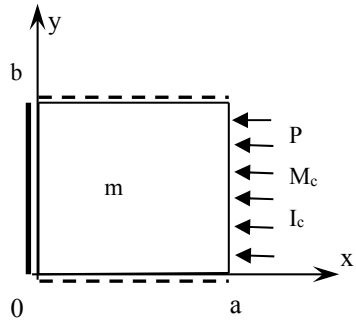


Рис. 4.

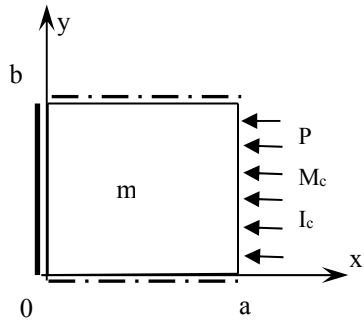


Рис. 5

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок $x = 0,\ x = a$ имеют вид

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ x = a: &\quad M_1 = -\mathrm{I}_c \frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{t}^2}, \quad N_1 = M_c \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}^2} \end{aligned} \tag{12}$$

В случае, когда на кромках пластинки $y = 0,\ y = b$ заданы условия скользящего контакта, граничные условия на этих кромках имеют вид

$$y = 0, b: \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0$$

В случае шарнирного закрепления

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad M_2 = 0$$

или

а) $y = 0, b: \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0$ (условия скользящего контакта) (13)

б) $y = 0, b: \quad w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ (*условия шарнирного закрепления*) (14)

Решение уравнения (5) представляется в виде

а) $$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi) \cos(n\pi\eta) * \mathrm{e}^{i\omega t} \quad n = 1, 2 \ldots \quad \xi = \frac{x}{a};\ \eta = \frac{y}{b} \tag{15}$$

© National Library of Armenia

б) $$w=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)\sin(n\pi\eta)*e^{i\omega t} \quad n=1,2... \quad \xi=\frac{x}{a};\ \eta=\frac{y}{b} \tag{16}$$

с тем, чтобы удовлетворить граничным условиям (13) и (14) соответственно.

Полученное характеристическое уравнение в обоих граничных случаях имеет вид:

$$\begin{aligned} &r_1r_2\left(\left(r_1^4+r_2^4\right)-k\left(r_1^2+r_2^2\right)-\nu\lambda^2\left(r_1^2+r_2^2-2k\right)+2IM\omega^4\right)+\\ &+r_1r_2\left(k\left(r_1^2+r_2^2\right)-2r_1^2r_2^2+\nu\lambda^2\left(r_1^2+r_2^2-2k\right)-2IM\omega^4\right)chr_1chr_2-\\ &-r_1\left(r_1^2-r_2^2\right)\left(M-Ir_2^2\right)\omega^2chr_1shr_2+r_2\left(r_1^2-r_2^2\right)\left(M-Ir_2^2\right)\omega^2shr_1chr_2+\\ &+\left(r_1^2r_2^2\left(r_1^2+r_2^2-2k\right)-\nu\lambda^2\left(r_1^4+r_2^4\right)+\left(k\nu\lambda^2+IM\omega^4\right)\left(r_1^2+r_2^2\right)\right)shr_1shr_2=0 \end{aligned} \tag{17}$$

Установлено, что в интервале $\lambda_1\pi^{-1}\in(0,\,2)$, при $m\neq 0,\ M=0,\ I=0$ имеем только флаттерную неустойчивость, и флаттерная критическая сила больше сравнительно с дивергентной критической силой консервативной системы.

В таблице 4 приведены некоторые численные результаты параметров критических сил для консервативной(дивергентная) и неконсервативной(флаттерная) системы.

Таблица 4

$\lambda_1\pi^{-1}$ $(\nu=0.3)$	0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	0.6	0.8	1.0	1.1	1.2	1.3
Консервативная система	2.4677	2.4686	2.498	2.59	6.48	8.74	15.16	23.61	28.4	33.6	39.1
Неконсервативная система	20.0516	20.0537	20.12	20.32	27.11	30.39	39.24	51.65	59.4	68.1	77.5

В параграфе 4 главы 3 исследована устойчивость несжимаемой прямоугольной пластины за пределами упругости, когда она сжата “мертвыми” силами по двум противоположным шарнирно опертым сторонам.

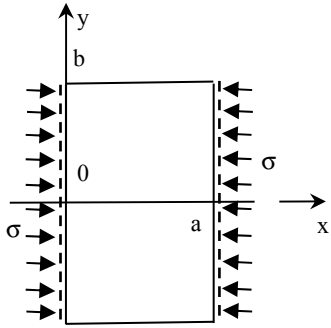


Рис. 6

Получено, что для удлиненной пластинки граничные условия на удаленном крае существенно влияют на устойчивость пластинки. Таким образом, получили еще один пример, аналогичный примеру, впервые описанному Ишлинским А.Ю.

© National Library of Armenia

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Рассмотрены задачи устойчивости вертикального стержня, когда один конец имеет упругое закрепление, а другой свободен и учитываются различные виды внешнего конструкционного трения, а на другом конце стержня приложена следящая сжимающая нагрузка.

- Установлены правильные знаки коэффициентов внешнего конструкционного трения поставленной модельной задачи.
- Получены характеристические уравнения задач устойчивости стержня, графочисленные исследование которых приводит к следующим выводам:

  -силы трения, характеризующиеся коэффициентом ξ_1 (характеризуют сопротивление, обусловленное перерезывающими силами), имеют дестабилизирующий эффект для упруго защемленного стержня.

  - силы трения для упруго защемленного стержня, характеризующиеся коэффициентом ξ_2 (характеризуют сопротивление относительно вращения), имеют дестабилизирующий эффект.

- силы трения, при $\delta = 0$, характеризующиеся коэффициентом ξ_2 (характеризуют сопротивление относительно момента), не влияют на устойчивост стержня.

2. Рассмотрена задача устойчивости прямоугольной пластинки, сжатой на одной кромке консервативной силой, на другой–неконсервативной, а на двух других противоположных краях заданы условия шарнирого закрепления. Получено характеристическое уравнение задачи, графочисленное исследование которого приводит к следующим выводам:

- Может возникать и флаттерная, и дивергентная неустойчивость, когда значение соотношения длин сторон $\lambda_1\pi^{-1}$ в интервале $(0, 2)$.
- Когда значение соотношения длин сторон $\lambda_1\pi^{-1}$ в интервале $(0, 1.5)$, дивергентная критическая сила больше флаттерной.
- Когда значение соотношения длин сторон $\lambda_1\pi^{-1}$ в интервале $(0, 1.3)$, дивергентная критическая сила сравнительно меньше дивергентной критической силы консервативной системы (когда на обеих сторонах пластинки действует “мертвая” сила).

3. Рассмотрена задача устойчивости прямоугольной пластинки, сжатой неконсервативными силами по двум противоположным свободным сторонам, на которых действуют сосредоточенная масса M и сосредоточенный инерционный момент I. На двух других противоположных краях пластинки заданы условия шарнирого закрепления. Установлено, что для данной задачи решения по

© National Library of Armenia

симметричной и антисимметричной формам потери устойчивости могут быть исследованы раздельно, что приводит к следующим выводам:

- Когда значение соотношения длин сторон $\lambda_1\pi^{-1}$ в интервале $(0, 2)$, при $\frac{\mathrm{M}}{I} \in [0.1, 10]$ может возникать и флаттерная и дивергентная неустойчивость.
- В интервале $\lambda_1\pi^{-1} \in (0.1, 2)$ дивергентная критическая сила больше флаттерной.
- В интервале $\lambda_1\pi^{-1} \in (0, 2)$ дивергентная критическая сила сравнительно больше дивергентной критической силы консервативной системы(когда на обеих сторонах пластинки действует “мертвая” сила), при $\mathrm{M} = 0, I = 0$.

4. Рассмотрена задача устойчивости прямоугольной пластинки, жестко защемленной на одной кромке и сжатой неконсервативной силой на противоположной свободной кромке. Две другие противоположные кромки шарнирно закреплены или даны условия скользящего контакта. Получено характеристическое уравнение задачи, графо-численное исследование которой приводит к выводам, что когда значение соотношения длин сторон $\lambda_1\pi^{-1}$ в интервале $(0, 2)$:

- имеем только флаттерную неустойчивость,
- критическая сила флаттерная неконсервативной системы больше дивергентной критической силой консервативной системы(когда действующая сила “мертвая”).

5. Исследована устойчивость несжимаемой прямоугольной пластины за пределами упругости, когда она сжата “мертвыми” силами по двум противоположным шарнирно опертым сторонам. Получено, что для удлиненной пластинки граничные условия на удаленном крае существенно влияют на устойчивость пластинки. Таким образом, получили еще один пример аналогичный примеру, впервые описанному Ишлинским А. Ю..

© National Library of Armenia

Список научных работ по теме диссертации

1. Погосян Д.М. Об одной неконсервативной задаче устойчивости сжатой прямоугольной пластинки.Механика 2009, Труды международной школы конференции молодых ученых, 28сентября–1октября2009,Агавнадзор, Армения - Ереван., изд-во ЕГУАС,2009, с. 289–291.

2. Погосян Д.М. Об одном предельном переходе в теории устойчивости прямоугольных пластин за пределами упругости. Актуальные проблемы механики сплошной среды:Труды II международной конференции 4-8 октября, Дилижан, Армения.-Ер.: ЕГУАС, 2010. т.2 с. 95-98.

3. Погосян Д.М. Влияние диссипации на поперечные колебания вертикального стержня под воздействием следящей нагрузки, Проблемы динамикивзаимодействия деформируемых сред: Труды VI международной конференции, сентябрь 19-23 Горис-Степанакерт, 2011, Армения - Ереван, изд-во ЕГУАС, 2011, с.244–246.

4. Погосян Д.М. Об одной задаче устойчивости сжатой прямоугольной пластинки.Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды международной конференции, посвящённой 100-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна, 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения - Ереван, изд-во ЕГУАС, 2012, т.2. с.144–148.

5. Погосян Д.М. Влияние диссипации на поперечные колебания вертикального стержня под воздействием следящей нагрузки при «упругом закреплении».Механика 2013, труды международной школы-конференции молодых ученых, посвященной 70-летию Национальной Академии Наук Армении, 1-4 октября 2013, Цахкадзор, Армения.-Ер.: ЕГУАС, 2013, с. 200-203.

6. Погосян Д.М. Неконсервативная задача устойчивости сжатой прямоугольной пластинки. Изв. НАН Армении, Механика, 2013, т 66, №2, с. 40-48.

© National Library of Armenia

Ամփոփում

Ատենախոսությունում ուսումնասիրված են հետևող ուժերով սեղմված ուղղահայաց ձողի և ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրները: Աշխատանքում խնդիրն ուսումնասիրված են դինամիկ մեթոդով, որոշներն էլ լուծված են նաև Վ.Վ. Բոլոտինի և Ա.Ռ. Ռժանիցինի մոտեցումներով:

Դիտարկված է մի կողմն առաձգական ամրացված, հետևող ուժով սեղմված ուղղահայաց ձողի կայունությունը, երբ հաշվվի է առնվում արտաքին կառուցվածքային շփման ուժերը(կտրող ուժով և պտույտով պայմանավորված): Ձողի վրա կան կիրառված նաև կենտրոնացված զանգված և կենտրոնացված իներցիոն մոմենտ: Ստացված է կայունության՝ մի քանի պարամետրներից կախված, տրանսցենդենտ բնութագրիչ հավասարումը, որոշված են կայունության կրիտիկական ուժերը՝ կախված կենտրոնացված զանգվածի, կենտրոնացված իներցիոն մոմենտի, շփման ուժերի և առաձգականության գործակիցներից: Ստացվել է որ երբ ձողը առաձգական է ամրակցված, արտաքին կառուցվածքային շփման ուժերը համակարգի վրա թողնում են դեստաբիլիզացնող ազդեցություն:

Երկու հանդիպակաց կողմերով հոդակապորեն ամրացված, իսկ մյուս ազատ եզրերերից մեկով հետևող, մյուսով՝ ոչ հետևող ուժով սեղմված սալի համար ստացված են և՛ դիվերգենտ, և՛ ֆլատերային կրիտիկական ուժեր՝ կախված սալի երկրաչափական չափերից, ինչպես նաև կատարված է համեմատություն կոնսերվատիվ խնդրի հետ:

Երկու հանդիպակաց կողմերով հոդակապորեն ամրացված, իսկ մյուս երկու ազատ եզրերերում հետևող ուժով սեղմված սալի համար ցույց է տրված, որ խնդիրը տրոհվում է սիմետրիկ և շեղ-սիմետրիկ խնդիրների: Ստացված են միայն դիվերգենտ կրիտիկական ուժեր՝ կախված սալի երկրաչափական չափերից: Ուսումնասիրված է նաև այն դեպքը, երբ սալի ազատ եզրերում կիրառված են կենտրոնացված զանգված և կենտրոնացված իներցիոն մոմենտ, իսկ այս դեպքի համար ստացված են և՛ դիվերգենտ, և՛ ֆլատերային կրիտիկական ուժեր՝ կախված սալի երկրաչափական չափերից, կենտրոնացված զանգվածը և կենտրոնացված իներցիոն մոմենտը բնութագրող պարամետրից:

Ուսումնասիրված է մի եզրը՝ կոշտ ամրացված, իսկ հանդիպակաց ազատ եզրում հետևող ուժով, կենտրոնացված զանգվածով և կենտրոնացված իներցիոն մոմենտով սեղմված սալի կայունությունը, երբ սալի մյուս ազատ եզրերին տրված են տարբեր եզրային պայմաններ՝ հոդակապորեն ամրակցման կամ սահող կոնտակտի: Այս խնդրի համար ուսումնասիրվել է և՛ դիվերգենտ, և՛ ֆլատերային անկայունությունը, ստացված են միայն ֆլատերային կրիտիկական ուժեր՝

© National Library of Armenia

կախված սալի երկրաչափական չափերից, կենտրոնացված զանգվածը և կենտրոնացված իներցիոն մոմենտը բնութագրող պարամետրից:

Դիտարկված է երկու հանդիպակաց եզրերով հոդակապորեն ամրացված և ոչ հետևող ուժերով սեղմված սալի կայունության խնդիրը պլաստիկ դրվածքով, և ստացված է, որ «երկար սալի» համար եզրային պայմանների ազդեցությունը հեռավոր եզրում նկատելի է սալի ընդհանուր կայունության վարքի մեջ, այսպիսով ստացված է Իշլինսկու հայտնի առաձգական սալի խնդրին նմանօրինակ ևս մեկ արդյունք:

© National Library of Armenia

Diana Poghosyan

PROBLEMS OF STABILITY OF BEAMS AND PLATES COMPRESSED BY FOLLOWER FORCES

ABSTRACT

Stability problems of vertical beam and rectangular plates compressed by a follower forces have been considered in this work. All the problems are investigated by using a dynamic method, some of them are also solved by the approaches of Bolotin V.V. and Rzhanitsyn A.R..

Buckling of elastically supported vertical beam, under follower load, concentrated mass and moment of inertia at the free end, is investigated. On the elastically supported end of the beam, different types of external structural frictions(due to rotation and cutting forces) are taken into account. From the obtained characteristic multiparameter, transcendental equation critical loads are investigated numerically, depending on the parameters of friction loads, concentrated mass, moment of inertia and elasticity coefficients. The observations show that the frictions have a destabilizing effect on the system.

Buckling of rectangular plate, having two opposite edges simply supported, while one of the free edges compressed by a follower force, other- by non follower, is considered. The divergence and flutter critical forces, depending on the plate geometry, were obtained. Critical loads have been compared with the conservative problem.

The problem of the stability of rectangular plate, compressed by follower forces on its two opposite free edges, and simply supported on its other edges, has been investigated. It has been established that for a given problem the symmetric and antisymmetric buckling modes can be investigated separately. The divergence and flutter instability were observed. Only divergence critical forces depending on plate geometry are obtained. Also, the case when considered concentrated mass and moment of inertia on the free edges had been investigated. In this case, divergence and flutter critical forces depending on the parameters of concentrated mass, moment and plate geometrically are obtained. The parameters of critical forces are compared with the values of critical forces of conservative problem.

Buckling of rectangular plate, fixed supported on one edge and compressed by follower force on the opposite free edge, is considered. The plate's other two opposite edges are simply supported or sliding contact conditions are given. The divergence and flutter instability had been investigated and only flutter critical forces depending on the plate geometry were obtained. Also the case when considered concentrated mass and moment of inertia on the free edges had been observed. In this case, divergence and

© National Library of Armenia

flutter critical forces depending on the parameters of concentrated mass, moment and plate geometry are obtained. The results are compared with conservative problem.

In the plastic stability problem of rectangular plate having two opposite edges simply supported and compressed by non follower forces it is established that for elongated plate, the influence of major boundary conditions at the far edges affects the global state of buckling of the plate. Thus, this case provides one more example similar to the counter-example described by Ishlinski.

© National Library of Armenia