ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Բնագրի իրավունքով
ՈՒԴԿ. 539.3:519.64

Դարբինյան Կարապետ Սուրենի

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Մասնագիտություն Ե.13.05
Հաշվողական տեխնիկայի և մաթեմատիկական մեթոդների
կիրառությունը գիտական հետազոտություններում

Ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության
Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

Երևան - 1996

---

*ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ*

На правах рукописи
УДК 539.3:519.64

Дарбинян Карапет Суренович

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Специальность Е.13.05
*Применение вычислительной техники и математических
методов в научных исследованиях*

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
*диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*
Ереван - 1996

Работа выполнена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель академик Национальной АН РА, доктор физико-математических наук, профессор НЕРСЕСЯН А.Б.

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук, профессор ГАБРИЕЛЯН М.С.

кандидат физико-математических наук, с.н.с. МАРАНДЖЯН Г.Б.

Ведущая организация Институт механики Национальной АН РА

Защита состоится "10 мая 1996 г. в "11" часов на заседании специализированного совета 037 "Математическая кибернетика и информатика" в институте проблем информатики и автоматизации Национальной АН РА по адресу: 375044, г. Ереван, ул. П. Севака 1.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке института.

Автореферат разослан "9" апреля 1996 г.

Ученый секретарь специализированного совета, к.э.н., с.н.с. МЕЛКОНЯН А.Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Решение нелинейных интегральных уравнений является сложной задачей вычислительной математики, что обусловлено трудностями как принципиального, так и вычислительного характера. Такие уравнения встречаются при решении многих задач механики, физики, астрономии и других прикладных областей. В частности, они возникают в одном из разделов механики твердого тела - электромагнитоупругости, предметом которой является изучение взаимодействия внешних электромагнитных полей с деформируемыми сплошными средами. В магнитоупругости важное место занимают вопросы, относящиеся к поведению упругих сверхпроводников в магнитном поле. Свойства, которыми обладает сверхпроводящее тело в магнитном поле, широко применяются в различных областях науки и техники. Применение сверхпроводников в конструировании магнитов наиболее близко природе сверхпроводимости. В настоящее время проектируются и уже работают сверхпроводящие магниты практически любых размеров и любой формы. Сегодня их проектируют уже для управляемой термоядерной реакции, для сверхпроводящих моторов мощностью в несколько тысяч киловатт, для накопителей энергии и для магнитной подвески поездов. Изучается возможность применения сверхпроводящих кабелей для передачи энергии. С помощью сверхпроводимости стало возможным повысить чувствительность измерительной техники на несколько порядков по сравнению с чувствительностью обычных схем, состоящих из нормальных металлов. Сверхпроводящие переключающие элементы при определенных условиях могут оказаться наиболее приемлемыми для создания электронно-вычислительных машин.[1]

В настоящее время большинство из существующих работ основано на использовании линеаризованных уравнений магнитоупругости для пластин и оболочек, находящихся в магнитном поле. Одна из таких задач в линейной постановке была решена приближенно аналитическим методом (методом Галеркина)[2]. Однако, из за возникающих

[1] Буккель В. Сверхпроводимость. М.-Мир, 1975 -366с.

[2] Багдасарян Г.Е., Пилипосян Г.Т. Изгиб и колебание параллельных сверхпроводящих пластин в продольном магнитном поле. Изв.АН Арм.ССР. Механика, 1990, т.43, №5, с.3-9.

механических напряжений, которые превосходят предел упругости материала пластинки, линейный подход к решению задачи становится невозможным. Поэтому задача представляется более общей и значительно интересней в нелинейной постановке[3].

Из-за невозможности точного (аналитического) решения нелинейных интегральных уравнений разработка эффективных численных методов, специально предназначенных для решения таких уравнений, становится необходимой. Задача особенно усложняется, если входящие в нелинейные уравнения функции имеют особенности. В таких случаях приходится использовать специальные подходы, -для обеспечения точности приближенного (компьютерного) решения и его устойчивого вычисления.

Нелинейные интегральные уравнения можно решить методом Ньютона-Канторовича[4]. Можно сказать, что этот метод является не только универсальным, но и, по сути, единственным при решении таких уравнений. При определенных ограничениях, налагаемых на ядро уравнения и его первую и вторую производные, этот метод обеспечивает сходимость алгоритма, существование и единственность решения нелинейного уравнения.

В данной работе предложен и апробирован численный алгоритм решения одной из задач электромагнитоупругости.

Цель работы. Разрабока алгоритма решения задачи магнитоупругости и его программная реализация. Широкомасштабный численный эксперимент.

Методы исследования. Теоретической и практической основой работы являются подходы работ[5,6]. Алгоритмы принадлежат к рекуррентному

---

[3] Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А., Нелинейные колебания пластин в продольном магнитном поле.-Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т.28б с. 3-19.

[4] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения. методы, алгоритмы, программы. Киев, "Наукова Думка" 1986.

[5] Нерсесян А.Б. Новые алгоритмы численного решения интегральных уравнения второго рода.ДАН Арм.ССР, 89, №4, 1989, 171-176.

[6] Багдасарян Г.Е., Пилипосян Г.Т. Изгиб и колебание параллельных сверхпроводящих пластин в продольном магнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т. 43, №5, с. 3-9.

типу и строятся на основе квадратурных формул. Широко использовались возможности компьютера типа IBM PC 486 для произведения всесторонних численных экспериментов на тестовых уравнениях, моделирующих возникающие в прикладных задачах уравнения.

Научная новизна. Краевая задача для нелинейного интегро - дифференциального уравнения магнитоупругости сведена к интегральному уравнению и эффективно решена. Предложена также модификация метода Ньютона-Канторовича для нелинейного интегрального уравнения.

Практическая ценность. Разработанные в работе методы, алгоритмы и программы могут быть использованы при научных исследованиях в следующих областях:

а) В задачах статической и динамической устойчивости, магнитоупругих колебаний сверхпроводящих пластин и оболочек.

б) при исследовании поведения движения деформируемых и абсолютно твердых тел, когда тело обтекается сверхзвуковым потоком идеального газа (или жидкости)[7].

в) при исследовании вопросов колебаний и устойчивости, когда упругая пластинка имеет более сложные физические свойства по сравнению со сверхпроводниками, рассматриваемыми в диссертации (конечные проводники, ферромагнитные материалы[8], электро и магнитострикционные материалы и.т.д.).

г) при исследовании деформационно-напряженных состояний упругих тел,содержащих трещины,вкладыши и дефекты других типов

На защиту выносятся следующие положения:

1.Получение уравнения, описывающего деформационно-напряженное состояние упругой пластинки под действием магнитного поля и сведения его к интегральному уравнению.

2. Теоретическая и программная разработки алгоритма решения интегрального уравнения.

3. Численный эксперимент, содержащий решение тестовых уравнений для широкого спектра параметров, характеризующих

---

[7] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. -М.Физматгиз, 1961, с. 339.

[8] Ахиезер А.И., Барьяхтер В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны.-М., Наука, 1967. -468. ст.22.

толщину пластинки и напряженность магнитного поля.

4. Сравнение теоретических предположений и полученных численных результатов.

5. Разработка альтернативного подхода для решения нелинейных интегральных уравнений. Сравнительный анализ результатов эксперимента с результатами вычислений по стандартным программам.

Апробация работы. Основные результаты диссертации доложены в Институте математики АН Армении и в Ереванском государственном университете.

Публикации. По теме диссертации опубликованы две работы.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, шести параграфов, приложения, списка цитируемой литературы (33 наименования). Общий объем работы 67 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый параграф посвящен математическому моделированию одного класса нелинейных задач, связанных с взаимодействием сверхпроводящих упругих пластин и магнитных полей и разработке численных методов решения соответствующих краевых задач для дифференциальных уравнений. В основе моделирования лежат сверхпроводимость упругого тела (магнитные силовые линии не проникают в сверхпроводник) и гипотеза Кирхгофа (гипотеза недеформируемых нормалей), приемлемость которых обусловлена тонкостью пластинки. Исходя из этой гипотезы, с использованием основных положений теории гибких пластин, исследование деформационно-напряженного состояния гибких сверхпроводящих пластин, изгибающихся под действием магнитного поля, приведено к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным ядром. Условия закрепления краев пластинки классические.

Во втором параграфе полученная краевая задача сведена к следующему интегральному уравнению:

$$U(x)=\alpha_1\int_{-1}^{1} E_1(x,t)U(t)dt+\alpha_2\int_{-1}^{1}E_2(x,t)U(t)dt+\alpha_3\left\{\int_{-1}^{1}E_1(x,t)U(t)dt\times\right.$$

$$\times\left[-\frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} E_3(x,t)U(t)dt\right)^2+\alpha_4\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} E_3(s,t)U(t)dt\right)^2 ds-\right.$$

$$\left.-\alpha_5\int_{-1}^{1} E_4(x,t)U(t)dt+\frac{\alpha_5}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} E_4(s,t)U(t)dt\right)ds\right]-$$

$$\left.-\alpha_5\left(\int_{-1}^{1} E_3(x,t)U(t)dt\right)^2\right\}+f\equiv\int_{-1}^{1} A(x,t,U)dt+f\,, \qquad (1)$$

где ядра $E_i(x,t)$ $(i=1..4)$ - определенные функции двух переменных, α_i $(i=1..5)$ - известные постоянные, f - свободный член, $U(x)=d^4W(x)/dx^4$ неизвестная функция интегрального уравнения. $W(x)$ - прогиб пластинки (неизвестная функция интегро-дифференциального уравнения).

В данном случае основной проблемой является выбор достаточно точного приближенного метода, приводящего к эффективному численному алгоритму. Полученное уравнение решается численным способом, в основе которого лежит метод Ньютона-Канторовича. Приходится применять квадратурные формулы на одной и той же сети как к обычным, так и к несобственным интегралам. В основу этих подходов положена квадратурная формула Симпсона. Другой трудностью (обычной для нелинейных уравнений) является выбор начального приближения, обеспечивающий выход на нужное решение. Здесь применена идея, связанная с плавным изменением параметра (в данном случае это либо толщина пластинки, либо напряжение магнитного поля). Именно, достаточно точно решив задачу при благоприятных для устойчивых вычислений значениях параметра (небольшая средняя толщина пластинки или низкое напряжение магнитного поля), для несколько измененного параметра полученное ранее решение берется в качестве начального.

Понятно, что чем больше N (количество точек разбиения отрезка [-1,1]), тем точнее численное решение. В данном случае удается добиться удвоения максимального N. Этот путь основан на замечании, что ее решение $W(x)$ является четной функцией, а значит четной функцией является и $U(x)=d^4W/dx^4$. Если учесть это обстоятельство, то можно преобразовать описанную схему так, чтобы на каждом шаге итерации иметь дело с $(N\times N)$ матрицами вместо $(2N \times 2N)$-матриц. Этот подход экономит реальную оперативную память в 4 раза, а скорость счета увеличивает в 8 раз.

Третий параграф посвящен тестированию программы. В таблицах приведены среднеквадратичные отклонения функции $W(x)$, $U(x)$ и $W^{*}(x)$, а также среднее и среднеквадратичное отклонения невязки. Анализ результатов численных экспериментов показывает, что рассмотренное интегральное уравнение решается достаточно точно.

В четвертом параграфе приводится пояснение и обсуждение полученных результатов. Здесь показано, что реализация примененных подходов позволила получить практически достаточную точность в сложных ситуациях, когда, - в процессе реализации метода Ньютона Канторовича,- линеаризованное уравнение трудно решается из за плохой обусловленности соответствующей матрицы. По-видимому, эти сложности возникают по причине физической неустойчивости исследуемого явления при соответствующем сочетании толщины пластинки и напряженности магнитного поля.

По результатам численного решения построены графики величин, описывающие деформационно-напряженное состояние пластинки, зависящее от величин напряжения внешнего магнитного поля. Сделан качественный и количественный анализ решений.
Показано, что:

а) при увеличении магнитного поля прогиб пластинки существенно увеличивается, и, как показывают вычисления, здесь возможны появления опасных остаточных деформаций.

б) магнитоупругий изгиб пластинки может сопровождаться скачкообразным переходом из одного равновесного состояния к другому. Именно, при увеличении величин напряжения внешнего магнитного поля, при определенной толщине пластинки, (или при уменьшении толщины при постоянной величине напряжения магнитного поля), знак функции, описывающей деформационно-напряженное состояние пластинки, меняется.

Пятый параграф посвящен теоретическому обоснованию и численной реализации модификации метода Ньютона-Канторовича для интегрального уравнения. Здесь реализована идея "дискретного погружения", позволяющая, в ряде случав, с большой точностью выходить на решение нелинейного уравнения. Изложим этот алгоритм.

Пусть при заданной сети $\{\tau_n\}$ $(0=\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N = 1)$

$$y(x,n) = \int_0^{\tau_n} F(x,t,y(t,n))dt + f(x), \qquad (2)$$

$$(0 \le x \le 1)$$

Тогда

$$z_n(x) \overset{\mathrm{def}}{=} y(x,n+1) - y(x,n) = \int_0^{\tau_{n+1}} \left\{F(x,t,y(t,n+1)) - F(x,t,y(t,n))\right\}dt +$$

$$+ \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} F(x,t,y(t,n))dt = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} F(x,t,y(t,n))dt + \int_0^{\tau_{n+1}} F'_y(x,t,y(t,n))z_n(t)dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{n+1}} F''_{yy}(x,t,\Theta(t,n))z^2(t)dt, \qquad (3)$$

$$(0 \le x \le 1)$$

где $\min(y(x,n),y(x,n+1)) \le \Theta(x,n) \le \max(y(x,n),y(x,n+1))$.

Если F и f -гладкие функции, то $z_n(x)$ имеет порядок $O(h_n)$ $(h_n=\tau_{n+1}-\tau_n \to 0)$. Таким образом, с точностью до $O(h^3)$ $(h=\max\{h_n\})$ $z_n(x)$ является решением линейного уравнения, получаемого из (3) отбрасыванием последнего интеграла.

При реализации этого алгоритма приходится решать уравнение (2) на отрезке, где количество точек разбиения на единицу больше, чем для предыдущего шага. Для этого нужно доопределить функцию $y(x)$ в новой добавленной точке по формуле

$$y(x_k) = f(x_k) + \int_0^{kh} F(x_k,t,y(t))dt, \qquad \text{где } k=1,2..N.$$

Интеграл вычисляется по квадратурной формуле прямоугольников. Затем решается линейное интегральное уравнение на удлиненном отрезке по одному из известных методов, и, таким образом получаем значение функции $y(x)$ во всех точках удлиненного отрезка. Итак, искомое решение получается в точках, количество которых на единицу больше чем на предыдущем шаге. Этот процесс повторяется до тех пор, пока функция $y(x)$ не вычислена во всех точках разбиения отрезка $[0,1]$.

Шестой параграф посвящен описанию программной реализации алгоритма. Здесь приводится пояснение главных программ, а также всех процедур и функций, используемых в программе.

Основные результаты работы.

1. Разработан алгоритм решения нелинейных интегральных уравнений, возникающих в задачах теории магнитоупругости, описывающих деформационно-напряженное состояние упругой пластинки под действием магнитного поля.

2. Экспериментальным путем найдены предельные значения параметров уравнения (толщина пластинки и напряженность магнитного поля), при превышении которых возможны появления опасных остаточных деформаций.

3. Предложенный алгоритм реализован для тестовых уравнений и готов к употреблению при решения соответствующих прикладных задач.

4. Предложена модификация алгоритма Ньютона-Канторовича для решения нелинейных интегральных уравнений.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Нерсесян А.Б., Дарбинян К.С. Метод погружения для решения нелинейных интегральных уравнений. ДАН Армении, т.94, №2, с.83-87, 1993.

2. Багдасарян Г.Е., Дарбинян К.С., Нерсесян А.Б. Изгиб сверхпроводящей пластинки в продольном магнитном поле. Ереван, 1994, 18с., Деп. в Арм.НИИНТИ, 14.07.94г., №19-Ар94.

Ամփոփագիր

Կարապետ Սուրենի Դարբինյան "Մագնիսական դաշտում գերհաղորդիչ սալի ծռման ոչ գծային խնդրի թվային լուծումը"

Karapet Souren Darbinian
"Numerical Solution of the Bending Nonlinear Problem of Superconductive Plate Located in the Magnetic Field"

Ատենախոսության մեջ հետազոտվում է գերհաղորդիչ սալի լարված- դեֆորմացիոն վիճակը մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ: Օգտվելով չդեֆորմացվող նորմալների հիպոթեզից և գերհաղորդիչ մարմինների համար մագնիսա-առաձգական տեսության հիմնական դրույթներից, մագնիսական դաշտի ազդեցությամբ ծռվող ճկուն գերհաղորդիչ սալերի երկչափ լարված-դեֆորմացիոն վիճակի նկարագրությունը բերվել է սինգուլյար կորիզով ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը, սալի եզրերի ամրակցման դասական պայմանների առկայությամբ: Ստացված եզրային խնդիրը բերվել է ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման և լուծվել է թվային մեթոդով:

Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են.

- Մշակվել է ալգորիթմ մագնիսա-առաձգականության մեջ առաջացող այնպիսի խնդիրների լուծման համար, որոնք նկարագրում են ճկուն սալերի լարված-դեֆորմացիոն վիճակը մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ:
- Փորձնական ճանապարհով գտնվել են պարամետրերի այն սահմանային արժեքները, որոնց գերազանցելու դեպքում կարող են առաջանալ վտանգավոր մնացորդային դեֆորմացիաներ:
- Առաջարկված ալգորիթմն իրականացված է տեստային օրինակի համար և պատրաստ է օգտագործվելու համապատասխան կիրառական խնդիրների լուծման համար:
- Առաջարկված է ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար Նյուտոն-Կանտորովիչի մեթոդի մոդիֆիկացիան:

Сдано в печать 4.04.1996г.

формат 60х 84 1/16 Тираж 100экз.