ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ալեքսանյան Սոնա Ռաֆիկի

ՖՈՐՄԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄ

Ա.01.09. «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2009

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Алексанян Сона Рафиковна

ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНОСТЕЙ ВЫВОДОВ В ФОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09. “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван 2009

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Ա. Չուբարյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Բ. Մարանջյան ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Հ. Ռ. Բոլիբեկյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2009 թ. մայիսի 22- ին, ժամը 14^{00}- ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ- ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 375025, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2009 թ. ապրիլի 22- ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	доктор физ. мат. наук А. А. Чубарян
Официальные оппоненты:	доктор физ. мат. наук Г. Б. Маранджян кандидат физ. мат. наук О. Р. Боливекян
Ведущая организация:	Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита состоится 22 мая 2009 г., в 14^{00} часов на заседании специализированного совета 044 “Математическая кибернетика и математическая логика” ВАК, при ЕГУ по адресу: 375025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 22 апреля 2009 г.

Ученый секретарь специализированного совета — кандидат физ. мат. наук В. Ж. Думанян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертационной работе исследуются сложностные характеристики выводов в ряде систем классического исчисления высказываний: системе резолюций (R), системе “Cutting planes (CP)”, системе, основанной на обобщенном правиле расщепления (P), системах Фреге (F), системах Фреге с правилом подстановки (SF) и с правилом k - ограниченной подстановки (S_kF).

На основании построенных в работе алгоритмов нормальной формы выводов в системах R и CP, а также на обосновании выполнении определенных свойств величины φ- определяющих конъюнктов в указанных системах и в системе P, для достаточно богатого класса формул построена иерархия по сложностям их выводов непосредственно в системах P, R и CP.

Для систем Фреге с правилом сечения установлена взаимосвязь между традиционными критериями сложности выводов (количество шагов и длина) и введенным в работе критерием трудноопределяемости формулы и, в частности, доказано, что трудноопределяемость формулы не является достаточным условием для получения суперполиномиальной нижней оценки сложности выводов в вышеуказанных системах Фреге, в отличие от систем P, R и CP.

Системы SF и S_kF сравнены и по длине и по шагам выводов одних и тех же формул, что указало на существующую эффективность систем SF по ускорению шагов выводов.

На основании полученных в диссертационной работе результатов уточнена иерархия различных систем доказательств классической логики.

<u>Актуальность работы</u>

Исследования сложностных характеристик выводов в исчислении высказываний, возникшие в связи с разработками автоматизации доказательств и носившие до конца семидесятых годов двадцатого века лишь фрагментарный и изолированный характер, получили бурное развитие после известного результата Кука – Рехова [1], доказавших в 1979г., что $NP \neq coNP$ в том и только в том случае, если не существует полиномиально ограниченной системы доказательств классических тавтологий, т.е., если для любой системы доказательств классической пропозициональной логики найдется последовательность таких формул, нижние оценки длин кратчайших выводов которых имеют суперполиномиальную зависимость от длин формул. Исследования развивались в двух направлениях: поиска новых систем доказательств и поиска класса формул, трудно доказуемых в данной системе.

Системы с простой стратегией поиска выводов (P, R, CP) удобны для автоматизации доказательств, и здесь важны алгоритмы построения нормальных форм выводов.

Для различных модификаций систем Фреге, для которых пока не установлено нижней показательной оценки выводов, актуальны "повышение" ("понижение") известных нижних (верхних) оценок сложностей выводов методами консервативных или существенных их расширений.

<u>Целями диссертационной работы являются:</u>

- Исследование возможности построения в системах резолюций, "Cutting planes" и обобщенных расщеплений иерархии формул, имеющих длины порядка n и сложности выводов порядка n^i $\left(1 \leq i \leq \left[n \log_n 2\right]\right)$.
- Уточнения оценок сложностей выводов в системах Фреге с правилом сечения для ряда "трудноопределяемых" формул.
- Сравнение по сложностям выводов систем Фреге с мультипликативной подстановкой и ограниченной подстановкой.

<u>Методы исследований</u>

[1] Cook S.A., Reckhow A.R., *The relative efficiency of propositional proof systems*, Journal of Symbolic Logic, 44, 1979, 36-50.

В работе использованы

- известные методы построения нормальных форм выводов,
- методы оценок сложностных характеристик выводов,
- известные методы моделирования одних систем доказательств другими.

<u>Научная новизна</u>

Даны нормальные формы выводов для систем резолюций, “Cutting planes” и обобщенных расщеплений и установлена возможность применения методики определяющих конъюнктов, что позволило построить в указанных системах иерархию формул по сложностям выводов, аналогичную иерархии, построенной А. Чубарян для системы Фреге без правила сечения.

Для ряда “трудноопределяемых” формул установлена полиномиальная верхняя оценка сложностей выводов в системах Фреге с правилом сечения, что указывает на недостаточность критерия “трудноопределяемости” для получения нижней экспоненциальной оценки сложностей выводов в указанных системах Фреге.

Доказано, что две любые системы Фреге с константно ограниченными правилами подстановки равноэффективны как по длине, так и по шагам выводов, в то время как системы Фреге с мультипликативной подстановкой существенно сильнее по шагам выводов.

<u>Выносящиеся на защиту основные положения</u>

- Описание нормальных форм выводов и установление возможности применения методики определяющих конъюнктов в системах резолюций, “Cutting planes” и обобщенных расщеплений и, как следствие, построение иерархии формул по сложностям выводов в этих системах.
- Получение полиномиальной верхней оценки сложностей выводов в системах Фреге с правилом сечения для ряда “трудноопределяемых” формул, для которых в “слабых” системах получены показательные нижние оценки.

- Доказательство равноэффективности двух систем Фреге с константно ограниченными правилами подстановки как по длине, так и по шагам выводов и установление ускорения количества шагов выводов при переходе от систем Фреге с константно ограниченными правилами подстановки к системам Фреге с мультипликативной подстановкой.

Обоснованность и достоверность результатов

Результаты сформулированы в виде теорем, которые доказаны.

Практическая ценность

Предложенные алгоритмы построения выводов, а также уточнение границ длин выводов в исследованных системах могут быть использованы в процессе автоматизации доказательств и в разработках построения искусственного интеллекта.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы работы докладывались

- на 13 Международном конгрессе логиков, состоявщемся в 2003 г. в г. Овьедо (Испания),
- на летней Всеевропейской логической конференции (ESM "Logic Colloquium"-2005), состоявшейся в 2005 г. в Афинах (Греция) ,
- на международной конференции по вычислительным наукам и информационным технологиям CSIT-2005 (г. Ереван, Армения),
- на международной конференции LPAR (г. Ереван, 2007 г.).
- на научном семинаре факультета ИПМ ЕГУ в 2009г.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 8 научных работ, список которых приведен в конце автореферата.

<u>Структура и объем диссертации</u>

Диссертация состоит из введения, трех глав, кратких выводов и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 95 страницах машинописного текста, содержит 2 диаграммы, а список литературы содержит 46 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа состоит из введения и трех глав.

<u>Во введении</u> приводятся те основные понятия и обзор результатов, которые послужили предпосылкой для исследований настоящей работы.

Мы будем пользоваться общепринятыми понятиями системы доказательств для классического исчисления высказываний, вывода в данной системе, сложностной характеристики вывода и полиномиальной сводимости систем доказательств, определенных Куком и Реховым, а также понятиями единичного n - мерного булева куба (E^n), пропозициональной формулы, тавтологии, конъюнкта, дизъюнктивной нормальной формы (д.н.ф.).

Длину формулы φ, определяемую как количество всех вхождений в нее логических связок, обозначим через $|\varphi|$. Очевидно, что линейной функцией от $|\varphi|$ оцениваются и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов, и количество вхождений переменных.

Язык каждой из рассматриваемых систем задается при ее определении.

Каждая из рассматриваемых систем Φ содержит конечное множество схем аксиом и конечное множество схематически заданных правил вывода. Вывод в системе Φ (Φ - вывод) определяется как конечная последовательность формул (или их соответствующих представлений), каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих по правилам вывода.

Основополагающими во всей работе являются следующие понятия: l - сложность (длина) вывода, определяемая как сумма длин всех формул вывода, t - *сложность* – как количество шагов вывода, l - сложность (t - сложность) формулы φ в системе Φ, определяемая как минимальное значение среди l - сложностей (t - сложностей) Φ – выводов формулы φ и обозначаемая через l_{φ}^{Φ} (t_{φ}^{Φ}).

Пусть Φ_1 и Φ_2 суть пропозициональные системы выводов. Следуя Куку и Рехову, напомним понятие полиномиальной сводимости.

Определение 1. Φ_1 $p-l$ - сводится к Φ_2 ($\Phi_1 \preceq_l \Phi_2$), если существует такой полином $p()$, что для любой формулы φ, выводимой и в Φ_1, и в Φ_2, $l_{\varphi}^{\Phi_2} \leq p(l_{\varphi}^{\Phi_1})$.

Определение 2. Φ_1 $p-l$ - эквивалентна Φ_2 ($\Phi_1 \sim_l \Phi_2$), если $\Phi_1 \preceq_l \Phi_2$ и $\Phi_2 \preceq_l \Phi_1$.

Понятие $p-l$ - эквивалентности соответствует общепринятому понятию p - эквивалентности.

Аналогично вводятся понятия $p-t$ - сводимости и $p-t$ - эквивалентности.

Определение 3. Φ_1 имеет экспоненциальное l - ускорение (t - ускорение) относительно Φ_2, если существует последовательность выводимых и в Φ_1, и в Φ_2 формул φ_n таких, что $l_{\varphi_n}^{\Phi_2} > 2^{\theta(l_{\varphi_n}^{\Phi_1})}$ ($t_{\varphi_n}^{\Phi_2} > 2^{\theta(t_{\varphi_n}^{\Phi_1})}$).

Для настоящей работы основополагающим также является введенное А. А. Чубарян понятие определяющего конъюнкта, позволившее сформулировать некоторое условие, при наличии которого сложность вывода в “слабых” системах доказательств классического исчисления высказываний оценивается снизу экспонентой от длины выводимой формулы.

Следуя общепринятой терминологии, литералом будем называть переменную или ее отрицание. Конъюнкт K может быть представлен как множество литералов, причем это множество не может содержать и переменную и ее отрицание одновременно. Д.н.ф. может быть представлена как множество конъюнктов $D = \{ K_1, K_2, ..., K_l \}$.

Пусть φ - пропозициональная формула, $P = \{ p_1, p_2, ..., p_n \}$ - множество ее различных переменных, а $P' = \{ p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m} \}$ $(1 \le m < n)$- некоторое подмножество P.

<u>Определение 4.</u> Для некоторого $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in E^m$ конъюнкт $K^{\sigma} = \{ p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \ldots, p_{i_m}^{\sigma_m} \}$ называется φ- определяющим, если подставляя в φ вместо каждой переменной p_{i_j} значение σ_j $(1 \le j \le m)$, получается значение формулы φ (0 или 1), вне зависимости от значений остальных переменных.

Естественно, что для каждой формулы φ может быть много различных φ-определяющих конъюнктов.

<u>Определение 5.</u> Для каждой формулы φ минимально возможное количество литералов в φ- определяющем конъюнкте назовем определяющей длиной формулы φ и обозначим через $d(\varphi)$.

На основании введенных понятий p - сводимости и p - эквивалентности систем доказательств, разными авторами построена иерархия систем доказательств классического исчисления высказываний.

Для ряда систем: системы, основанной на методе расщеплений, системы резолюций, системы Фреге без сечения, секвенциальной системы без сечения, системы неравенств с сокращением переменных, были получены показательные нижние оценки сложностей выводов. Для систем Фреге с правилом *modus ponens* и систем, находящихся выше них в указанной иерархии были известны лишь нижние оценки порядка n для t - сложностей, n^2 для l - сложностей, в то время как верхняя оценка лишь тривиальная порядка 2^n, где n - длина выводимой формулы.

Для систем Фреге без правила сечения А. Чубарян доказала, что для достаточно больших n существуют последовательности формул φ_n^i $\left(1 \le i \le \left[n \log_n 2\right]\right)$, логарифмы длины которых имеют порядок n, а верхние и нижние оценки сложностей выводов которых равны соответственно n^{i} и n^{i+1} по логарифмической шкале. Естественно, что верхние оценки по “полиномиальной шкале” переводятся на все системы, p-эквивалентные этой и находящиеся “выше” в упомянутой иерархии, а нижние оценки аналогично переводятся на p- эквивалентные и находящиеся “ниже” в той же иерархии.

В настоящей работе исследован вопрос получения аналогичных нижних (верхних) оценок в системах, расположенных выше (ниже) указанной системы в известной иерархии систем доказательств.

В первой главе, состоящей из четырех параграфов, исследованы выводы и их сложностные характеристики в системах резолюций, “Cutting planes” и основанном на обобщенном правиле расщеплений.

В первом параграфе описана система доказательств “Cutting planes” (CP) следуя Бассу [1] и описан алгоритм построения вывода в этой системе по каждой противоречивой системе неравенств.

Алгоритм заключается в следующем:

а) по каждой системе неравенств, применением правил вывода, строится новая “дополненная” система неравенств.

б) далее, опять же по правилам вывода, предлагается некая последователь-ность элиминации переменных, что приводит к построению вывода в системе.

Во втором параграфе описана некоторая нормальная форма вывода в системе резолюций (R).

Алгоритм построения вывода также предполагает первоначальное “дополнение” переменных и далее элиминацию переменных в определенном порядке.

В третьем параграфе обосновывается возможность применения свойств минимально – определяющих конъюнктов в CP и R, что позволяет получить соответствующие нижние оценки сложностей выводов, а описанные выше алгоритмы позволяют получить верхние оценки сложностей выводов, и тем самым доказывается

---

[1] Buss S.R., *Propositional Proof Complexity,* An Introduction, Handbook of proof Theory, North-Holland, 1998.

Теорема 1.3.1 [1] Для произвольного достаточно большого числа n и $\forall i,\ \left(1 \le i \le \left[n \log_n 2\right]\right)$ существуют формулы φ_n^i, для которых выполняется следующее:

$$1)\ \log_2\left|\varphi_n^i\right| = \Theta(n)$$

$$2)\ \log_2 t_{\varphi_n^i}^{CP} = O\left(n^{i+1}\right), \qquad \log_2 t_{\varphi_n^i}^{R} = O\left(n^{i+1}\right)$$

$$3)\ \log_2 t_{\varphi_n^i}^{CP} = \Omega\left(n^{i}\right), \qquad \log_2 t_{\varphi_n^i}^{R} = \Omega\left(n^{i}\right)$$

$$4)\ l \log_2 l_{\varphi_n^i}^{CP} = O\left(n^{i+1}\right), \qquad \log_2 l_{\varphi_n^i}^{R} = O\left(n^{i+1}\right)$$

$$5)\ \log_2 l_{\varphi_n^i}^{CP} = \Omega\left(n^{i}\right), \qquad \log_2 l_{\varphi_n^i}^{R} = \Omega\left(n^{i}\right)$$

В четвертом параграфе исследуются аналогичные вопросы в системе, основанной на обобщенном правиле расщепления (P).

Результаты по нижним оценкам l - сложностей, например в R, могут быть перенесены на P, но того же нельзя непосредственно утверждать о нижних оценках t - сложностей, так как верно

Утверждение 1.4.1. Система P имеет t - экспоненциальное ускорение относительно системы R.

Однако и для системы P доказан результат, аналогичный результатам теоремы 1.3.1:

Теорема 1.4.2. Для произвольного достаточно большого числа n и $\forall i,\ \left(1 \le i \le \left[n \log_n 2\right]\right)$ существуют формулы φ_n^i, для которых выполняется следующее:

$$1)\ \log_2\left|\varphi_n^i\right| = \Theta(n)$$

$$2)\ \log_2 t_{\varphi_n^i}^{P} = O\left(n^{i+1}\right)$$

$$3)\ \log_2 t_{\varphi_n^i}^{P} = \Omega\left(n^{i}\right)$$

[1] Нумерация теорем соответствует их нумерации в диссертации.

$$4)\ \log_2 l^P_{\varphi^i_n} = O\left(n^{i+1}\right)$$

$$5)\ \log_2 l^P_{\varphi^i_n} = \Omega\left(n^{i}\right)$$

Во второй главе, состоящей из двух параграфов, исследованы сложностные характеристики некоторых классов формул в системах Фреге с правилом сечения, например с правилом *modus ponens* (F).

В отличие от систем, рассмотренных в первой главе, для систем Фреге с правилом сечения известны лишь линейные нижние оценки для t - сложности и квадратичные нижние оценки для l - сложности при тривиальной экспоненциальной верхней оценке для обоих сложностей. Введенное А. Чубарян понятие характеристического множества переменных для произвольной тавтологии φ позволило для достаточно широких классов тавтологий получить полиномиальные верхние оценки сложностей выводов в системах Фреге с сечением, однако, для отдельных “трудных” формул оценки оставались экспоненциальными.

Интуитивно понятно, что величина $d(\varphi)$- минимально возможное количество литералов в φ- определяющем конъюнкте, указывает на “сложность” установления тавтологичности формулы, и чем ближе величина $d(\varphi)$ к $|\varphi|$ - длине формулы φ, тем более “трудноопределяемой” можно считать формулу φ.

Определение 6. Пусть φ_n ($n \geq 1$) - некоторая последовательность минимальных тавтологий. Если для некоторого n_0 можно указать такую константу c, что $\forall n \geq n_0$

$$\left(d\left(\varphi_n\right)\right)^c \leq \left|\varphi_n\right| \leq \left(d\left(\varphi_n\right)\right)^{c+1},$$

то формулы $\varphi_{n_0}, \varphi_{n_0+1}, \varphi_{n_0+2}, \ldots$ назовем трудноопределяемыми.

Именно трудноопределяемые формулы рассматривались в первой главе в качестве примеров с экспоненциальной нижней оценкой сложностей выводов. Здесь же доказано, что трудноопределяемость не является достаточным условием для нижней экспоненциальной оценки в системах Фреге с правилом сечения.

<u>**В первом параграфе**</u> исследовано соотношение между $d(\varphi)$ и сложностными характеристиками выводов в системах Фреге с правилом сечения.

Доказано

<u>**Утверждение 2.1.2.**</u> Для любой тавтологии φ, которая не может быть получена подстановкой из более короткой тавтологии

$$d(\varphi) \le \ell_{\varphi}^{F} \qquad \text{и} \qquad d(\varphi) \le c \cdot t_{\varphi}^{F}$$

для некоторой константы c.

<u>**Во втором параграфе**</u> исследована следующая задача: насколько "сложно" или "просто" могут быть выведены в системах Фреге с правилом сечения трудноопределяемые формулы.

В частности, доказана

<u>**Теорема 2.2.8.**</u> F - выводы тавтологий

$$\text{ПМ}_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1\ \sigma_2\ \dots\ \sigma_n) \in E^n} \ \mathop{\&}_{j=1}^{m} \left(\bigvee_{i=1}^{n} p_{i,j}^{\sigma_i} \right) \quad \left(n \ge 1, \qquad 1 \le m \le 2^n - 1\right)$$

t - (l -) полиномиально ограничены.

Учитывая, что формулы $\text{ПМ}_{n,2^n-1}$ трудноопределяемые, получаем, что трудноопределяемость формулы не является достаточным условием для получения нижней экспоненциальной оценки сложностных характеристик выводов в системах Фреге с правилом сечения, т.е. свойство трудноопределяемости формулы может быть "достигнуто" в системах Фреге с правилом сечения с полиномиально ограниченной сложностью вывода.

Учитывая полученные в этом параграфе результаты, результаты А. Чубарян о сложностях выводов в системах Фреге и полиномиальную эквивалентность различных систем Фреге с правилом сечения, вышеупомямутый результат Кука и Рехова возможно может быть перефразирован: $NP = coNP$ тогда и только тогда, когда в некоторой системе Фреге с правилом сечения длины выводов всех трудноопределяемых формул полиномиально ограничены.

В третьей главе исследуются сложностные характеристики выводов в системах Фреге с различными модификациями правила подстановки. А. Чубарян и Г. Цейтин [1] впервые установили неожиданное свойство правила подстановки, позволюящее резко сокращать количество шагов выводов. Этот же результат затем был получен и иными авторами (Я.Крайчек, С.Басс [2]). Как впоследствии оказалось, разные модификации правила подстановки также могут обеспечивать разную эффективность системы в смысле “уменьшения” того или иного критерия сложности.

Ранее А. Чубарян было доказано [3], что по количеству шагов мультипликативная (неограниченная) подстановка может давать экспоненциальное ускорение по отношению к правилу единичной подстановки.

В работе вводится понятие правила k - ограниченной подстановки, т.е. когда одновременная подстановка допустима лишь вместо не более, чем k переменных, и доказана:

Теорема 3.5.

а) для любых фиксированных k_1 и k_2 ($k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$) системы Фреге с k_1-ограниченным правилом подстановки t- (l-) эквивалентны системам Фреге с k_2-ограниченным правилом подстановки.

б) для любого фиксированного $k \geq 1$ системы Фреге с k - ограниченным правилом подстановки l- эквивалентны системе Фреге с мультипликативным правилом подстановки.

[1] Цейтин Г. Чубарян А. А., *О некоторых оценках длин логических выводов в классическом исчислении высказываний*, Матем. вопр. киберн. и вычисл. техн. Е. АН Арм ССР, 1975, 57-64.

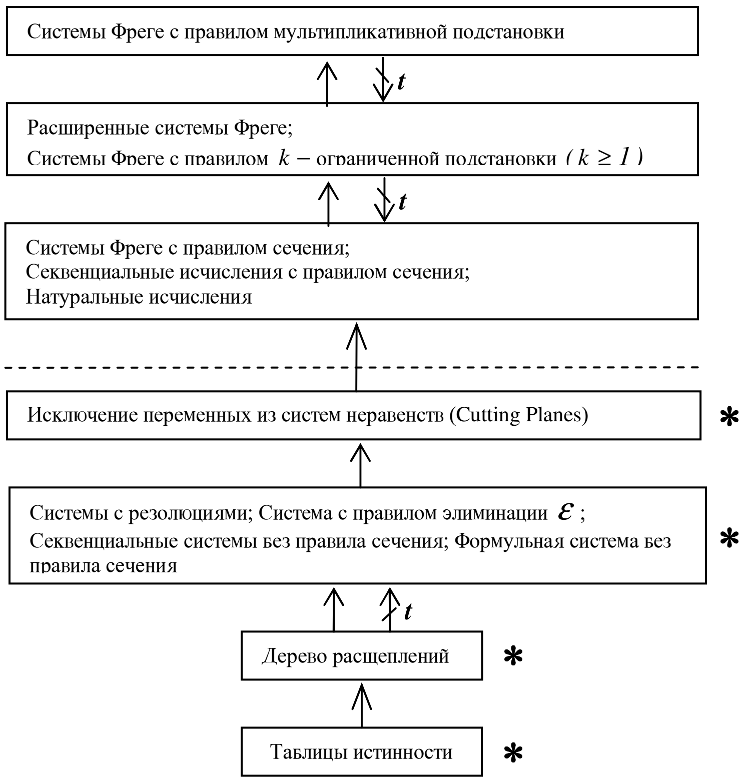
[2] Pudlak P., *Lengths of proofs,* Handbooks of proof theory, North-Holland, 1998, 547-637.

[3] Chubaryan A. A., *The powers of the essential subformulaes sets in Frege Proofs and substitution Frege proofs*, Mathematical problems of Computer Science, 21, 2000, 116-118.

в) система Фреге с мультипликативным правилом подстановки имеет экспоненциальное t - ускорение относительно системы Фреге с k - ограниченным правилом подстановки для любого фиксированного $k \geq 1$.

На основе полученных в работе результатов, некоторый фрагмент иерархии систем доказательств классического исчисления высказываний может быть уточнен в виде следующей диаграммы.

Уточненный фрагмент иерархии систем доказательств КИВ



В каждой клетке диаграммы заключены p - эквивалентные системы. Стрелка от одной клетки к другой означает что система(ы) из первой клетки p - сводятся к системе(ам) во второй клетке (в нашей терминологии $p - l$ - сводятся).

Перечеркнутая стрелка с пометкой t означает, что система, из которой выходит стрелка, имеет экспоненциальное t- ускорение относительно системы, в которую направлена стрелка.

Отметим, что в каждой из систем в отмеченных звездочкой клетках (все системы ниже штрихованной линии), можно указать последовательность формул φ_n^i $\left(1 \le i \le \left[n \log_n 2\right]\right)$, логарифмы длины которых имеют порядок n, а верхние и нижние оценки сложностей выводов которых равны соответственно n^i и n^{i+1} по логарифмической шкале.

Все те формулы, которые в нижних системах "сложно" выводимы, в системах, находящихся выше штрихованной линии, имеют полиномиально ограниченные сложности выводов.

ВЫВОДЫ

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. На основании построенных в работе алгоритмов нормальной формы выводов в системах "Cutting planes" и "Resolution", а также на обосновании выполнении определенных свойств φ- определяющих конъюнктов в указанных системах, и в системе основанной на обобщенном правиле расщеплений доказано, что для достаточно больших n существуют последовательности таких формул φ_n^i $\left(1 \le i \le \left[n \log_n 2\right]\right)$, что логарифмы их длин имеют порядок n, и во всех указанных системах t- сложности (l- сложности) φ_n^i (или их представлений) находятся по порядку между n^i и n^{i+1} по логарифмической шкале.
2. Введено понятие трудноопределяемости формулы (условие, обеспечивающее нижнюю экспоненциальную оценку сложностей выводов в названных в пункте 1 "слабых" системах) и доказано, что в системах Фреге с правилом сечения трудноопределяемость формул не является достаточным условием для больших

значений сложностей выводов. В частности, доказано существование последовательности таких трудноопределяемых формул φ_n, что сложности их выводов в системах Фреге полиномиально ограничены.

3. Сравнены по “эффективности” системы Фреге с мультипликативным правилом подстановки и константно - ограниченным правилом подстановки. Доказано, что по l - сложности все указанные системы полиномильно эквивалентны. По t - сложностям полиномильно эквивалентны лишь системы с константно - ограниченными правилами подстановки, в то время как системы с мультипликативной подстановкой имеют экспоненциальное t - ускорение относительно систем с константно - ограниченной подстановкой.

Список публикаций по теме диссертации.

[1] Chubaryan An. A., Chubaryan Arm. A., Aleksanyan S. R., *On the Proofs Complexity in Some “Weak” Systems of CPL,* 12th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Oviedo, 2003, 61-62.

[2] Chubaryan An. A., Chubaryan Arm. A., Aleksanyan S. R., *On the Bounds of the Proofs Complexity in Some “Weak” Systems of Classical Propositional Logic,* CSIT-2003, Yerevan, 86-87.

[3] Aleksanyan S., Hovakimyan A., *Some characteristics of Frege proofs,* Logic Colloquium 2005, ASL European Summer Meeting, Athens, 42 and Bulletin of Symbolic Logic, V. 12, №2, 2006, 322.

[4] Aleksanyan S. R., Chubaryan A. A., *On some properties of Frege proofs,* CSIT-2005, Yerevan, 20-21.

[5] Ալեքսանյան Ս. Ռ., *Դասական ասույթային հաշվի որոշ համակարգերում արտածումների նորմալ տեսքի հետազոտում,* ԵՊՀ գիտական տեղեկագիր, 1, 2007, 38-45:

[6] Aleksanyan S., Chubaryan An., *On determinative complexity of Frege Proofs*, XIV International Conference on LPAR, Proceedings of the short Papers Session, Yerevan, 2007, 1-5.

[7] Chubaryan An. A., Chubaryan Arm. A., Aleksanyan S. R., *Comparison of the Complexities in Frege Proofs with Different Substitution Rules,* Mathematical Problems of Computer Science 30, Yerevan, 2008, 36-39.

[8] С. Р. Алексанян, А. А. Чубарян, *О полиномиальных ограничениях сложностей выводов в системах Фреге*, Сибирский математический журнал, Март – апрель, 2009, т. 50, №2, 243-249.

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտվում են արտածումների բարդության բնութագրիչները դասական ասույթային հաշվի մի շարք համակարգերում. ռեզոլյուցիաների համակարգում (R), "Cutting planes (CP)" համակարգում, տրոհման ընդանրացված կանոնի վրա հիմնված համակարգում (P), Ֆրեգեի համակարգերում (F), տեղադրման կանոնով (SF) և k - սահմանափակված տեղադրման կանոնով ($S_k F$) Ֆրեգեի համակարգերում:

Ստացված արդյունքների հիման վրա ճշգրտված է դասական ասույթային հաշվի արտածումների տարբեր համակարգերի հիերարխիան:

Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են՝

1. R և CP համակարգերի համար առաջարկված են արտածումների կառուցման նորմալ ձևեր: Հիմնվելով դրանց և φ - որոշիչ կոնյունկտի որոշակի հատկության վրա՝ P , R և CP համակարգերի համար ապացուցված է, որ բավականաչափ մեծ n – րի համար գոյություն ունեն այնպիսի φ_n^i $\left(1 \le i \le \left[n \log_n 2\right]\right)$ բանաձևերի հաջորդականություններ, որ նրանց երկարությունների լոգարիթմները ըստ կարգի հավասար են n , և բոլոր նշված համակարգերում φ_n^i

բանաձևերի t - (l -) բարդությունների լոգարիթմները ըստ կարգի գտնվում են n^i և n^{i+1} միջև:

2. Հատույթի կանոնով Ֆրեգեի համակարգերի համար հետազոտված է արտածումների բարդության ավանդական բնութագրիչների (քայլերի քանակի և երկարության) և աշխատանքում սահմանված բանաձևի բարդորոշելիության բնութագրիչի փոխհարաբերությունը: Մասնավորապես ապացուցված է, որ Ֆրեգեի նշված համակարգերի համար, ի տարբերություն P, R և CP համակարգերի, բանաձևի բարդորոշելիութունը բավարար չէ արտածումների բարդության ստորին ցուցչային գնահատական ունենալու համար:

3. SF և S_kF $(k \geq 1)$ համակարգերը համեմատված են ըստ միևնույն բանաձևերի արտածումների քայլերի և երկարության: Ապացուցված է, որ ըստ երկարության բոլոր նշված համակարգերը բազմանդամորեն համարժեք են: Ըստ քայլերի բազմանդամորեն համարժեք են միայն S_kF համակարգերը տարբեր k - երի համար, իսկ SF համակարգերը ունեն էքսպոնենցիալ արագացում S_kF համակարգերի նկատմամբ:

Sona Aleksanyan

Investigations of proof complexities in formal systems