ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՃԱՐՏԱՐԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Բադալյան Լիանա Արամի

ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԿԵՂԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՈՒՄԸ

Ե.13.02 - «Ավտոմատացման համակարգեր» մասնագիտությամբ
տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման
ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

Бадалян Лиана Арамовна

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПСЕВДООБРАТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МАТРИЦ И АВТОМАТИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности

05.13.02- "Системы автоматизации"

Ереван 2007

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայաստանի Պետական ճարտարագիտական Համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝ տ.գ.դ., պրոֆ. Ս.Հ. Սիմոնյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ տ.գ.դ., պրոֆ. Յու.Ռ. Հակոբյան
տ.գ.թ., դոց. Վ.Գ. Ալեքսանդրյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ «Ռուս-հայկական (Սլավոնական) պետական համալսարանը»

Ատենախոսության պաշտպանությունը տեղի կունենա 2007թ. դեկտեմբերի 27-ին ժ. 14^{00}-ին ՀՊՃՀ 032 Մասնագիտական խորհրդի նիստում (հասցե՝ 0009, Երևան, Տերյան փ., 105, 17 մասնաշենք): Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՊՃՀ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2007թ. նոյեմբերի 26-ին:

032 Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար տ.գ.դ., պրոֆ. Ս.Հ. Սիմոնյան

Тема диссертации утверждена в Государственном инженерном университете Армении.

Научный руководитель: д.т.н., проф. С.О. Симонян
Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., проф. Ю.Р. Акопян,
к.т.н., доц. В.Г. Александрян

Ведущая организация: Русско-армянский (Славянский) университет

Защита диссертации состоится 27 декабря 2007 г. в 14^{00} ч. на заседании Специализированного совета 032 в ГИУА (адрес: 0009, г. Ереван, ул. Теряна, 105, корпус 17). С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГИУА.
Автореферат разослан 26 ноября 2007 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета 032
д.т.н., проф. С.О. Симонян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. На нынешнем этапе развития науки и техники практически невозможно найти такую сферу деятельности, которая не была бы глубоко охвачена информационными технологиями. Постоянно расширяясь и совершенствуясь, всемирная информационная индустрия демонстрирует наиболее высокие темпы роста по сравнению с другими отраслями индустрии. Внедрение информационных технологий в ту или иную сферу науки и техники диктует необходимость применять новые подходы, создавать новые инструментарии для более эффективного решения существующих задач.

Проблемы определения псевдообратных матриц, сингулярного разложения и других характеристик нестационарных матриц часто встречаются в многомерных системах управления, инверсных системах, при решении систем уравнений с переменными коэффициентами и т.д. Однако существующие подходы и методы для решения рассматриваемых проблем либо приводят к необходимости решения дополнительных, иногда довольно трудоемких задач, либо применимы для частных случаев. Это, в основном, обусловлено сложностью рассматриваемого класса задач и наличием огромного числа вычислительных операций. Данная диссертационная работа посвящена эффективному решению отмеченного класса задач с использованием аппарата дифференциальных преобразований, предложенного акад. Г.Е. Пуховым.

Использование аппарата дифференциальных преобразований приводит к упрощению решения отмеченных задач – максимальной расщепляемости их переменных и распараллеливания расчетов. Аппарат особенно эффективен в тех задачах, решения которых при изменении независимого переменного на некотором интервале времени могут быть представлены в виде отрезков степенных рядов Тейлора или в виде совокупности локальных степенных рядов. Это обстоятельство дает возможность разработать более эффективные и простые методы, основанные на разных дифференциальных преобразованиях, которые легко осуществимы с точки зрения автоматизации и могут быть использованы как в последовательных, так и в параллельных системах. Разработанные методы могут также служить основой для создания новых вычислительных средств, в частности, пакетов прикладных программ (ППП), автоматизированных систем, систем автоматического управления и т.д. В этом отношении значительны достижения научного коллектива кафедры "Информационное обеспечение технических систем" (ИОТС) Департамента кибернетики ГИУА в области нового научного направления, созданного учеником Г.Е. Пухова – проф. С.О. Симоняном, расширению которого и посвящена настоящая данная диссертационная работа.

Целью диссертационной работы является:

1. Разработка более эффективных и простых методов для вычисления нестационарных псевдообратных матриц и сингулярного разложения нестационарных матриц.
2. Проведение всесторонних исследований с целью выявления преимуществ и недостатков предложенных методов.
3. Дополнение и расширение известного (созданного на кафедре ИОТС ГИУА и реализованного на языке C++ в среде Visual C++) ППП открытого типа "NonAutonSys" с использованием разработанных методов, а также разработка программного модуля, который позволил бы на основе входных параметров введенной матрицы вычислить псевдообратную матрицу тем методом, при котором выполняется минимальное количество вычислительных операций.
4. Проведение сравнительного анализа разработанных методов как между собой, так и с другими известными методами на основе решения ряда модельных и практических задач, а также получение количественных оценок о точности и длительности вычислений.

Методы исследования. При решении поставленных задач были использованы: алгебра дифференциальных преобразований; методы теории матриц и линейной алгебры; современные технологии синтеза программных систем и методы машинного моделирования.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработаны методы для определения нестационарных псевдообратных матриц, в частности:
   - дифференциальный аналог (Д-аналог) метода Гревилля;
   - Д-аналог, основанный на методе ортогонализации Грамма-Шмидта;
   - Д-аналог, основанный на методе исключения Гаусса-Жордана;
   - Д-аналог метода блочного разбиения матрицы;
   - Д-аналог, основанный на сингулярном разложении нестационарной матрицы;
   - комбинированный метод, основанный на совместном использовании метода замороженных коэффициентов и теории аппроксимации;
   - Д-аналог метода сингулярного разложения матрицы, который позволяет вычислить сингулярные значения-функции и сингулярные базисы-функции нестационарных матриц.
2. Для разработанных методов получены зависимости количеств операций умножения и сложения от размеров и ранга исходной матрицы и количества дискрет.
3. Проведен сравнительный анализ разработанных методов на основе решения ряда модельных и практических задач, а также получены количественные оценки о точности и длительности вычислений.

Практическая ценность работы заключается в эффективном решении задач прикладного характера с применением расширенного и улучшенного ППП, предназначенного для определения различных характеристик нестационарных матриц.

Результаты работы использованы:

- в рамках госбюджетной темы 0430 - "Разработка эффективных средств решения задач системного анализа и управления, основанных на дифференциальных преобразованиях" (2005-2007 гг.), финансируемой Министерством образования и науки РА на конкурсной основе и относящейся к области "Системы автоматизации и управление"(шифр 3-07);
- в процессе обучения студентов и магистрантов кафедры ИОТС ГИУА.

Апробация результатов работы. Основные положения и научные результаты исследований докладывались и обсуждались на:

- Международной молодежной конференции "Информационные технологии" (Ереван, 2005 г.);
- научных семинарах магистрантов и аспирантов по специальности "Системы автоматизации" аспирантской школы ГИУА (2004-2006гг.);
- научных семинарах кафедры ИОТС ГИУА (Ереван, 2005-2007 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 научных трудах, список которых представлен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего 133 наименования, основных выводов и результатов, а также четырех приложений, представленных на 49 страницах. Основной текст диссертации изложен на 144 страницах, которые включают 131 рисунок и 8 таблиц. Диссертация написана на армянском языке.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Д-аналоги для определения нестационарных псевдообратных матриц: Д-аналог метода Гревилля; Д-аналог, основанный на методе ортогонализации Грамма-Шмидта; Д-аналог, основанный на методе исключения Гаусса-Жордана; Д-аналог метода блочного разбиения матрицы; Д-аналог, основанный на сингулярном разложении нестационарной матрицы.
2. Комбинированный метод для определения нестационарных псевдообратных матриц, основанный на совместном использовании методов замороженных коэффициентов и теории аппроксимации.
3. Д-аналог метода сингулярного разложения нестационарных матриц.
4. ППП с расширенными возможностями, предназначенный для полной автоматизации численно-аналитических процедур предложенных методов.
5. Оценки вычислительных характеристик предложенных методов.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы актуальность и научная новизна темы, сформулированы основные цели диссертационной работы, приведено краткое содержание работы.

В первой главе проведен обзор работ, основанных на дифференциальных преобразованиях и определении нестационарных псевдообратных матриц. Показано, что существует немного методов для определения нестационарных псевдообратных матриц. Все эти методы в основном предназначены для частных случаев — нестационарных несингулярных полиномиальных матриц, матриц с полным столбцевым или строчным рангом и т.д. Существующие универсальные методы либо применимы к матрицам с малыми размерностями (методы, реализованные на языках символического программирования), либо приводят к необходимости решения ряда непростых дополнительных задач. Например, при использовании метода замороженных коэффициентов возникают следующие вопросы: какой длины должен быть интервал аппроксимации, сколько изолированных точек необходимо выбрать на этом интервале, каким образом выбрать эти точки и т.д. На основании этих обстоятельств, а также обзора работ по теории и практике дифференциальных преобразований обоснована целесообразность использования последних для достижения целей работы и представлены постановки соответствующих задач исследования.

Во второй главе рассмотрены вопросы определения псевдообратных нестационарных матриц и сингулярного разложения нестационарных матриц. С этой целью предложены:

- Д-аналог метода Гревилля;
- Д-аналог, основанный на методе ортогонализации Грамма-Шмидта;
- Д-аналог, основанный на методе исключения Гаусса-Жордана;
- Д-аналог метода блочного разбиения матрицы;
- Д-аналог, основанный на методе сингулярного разложения матрицы;
- комбинированный метод, основанный на совместном использовании метода замороженных коэффициентов и теории аппроксимации.

Д-аналоги разработаны на основе использования дифференциальных преобразований, которые задаются следующими соотношениями:

$$X(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\left[\frac{d^K x(t)}{dt^K}\right]_{t=t_v},\quad K=\overline{0,\infty}\ \ \doteq\ \ x^{Д}(t)=\mathcal{X}(t,t_v,H,X(K)),$$

где $X(K)$ - изображение (дискрета) оригинала $x(t)$ - функция целочисленного аргумента $K=\overline{0,\infty}$; H - некоторая постоянная (масштабный коэффициент), которая вводится с целью выравнивания размерностей слагаемых оригинала; t_v - центр аппроксимации; $\doteq$ - знак перехода из области оригиналов в область изображений и наоборот; $\mathcal{X}(\cdot)$ - некоторая функция, обуславливающая восстановление оригинала $x(t)$.

В зависимости от того, какая функция используется для восстановления

оригинала, различают дифференциально-маклореновские (ДМ), дифференциально-тейлоровские (ДТ), дифференциально-падеевские (ДП), дифференциально-лежандровские (ДЛ) и другие типы дифференциальных преобразований.

Заметим, что дифференциальные преобразования применимы только к тем нестационарным матрицам, все элементы которых являются аналитическими функциями переменной t в окрестности центра аппроксимации t_v. Выполнение этого условия предполагается для всех разработанных нижеприведенных Д-аналогов. Предположим также, что ранг исходной нестационарной матрицы не меняется в зависимости от переменной t в окрестности центра аппроксимации t_v.

Д-аналог метода Гревилля

Пусть $A(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ - K-я дискрета исходной нестационарной матрицы $A(t)$ размерностью $m\times n$; $a_q(K)$, $q=\overline{1,n}$ - q-й столбец матричной дискреты $A(K)$, а $A_q(K)$ - подматрица, состоящая из ее первых q столбцов, т.е. $A_q=[a_1,\dots,a_q]$, $A_n=A$, $q=\overline{1,n}$. Кроме того, допустим, что $b_q(K)$, $q=\overline{1,n}$ - последняя строка-дискрета искомой матричной дискреты $A_q^{(+)}(K)$, $q=\overline{1,n}$. Заметим, что у матричных дискрет $A_q^{(+)}(K)$ знак "+" взят в скобки для обозначения матричной дискреты псевдообратной матрицы $A^+(t)$, а не псевдообратной дискреты $A_q(K)$. В последнем случае будем использовать знак "плюс" без скобок - $A_q^+(K)$.

Имея в виду эти обозначения, представим Д-аналог метода Гревилля для определения $A^{(+)}(K)$ матричных дискрет псевдообратной матрицы $A^+(t)$.

Шаг 1. Вычислить

$$A_1^{(+)}(K)=a_1^{(+)}(K)=\frac{a_1^*(K)-\sum_{\ell_1=1}^{K}a_1^{(+)}(K-\ell_1)\cdot\sum_{\ell_2=0}^{\ell_1}a_1^*(\ell_1-\ell_2)\cdot a_1(\ell_2)}{a_1^*(0)\cdot a_1(0)},\quad K=\overline{0,\infty},\tag{1.1}$$

где "*" — знак комплексно-сопряженного вектора или матрицы. Естественно, при $a_1(0)=a_1^*(0)=0$ необходимо принять $A_1^+(0)=a_1^+(0)=(0)$.

Шаг 2. Вычислить

$$d_q(K)=\sum_{\ell=0}^{K}A_{q-1}^{(+)}(\ell)\cdot a_q(K-\ell),\quad K=\overline{0,\infty},\quad q=\overline{2,n}.\tag{1.2}$$

Шаг 3. Вычислить

$$c_q(K)=a_q(K)-\sum_{\ell=0}^{K}A_{q-1}(\ell)\cdot d_q(K-\ell),\quad K=\overline{0,\infty},\quad q=\overline{2,n}.\tag{1.3}$$

Шаг 4. Если $c_q(K)\neq 0$, $K=\overline{0,\infty}$ то вычислить

$$b_q(K)=c_q^{(+)}(K)=\left(a_q(K)-\sum_{\ell=0}^{K}A_{q-1}(\ell)\cdot d_q(K-\ell)\right)^+,\quad K=\overline{0,\infty},\quad q=\overline{2,n};\tag{1.4}$$

если $c_q(K)=0$, то вычислить

$$b_q(K)=\sum_{\ell_1=0}^{K}G_q(K-\ell_1)\sum_{\ell_2=0}^{\ell_1}d_q^*(\ell_1-\ell_2)\cdot A_{q-1}^{(+)}(\ell_2),\quad K=\overline{0,\infty},\quad q=\overline{2,n},\tag{1.5}$$

причем

$$G_q(K)=\frac{Ъ(K)-\sum_{\ell=1}^{K}G_q(\ell)\cdot F(K-\ell)}{F(0)},\quad K=\overline{0,\infty},\quad q=\overline{2,n},\tag{1.6}$$

$$F_q(K)=Ъ(K)+\sum_{\ell=0}^{K}d_q^*(\ell)\cdot d_q(K-\ell),\quad K=\overline{0,\infty},\quad q=\overline{2,n},\tag{1.7}$$

где тейлоровская единица

$$Ъ(K)=\begin{cases}1, \text{ если } K=0,\\ 0, \text{ если } K=\overline{1,\infty}.\end{cases}\tag{1.8}$$

Шаг 5. Вычислить

$$B_q(K)=A_{q-1}^{(+)}(K)-\sum_{\ell=0}^{K}d_q(\ell)\cdot b_q(K-\ell),\quad K=\overline{0,\infty},\quad q=\overline{2,n}.\tag{1.9}$$

Шаг 6. Вычислить

$$A_q^{(+)}(K)=\left(\frac{B_q(K)}{b_q(K)}\right),K=\overline{0,\infty},q=\overline{2,n}.\tag{1.10}$$

Таким образом, используя соотношения (1.1)-(1.10), можно вычислить необходимое количество матричных дискрет $A_n^{(+)}(0)$, $A_n^{(+)}(1)$, ..., $A_n^{(+)}(K)$, а затем восстановить псевдообратную матрицу $A^+(t)$ в соответствии с обратными дифференциальными преобразованиями. В частности, при ДТ-преобразованиях будем иметь

$$A^{+ДТ}(t)=\sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_0}{H}\right)^K\cdot A^{(+)}(K).\tag{1.11}$$

Вычислительные характеристики Д-аналога метода Гревилля, т.е. аналитические зависимости операций умножения ("*") и сложения ("+") от числа строк (m), столбцов (n), ранга (r) матрицы и от количества дискрет (N), приведены в таблице (см. стр. 16).

Анализируя полученные аналитические выражения и построенные на их основе графики (приведены в диссертационной работе), сделаны следующие замечания:

Замечание 1. Аналитические выражения, полученные для операций умножения и сложения, почти не отличаются друг от друга. Это обусловлено тем, что при применении Д-аналога метода Гревилля и, вообще, рассмотренных ниже Д-аналогов, в основном, выполняются операции умножения матричных дискрет, а при умножении матричных дискрет выполняется столько операций умножения, сколько операций сложения.

Замечание 2. Метод не требует предварительных преобразований исходной матрицы.

Замечание 3. Число операций зависит линейно от числа строк исходной матрицы и квадратично от числа столбцов. Следовательно, псевдообращение матриц размерностью $n>m$ будет эффективнее, если сначала транспонировать исходную матрицу, после чего вычислить псевдообратную транспонированной матрицы. Тогда псевдообратная исходной матрицы будет получена после транспонирования вычисленной матрицы, т.е.

$$A^+(t)=\left[\left(A^*(t)\right)^+\right]^*.\tag{1.12}$$

Замечание 4. Число операций убывает, когда ранг матрицы приближается к числу столбцов исходной матрицы.

На основе этих замечаний можно заключить, что Д-аналог метода Гревилля более эффективен для матриц, чьи параметры удовлетворяют следующим условиям:

$$m\geq n \text{ и } r\approx n.$$

Д-аналог, основанный на методе ортогонализации Грамма-Шмидта

Рассмотрим Д-аналог для вычисления нестационарных псевдообратных матриц, основанный на методе ортогонализации Грамма-Шмидта.

Шаг 1. Применить Д-аналог метода ортогонализации Грамма-Шмидта к матричным дискретам $A(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ исходной матрицы $A(t)$:

$$\tilde{a}_1(K)=a_1(K),\ K=\overline{0,\infty}, \tag{2.1}$$

$$z_q(K)=\sum_{\ell=0}^{K}\tilde{a}_q^*(\ell)\cdot\tilde{a}_q(K-\ell),\ q=\overline{1,n},\ K=\overline{0,\infty}, \tag{2.2}$$

$$y_q(K)=\frac{z_q(K)-\sum_{\ell=1}^{K-1}y_q(\ell)\cdot y_q(K-\ell)}{2\cdot y_q(0)},\ y_q(0)=\sqrt{z_q(0)},\ q=\overline{1,n},\ K=\overline{0,\infty}, \tag{2.3}$$

$$\bar{a}_q(K)=\frac{\tilde{a}_q(K)-\sum_{l=0}^{K-1}\bar{a}(l)\cdot y_q(K-l)}{y_q(0)},\ q=\overline{1,n},\ K=\overline{0,\infty}, \tag{2.4}$$

$$\tilde{a}_q(K)=a_q(K)-\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{\ell=0}^{K}\bar{a}_j(K-\ell)\sum_{\ell_1=0}^{\ell}\left(\bar{a}_j^*(\ell-\ell_1)a_q(\ell_1)\right),\ q=\overline{2,n},\ K=\overline{0,\infty}, \tag{2.5}$$

где $a_q(K)$, $q=\overline{1,n}$, $K=\overline{0,\infty}$ - q-й столбец матричной дискреты $A(K)$, а $\tilde{a}_q(K)$, $z_q(K)$, $y_q(K)$ и $\bar{a}_q(K)$, $q=\overline{1,n}$, $K=\overline{0,\infty}$ есть изображения следующих функций в области дифференциальных преобразований:

$$\tilde{a}_1(K)\doteq a_1(t);$$

$$z_q(K)\doteq z_q(t),\ \text{где}\ z_q(t)=\left\|\tilde{a}_q(t)\right\|^2,\ q=\overline{1,n},\ K=\overline{0,\infty};$$

$$y_q(K)\doteq y_q(t),\ \text{где}\ y_q(t)=\sqrt{z_q(t)}=\left\|\tilde{a}_q(t)\right\|,\ q=\overline{1,n},\ K=\overline{0,\infty};$$

$$\bar{a}_q(K)\doteq,\bar{a}_q(t),\ \text{где}\ \bar{a}_q(t)=\frac{\tilde{a}_q(t)}{\left\|\tilde{a}_q(t)\right\|},\ q=\overline{1,n},\ K=\overline{0,\infty};$$

$$\tilde{a}_q(K)\doteq\tilde{a}_q(t),\ \text{где}\ \tilde{a}_q(t)=a_q(t)-\sum_{j=1}^{q-1}\left(\bar{a}_j^*(t)\cdot a_q(t)\right)\cdot\bar{a}_j(t),\ q=\overline{1,n},\ K=\overline{0,\infty}.$$

Здесь $\tilde{a}_q(t)$, $q=\overline{1,n}$ обозначают ортогональные, а $\bar{a}_q(t)$, $q=\overline{1,n}$ - ортонормированные столбцы матрицы $A(t)$. Очевидно, что выражения (2.3) и (2.4) имеют смысл, если столбец $\bar{a}_q(t)$ ненулевой.

Шаг 2. Вычислить матрицу перестановок P, с помощью которой столбцы исходной матрицы $A(t)$ переставляются так, чтобы ее первые r столбцы были бы линейно независимы, а остальные столбцы были бы их линейными комбинациями, т.е.

$$A(t)\cdot P=\left[T(t)\mid S(t)\right], \tag{2.6}$$

где $T(t)$ - матрица размерностью $m\times r$, имеющая полный столбцевой ранг; $S(t)$ - матрица размерностью $m\times(n-r)$, чьи столбцы есть линейные комбинации столбцов матрицы $T(t)$. Очевидно, что r есть ранг матрицы $A(t)$.

Для определения матрицы перестановок P перенумеруем столбцы, полученные в результате ортогонализации матричных дискрет $\bar{A}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$, так, чтобы ненулевые векторы-дискреты были первыми:

$$\breve{A}(K)=[\tilde{a}_1(K)\mid\tilde{a}_2(K)\mid\cdots\mid\tilde{a}_r(K)\mid\underset{m\times(n-r)}{0}]. \tag{2.7}$$

При соответствующей нумерации и перестановке столбцов единичной матрицы E порядка n будет получена искомая матрица перестановок P:

$$\breve{A}(K)=\bar{A}(K)\cdot P. \tag{2.8}$$

Шаг 3. Вычислить матричные дискреты $T(K)$ и $S(K)$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$\left[\underset{m\times r}{T(K)}\mid\underset{m\times(n-r)}{S(K)}\right]=A(K)\cdot P,\quad K=\overline{0,\infty}. \tag{2.9}$$

Шаг 4. Составить матричные дискреты $Q(K)$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$\underset{m\times r}{Q(K)}=\left[\tilde{a}_1(K)\mid\tilde{a}_2(K)\mid\cdots\mid\tilde{a}_r(K)\right]. \tag{2.10}$$

Шаг 5. Вычислить столбцы матричных дискрет $\underset{m\times r}{C(K)}$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$c_q(K)=\frac{\bar{a}_q(K)-\sum_{\ell=0}^{K-1}c_q(\ell)\cdot y_q(K-\ell)}{y_q(0)},\ q=\overline{1,r},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{2.11}$$

Шаг 6. Вычислить элементы матричных дискрет $\underset{r\times r}{\gamma(K)}$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$\gamma_{ij}(K)=-\sum_{p=1}^{j-1}\sum_{\ell=0}^{K}\gamma_{ip}(K-\ell)\cdot\sum_{\ell_1=0}^{\ell}t_j^*(\ell_1)\cdot c_p(\ell-\ell_1),\quad i<j,\quad K=\overline{0,\infty}, \tag{2.12}$$

$$\gamma_{ij}(K)=0,\quad \text{где}\ i>j,\ K=\overline{0,\infty},$$

$$\gamma_{ij}(0)=1,\quad \text{где}\ i=j,\ i,j=\overline{1,r}.$$

Шаг 7. Вычислить столбцы матричных дискрет $\underset{r\times r}{B(K)}$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$b_q(K)=\frac{\gamma_q(K)-\sum_{\ell=0}^{K-1}\gamma_q(\ell)\cdot y_q(K-\ell)}{y_q(0)},\quad q=\overline{1,r},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{2.13}$$

Шаг 8. Вычислить

$$\underset{r\times m}{T^{(*)}(K)}=\sum_{\ell=0}^{K}\underset{r\times r}{B(\ell)}\cdot\underset{r\times m}{Q^*(K-\ell)},\quad K=\overline{0,\infty}. \tag{2.14}$$

Шаг 9. Вычислить элементы матричных дискрет $\underset{r\times(n-r)}{U(K)}$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$u_{ij}(K)=-\sum_{p=1}^{j-1}\sum_{\ell=0}^{K}\gamma_{ip}(K-\ell)\cdot\sum_{\ell_1}^{\ell}(s_j^*\cdot c_p(\ell-\ell_1)),\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,n-r},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{2.15}$$

Шаг 10. Составить матричные дискреты $H(K)$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$\underset{n\times(n-r)}{H(K)}=\begin{bmatrix}\underset{r\times(n-r)}{U(K)}\\ \hline \underset{(n-r)\times(n-r)}{E(K)}\end{bmatrix},\ K=\overline{0,\infty}, \tag{2.16}$$

где $E(K)$ - K-я дискрета единичной матрицы порядка $(n-r)$, причем для $K>0$ $E(K)=0$.

Шаг 11. Применить Д-аналог метода ортогонализации Грамма-Шмидта к матричным дискретам $H(K)$, $K=\overline{0,\infty}$. В результате матричные дискреты $H(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ преобразуются в ортонормированные матричные дискреты $V(K)$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$\underset{n\times(n-r)}{V(K)}=\begin{bmatrix}\underset{r\times(n-r)}{V_1(K)}\\ \hline \underset{(n-r)\times(n-r)}{V_2(K)}\end{bmatrix},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{2.17}$$

Шаг 12. Вычислить

$$\underset{r\times r}{G(K)}=\underset{r\times r}{E(K)}-\sum_{\ell=0}^{K}\underset{r\times(n-r)}{V_1(\ell)}\cdot\underset{(n-r)\times r}{V_1^*(K-\ell)},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{2.18}$$

Шаг 13. Вычислить

$$\underset{n\times r}{Z(K)}=\sum_{\ell=0}^{K}\begin{bmatrix}\underset{r\times r}{E(\ell)}\\ \hline \underset{(n-r)\times r}{U^*(\ell)}\end{bmatrix}\cdot\underset{r\times r}{G(K-\ell)},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{2.19}$$

Шаг 14. Вычислить

$$\underset{n\times m}{A^{(+)}(K)} = \underset{n\times n}{P}\cdot\sum_{\ell=0}^{K}\underset{n\times r}{Z(\ell)}\cdot\underset{r\times m}{T^{(+)}(K-\ell)},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{2.20}$$

Используя соотношения (2.1)-(2.20), можно вычислить необходимое количество матричных дискрет $A^{(+)}(0), A^{(+)}(1), \ldots, A^{(+)}(K)$, а затем восстановить псевдообратную матрицу $A^{+}(t)$ в соответствии с обратными дифференциальными преобразованиями.

Вычислительные характеристики изложенного метода приведены в таблице (см. стр. 16).

Замечание 1. Для применения метода необходимо привести исходную матрицу к соответствующему виду (см. выражения (2.6)-(2.8)), что подразумевает выполнение дополнительных операций.

Замечание 2. Число операций зависит линейно от числа строк исходной матрицы и кубически от числа столбцов. Следовательно, псевдообращение матриц размерностью $n>m$ будет эффективнее, если сначала транспонировать исходную матрицу, после чего вычислить псевдообратную транспонированной матрицы (см. выражение (1.12)).

Замечание 3. Число операций возрастает с ростом ранга матрицы, т.е. метод более эффективен для матриц, чьи параметры удовлетворяют следующим условиям:

$$r<\min\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right) \text{ и } m>n.$$

Д-аналог, основанный на методе исключения Гаусса-Жордана

Рассмотрим Д-аналог для вычисления нестационарных псевдообратных матриц, основанный на методе ортогонализации Гаусса-Жордана.

Шаг 1. Составить матричные дискреты:

$$\underset{n\times(n+m)}{R(K)} = \left[\sum_{\ell=0}^{K}\underset{n\times m}{A^{*}(\ell)}\cdot\underset{m\times n}{A(K-\ell)} \;\vdots\; \underset{n\times m}{A^{*}(K)}\right],\ K=\overline{0,\infty}, \tag{3.1}$$

где $A(K)$ и $A^{*}(K)$ - дискреты соответственно функциональной матрицы $A(t)$ и ее комплексно-сопряженной матрицы $A^{*}(t)$.

Шаг 2. Применить Д-аналог метода исключения Гаусса-Жордана к матричным дискретам $R(K)$, $K=\overline{0,\infty}$.

Для этого представим алгоритм метода Гаусса-Жордана в области дифференциальных преобразований.

Если $r_{i_0 j_0}(0)$ ($i_0=\overline{1,m}$, $j_0=\overline{1,n}$, $r_{i_0 j_0}(0)\neq 0$) - ведущий элемент j_0-го столбца начальной матричной дискреты $R(0)$, то метод Гаусса-Жордана в спектральной форме можно представить следующими соотношениями:

$$\tilde{r}_{i_0 j}(K) = \frac{r_{i_0 j}(K) - \sum_{\ell=0}^{K-1}\tilde{r}_{i_0 j}(\ell)\cdot r_{i_0 j_0}(K-\ell)}{r_{i_0 j_0}(0)},\quad K=\overline{0,\infty},\ j=\overline{j_0,(n+m)}, \tag{3.2}$$

$$t_{ij}(K) = \sum_{\ell=0}^{K}\tilde{r}_{i_0 j}(\ell)\cdot r_{i j_0}(K-\ell),\ K=\overline{0,\infty},\ i=\overline{1,n},\ i\neq i_0,\ j=\overline{j_0,(n+m)}, \tag{3.3}$$

$$\bar{r}_{ij}(K) = r_{ij}(K) - t_{ij}(K),\ K=\overline{0,\infty},\ i=\overline{1,n},\ i\neq i_0,\ j=\overline{j_0,(n+m)}. \tag{3.4}$$

В результате применения Д-аналога Гаусса-Жордана к матричным дискретам $R(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ будут получены дискреты:

$$\underset{n\times(n+m)}{\bar{R}(K)} = \left[\begin{array}{c:c}\underset{r\times n}{\tilde{M}(K)} & \underset{n\times m}{G(K)}\\ \hdashline \underset{(n-r)\times n}{0} & \end{array}\right],\ K=\overline{0,\infty}. \tag{3.5}$$

Шаг 3. Переставить столбцы матричных дискрет $\tilde{M}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ так, чтобы матрица $\tilde{M}(t)$ имела следующий вид:

$$\underset{r\times n}{M(t)} = \left[\underset{r\times r}{E} \;\vdots\; \underset{r\times(n-r)}{U(t)}\right], \tag{3.6}$$

где E - единичная матрица порядка r. Эта перестановка эквивалентна умножению матрицы $\tilde{M}(t)$ на матрицу P справа, полученную при аналогичной перестановке столбцов единичной матрицы порядка n. Таким образом, перестановку столбцов матричных дискрет $\tilde{M}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ можно осуществить согласно следующему соотношению:

$$\underset{r\times n}{M(K)} = \underset{r\times n}{\tilde{M}(K)}\cdot\underset{n\times n}{P} = [\underset{r\times r}{E(K)} \;\vdots\; \underset{r\times(n-r)}{U(K)}],\ K=\overline{0,\infty}. \tag{3.7}$$

Шаг 4. Составить матричные дискреты $H(K)$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$\underset{n\times(n-r)}{H(K)} = \left[\begin{array}{c}\underset{r\times(n-r)}{U(K)}\\ \hdashline \underset{(n-r)\times(n-r)}{E(K)}\end{array}\right],\ K=\overline{0,\infty} \tag{3.8}$$

и, используя соотношения (2.17)-(2.19), вычислить $\underset{n\times r}{M^{(+)}(K)}$, $K=\overline{0,\infty}$ ($\underset{n\times r}{Z(K)} \equiv \underset{n\times r}{M^{(+)}(K)}$).

Шаг 5. Вычислить

$$\underset{n\times m}{A^{(+)}(K)} = \underset{n\times n}{P}\cdot\sum_{\ell=0}^{K}\left[\underset{n\times r}{M^{(+)}(\ell)} \;\vdots\; \underset{n\times(n-r)}{0}\right]\cdot\underset{n\times m}{G(K-1)},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{3.9}$$

Определив необходимое количество матричных дискрет $A^{(+)}(K)$, восстановить оригинал $A^{+}(t)$ в соответствии с обратными дифференциальными преобразованиями.

Вычислительные характеристики изложенного метода приведены в таблице (см. стр. 16).

Замечание 1. Метод не требует предварительных преобразований исходной матрицы.

Замечание 2. Для вычисления псевдообратной матрицы размерностью $m\times n$ составляется расширенная матрица размерностью $n\times(n+m)$, к которой и применяется Д-аналог Гаусса-Жордана. В результате даже для матриц малых размерностей выполняется большое количество операций.

Замечание 3. Число операций почти не зависит от ранга матрицы.

Замечание 4. Число операций зависит линейно от числа строк исходной матрицы и кубически от числа столбцов. Следовательно, псевдообращение матриц размерностью $n>m$ будет эффективнее, если сначала транспонировать исходную матрицу, после чего вычислить псевдообратную транспонированной матрицы (см. выражение (1.12)).

Д-аналог метода блочного разбиения

Рассмотрим Д-аналог метода блочного разбиения для вычисления нестационарных псевдообратных матриц.

Шаг 1. Определить матрицы перестановок строк $\underset{m\times m}{P_1}$ и столбцов $\underset{n\times n}{P_2}$, с помощью которых исходная матрица $R(t)$ разбивается на блоки $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$:

$$\underset{m\times n}{\tilde{R}(t)} = \underset{m\times m}{P_1}\cdot\underset{m\times n}{R(t)}\cdot\underset{n\times n}{P_2} \equiv \left[\begin{array}{c:c}\underset{r\times r}{A(t)} & \underset{r\times(n-r)}{B(t)}\\ \hdashline \underset{(m-r)\times r}{C(t)} & \underset{(m-r)\times(n-r)}{D(t)}\end{array}\right], \tag{4.1}$$

где $A(t)$ - несингулярная квадратная матрица, причем $\operatorname{rank}(R(t)) = \operatorname{rank}(A(t))$.

Для определения матриц P_1 и P_2 применим к матричным дискретам $R(K)$,

$K=\overline{0,\infty}$ Д-аналог метода Гаусса-Жордана, определяемый соотношениями (3.2)-(3.4) и (3.7), причем при перестановке строк и столбцов исходной матрицы аналогично переставим строки и столбцы единичных матриц $\underset{m\times m}{E}$ и $\underset{n\times n}{E}$. В результате получим матрицы перестановок P_1 и P_2, а матричные дискреты $R(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ будут следующего вида:

$$\underset{m\times n}{\overline{R}(K)}=\left[\begin{array}{c|c}\underset{r\times r}{E} & \underset{r\times(n-r)}{0}\\ \hline \underset{(m-r)\times r}{0} & \underset{(m-r)\times(n-r)}{0}\end{array}\right],\ K=\overline{0,\infty}. \tag{4.2}$$

Шаг 2. Вычислить матричные дискреты $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$ функциональных матриц:

$$\underset{m\times n}{\widetilde{R}(K)}=\underset{m\times m}{P_1}\cdot\underset{m\times n}{R(K)}\cdot\underset{n\times n}{P_2}\equiv\left[\begin{array}{c|c}\underset{r\times r}{A(K)} & \underset{r\times(n-r)}{B(K)}\\ \hline \underset{(m-r)\times r}{C(K)} & \underset{(m-r)\times(n-r)}{D(K)}\end{array}\right],\ K=\overline{0,\infty}. \tag{4.3}$$

Шаг 3. Вычислить

$$\underset{r\times r}{P_1(K)}=\sum_{\ell=0}^{K}\left(\underset{r\times r}{A(K-\ell)}\cdot\underset{r\times r}{A^*(\ell)}+\underset{r\times(n-r)}{B(K-\ell)}\cdot\underset{(n-r)\times r}{B^*(\ell)}\right),\ K=\overline{0,\infty}. \tag{4.4}$$

Шаг 4. Вычислить матричные дискреты $P_1^{(-1)}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ обратной матрицы $P_1^{-1}(t)$. Так как $P_1(t)$ - несингулярная квадратная матрица, то псевдообратную этой матрицы можно определить по любому Д-аналогу для определения обратной или псевдообратной матрицы. Составляя графики зависимостей операций умножения и сложения от порядка исходной матрицы для вышеизложенных Д-аналогов (приведено в диссертационной работе), а также для Д-аналога метода Фаддеева, можно убедиться, что для вычисления обратной матрицы несингулярной матрицы наиболее эффективен Д-аналог метода Гревилля.

Шаг 5. Вычислить

$$\underset{n\times r}{W(K)}=\sum_{\ell=0}^{K}\left[\begin{array}{c}\underset{r\times r}{A^*(\ell)}\\ \hline \underset{(n-r)\times r}{B^*(\ell)}\end{array}\right]\cdot\underset{r\times r}{P_1^{(-1)}(K-\ell)},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{4.5}$$

Шаг 6. Вычислить

$$\underset{r\times r}{P_2(K)}=\sum_{\ell=0}^{K}\left(\underset{r\times r}{A^*(K-\ell)}\cdot\underset{r\times r}{A(\ell)}+\underset{r\times(m-r)}{C^*(K-\ell)}\cdot\underset{(m-r)\times r}{C(\ell)}\right),\ K=\overline{0,\infty}. \tag{4.6}$$

Шаг 7. Вычислить матричные дискреты $P_2^{(-1)}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ обратной матрицы $P_2^{-1}(t)$.

Шаг 8. Вычислить

$$\underset{r\times m}{V(K)}=\sum_{\ell=0}^{K}\underset{r\times r}{P_2^{(-1)}(\ell)}\cdot\left[\underset{r\times r}{A^*(K-\ell)}\ \vdots\ \underset{r\times(m-r)}{C^*(K-\ell)}\right],\ K=\overline{0,\infty}. \tag{4.7}$$

Шаг 9. Вычислить

$$\underset{n\times r}{Z(K)}=\sum_{l=0}^{K}\underset{n\times r}{W(\ell)}\cdot\underset{r\times r}{A(K-\ell)},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{4.8}$$

Шаг 10. Вычислить

$$\underset{n\times m}{\widetilde{R}^{(+)}(K)}=\sum_{l=0}^{K}\underset{n\times r}{Z(\ell)}\cdot\underset{r\times m}{V(K-\ell)},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{4.9}$$

Шаг 11. Вычислить

$$\underset{n\times m}{R^{(+)}(K)}=\underset{n\times n}{P_A}\cdot\underset{n\times m}{\widetilde{R}^{(+)}(K)}\cdot\underset{m\times m}{P_B},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{4.10}$$

Имея достаточное количество дискрет псевдообратной матрицы, можно вычислить неавтономную псевдообратную матрицу $R^{(+)}(t)$ в соответствии с обратными дифференциальными преобразованиями.

Вычислительные характеристики изложенного метода приведены в таблице (см. стр. 16).

Замечание 1. Для применения метода необходимо привести исходную матрицу к блочному виду, что подразумевает выполнение дополнительных операций.

Замечание 2. Метод позволяет псевдообращение матриц больших размерностей путем определения псевдообратных матриц малых размерностей, что значительно упрощает псевдообращение матриц больших размерностей, имеющих неполный ранг.

Замечание 3. Д-аналог содержит вспомогательный метод, с помощью которого определяются обратные матрицы несингулярных матриц, получаемые в результате разбиения исходной матрицы. Эффективность метода, с точки зрения вычислительных операций, значительно зависит от выбора этого метода. Эта зависимость становится значительной, когда ранг исходной матрицы приближается к числу строк или столбцов матрицы.

Д-аналог, основанный на сингулярном разложении матрицы

Известно, что какова бы ни была прямоугольная матрица A размерностью $m\times n$, всегда существует разложение

$$A=U\Lambda V^*, \tag{5.1}$$

где U, V - некоторые унитарные матрицы, при которых столбцы матрицы U образуют ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы AA^*; столбцы матрицы V образуют ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A^*A; столбцы матриц V и U образуют в совокупности сингулярные базисы матрицы A; Λ - прямоугольная диагональная матрица размерностью $m\times n$ с невозрастающими неотрицательными элементами по диагонали. Диагональные элементы Λ являются сингулярными числами матрицы A.

Имея сингулярное разложение матрицы, можно определить псевдообратную матрицу A^+:

$$A^+=V\Lambda^+U^*. \tag{5.2}$$

Рассмотрим алгоритм Д-аналога для вычисления сингулярного разложения нестационарных матриц и на его основе алгоритм вычисления нестационарных псевдообратных матриц.

Очевидно, что если A - нестационарная матрица - $A=A(t)$, то в общем случае нестационарны также матрицы U, Λ и V - $U=U(t)$, $\Lambda=\Lambda(t)$, $V=V(t)$. Задача состоит в следующем: имея необходимое количество дискрет исходной матрицы $A(t)$, определить дискреты матриц $U(t)$, $\Lambda(t)$ и $V(t)$.

Представим алгоритм определения дискрет $U(K)$, $\Lambda(K)$ и $V(K)$, $K=\overline{0,\infty}$.

Шаг 1. Вычислить

$$\underset{n\times n}{\hat{A}(K)}=\sum_{\ell=0}^{K}\underset{n\times m}{A^*(\ell)}\cdot\underset{m\times n}{A(K-\ell)},\ K=\overline{0,\infty}. \tag{5.3}$$

Шаг 2. Определить дискреты $\lambda_q(K)$, $K=\overline{0,\infty}$, $q=\overline{1,n}$ собственных значений-функций нестационарной матрицы $\hat{A}(t)$ и упорядочить в убывающем порядке, руководствуясь значениями начальных дискрет $\lambda_q(0)$, $q=\overline{1,n}$. Заметим, что дискреты собственных значений-функций можно определить по Д-аналогу QR алгоритма.

Шаг 3. Определить дискреты собственных векторов-функций матрицы $\hat{A}(t)$,

соответствующих собственным значениям $\lambda_q(K)$, $K=\overline{0,\infty}$, и упорядочить в том же порядке, что и $\lambda_q(K)$, $K=\overline{0,\infty}$. В результате будут получены матричные дискреты $V(K)$, $K=\overline{0,\infty}$. Заметим, что дискреты собственных векторов-функций можно определить по Д-аналогу метода Фаддеева. Заметим также, что собственные векторы-функции, полученные при применении Д-аналога метода Фаддеева, неортогональны. Для ортогонализации можно воспользоваться Д-аналогом метода ортогонализации Грамма-Шмидта (2.1)-(2.5).

Шаг 4. Определить дискреты сингулярных значений-функций, соответствующих ненулевым собственным значениям-функциям:

$$\sigma_q(K)=\frac{\lambda_q(K)-\sum_{\ell=1}^{K-1}\sigma_q(\ell)\cdot\sigma_q(K-\ell)}{2\sigma_q(0)},\quad q=\overline{1,r},\ r=\min(m,n),\ K=\overline{0,\infty},\tag{5.4}$$

и составить диагональные матричные дискреты $\Lambda(K)$, $K=\overline{0,\infty}$:

$$\underset{m\cdot n}{\Lambda(K)}=\left[\begin{array}{ccc|c}\sigma_1(K) & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \underset{r\cdot(n-r)}{0}\\ 0 & \cdots & \sigma_r(K) & \\ \hline & \underset{(m-r)\cdot r}{0} & & \underset{(m-r)\cdot(n-r)}{0}\end{array}\right],\quad r=\min(m,n),\ K=\overline{0,\infty},\tag{5.5}$$

причем $\sigma_1(0)\ge\sigma_2(0)\ge\dots\ge\sigma_r(0)$.

Шаг 5. Определить дискреты первых r ортонормированных собственных векторов-функций матрицы $\breve{A}(t)=A(t)A^*(t)$:

$$\sigma_q^{(-1)}(K)=\frac{\text{ъ}(K)-\sum_{\ell=0}^{K-\ell}\sigma_q^{(-1)}(\ell)\cdot\sigma_q(K-\ell)}{\sigma_q(0)},\quad q=\overline{1,r},\quad K=\overline{0,\infty},\tag{5.6}$$

$$u_q(K)=\sum_{\ell=0}^{K}\sigma_q^{(-1)}(K-l)\cdot\sum_{\ell_1=0}^{\ell}A(\ell_1)\cdot v_q(\ell-\ell_1),\quad q=\overline{1,r},\quad K=\overline{0,\infty}.\tag{5.7}$$

Шаг 6. Определить дискреты остальных $m-r$ ортонормированных собственных векторов-функций матрицы $\breve{A}(t)$, т.е. $u_q(K)$, $q=\overline{r+1,m}$, $K=\overline{0,\infty}$. Заметим, что искомые собственные векторы-функции соответствуют собственным значениям с нулевыми значениями. Следовательно, функции могут быть определены, например, Д-аналогом Грамма-Шмидта (2.1-2.5), причем в качестве $m-r$ линейно независимых векторов можно выбрать единичные векторы, которые линейно независимы от первых r столбцов матрицы $U(t)$.

Последовательно определив необходимое количество дискрет матриц $U(K)$, $\Lambda(K)$ и $V(K)$, $K=\overline{0,\infty}$, восстанавливаются соответствующие оригиналы в соответствии с обратными дифференциальными преобразованиями.

Имея матричные дискреты $U(K)$, $\Lambda(K)$ и $V(K)$, $K=\overline{0,\infty}$, можно определить дискреты псевдообратной матрицы $A^+(t)$. Представим двухшаговый алгоритм определения матричных дискрет $A^{(+)}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$.

1. Определить матричные дискреты $\Lambda^{(+)}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$. Так как $\Lambda(t)$ - диагональная матрица, следовательно,

$$\underset{n\cdot m}{\Lambda^+(t)}=\left[\begin{array}{ccc|c}\frac{1}{\sigma_1(t)} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \underset{r\cdot(m-r)}{0}\\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_r(t)} & \\ \hline & \underset{(n-r)\cdot r}{0} & & \underset{(n-r)\cdot(m-r)}{0}\end{array}\right].\tag{5.8}$$

Для определения матричных дискрет $\Lambda^{(+)}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ надо вычислить дискреты $\sigma_q^{(-1)}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$. Последнее можно осуществить в соответствии с (5.6).

2. Вычислить

$$A^{(+)}(K)=\sum_{\ell=0}^{K}V(K-\ell)\cdot\sum_{\ell_1=0}^{\ell}\Lambda^{(+)}(\ell)\cdot U^*(K-\ell),\quad K=\overline{0,\infty}.\tag{5.9}$$

Вычислительные характеристики изложенного метода приведены в таблице (см. стр. 16).

Замечание 1. Д-аналог содержит два вспомогательных метода: Д-аналог QR-алгоритма и Д-аналог метода Фаддеева, первый из которых позволяет вычислить собственные значения-функции матрицы $\hat{A}(t)$, а второй — соответствующие собственные векторы-функции. Эффективность метода сингулярного разложения значительно зависит от эффективности перечисленных двух методов.

Замечание 2. Собственные значения-функции определяются по итеративному методу (по Д-аналогу QR-алгоритма). В результате при применении Д-аналога для вычисления нестационарной псевдообратной матрицы, основанного на сингулярном разложении, выполняется значительно большее число операций, чем при применении вышеприведенных Д-аналогов.

Замечание 3. Так как Д-аналог QR-метода есть итерационный метод, то дискреты собственных значений-функций, следовательно, и матричные дискреты искомой псевдообратной матрицы получаются с заданной точностью. Число операций пропорционально точности вычислений.

Замечание 4. Число операций зависит кубически от числа строк исходной матрицы и четверично от числа столбцов. Следовательно, псевдообращение матриц размерностью $n>m$ будет эффективнее, если сначала транспонировать исходную матрицу, после чего вычислить псевдообратную транспонированной матрицы (см. выражение (1.12)).

Комбинированный метод определения нестационарных псевдообратных матриц

Рассмотрим метод определения нестационарных псевдообратных матриц, основанный на совместном использовании методов замороженных коэффициентов и методов теории аппроксимации. Метод состоит из двух этапов.

На первом этапе вычислений в соответствии с методом замороженных коэффициентов выбираются временной интервал аппроксимации $[a,b]$ и ряд изолированных точек t_k, $i=\overline{0,k_{max}}$ на нем (k_{max} - некоторое число, выбираемое из практических соображений). Для минимизации эффекта Рунге и погрешности в целом целесообразнее выбирать точки аппроксимации, используя многочлены Чебышева, при применении которых выполняется следующее условие:

$$\max\left(\max_{[a,b]}\left|a_{ij}^{(+)}(t)-a_{ij}^{(+)*}(t)\right|\right)\to\min_{t_k,k=0,k_{max}},\tag{6.1}$$

где k_{max} - степень многочлена Чебышева; знак "*" указывает на точное аналитическое соотношение (i,j)-го элемента матрицы $A_{анал.}^{+}(t)$, а t_k, $k=\overline{0,k_{max}}$ - чебышевские узлы аппроксимации, определяемые по следующему соотношению:

$$t_k=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{2k+1}{2\cdot n}\right). \qquad (6.2)$$

После выбора аппроксимационных точек в соответствии с некоторым методом определения автономных псевдообратных матриц (метод Гревилля, метод блочного разбиения матрицы и т.п.) вычисляются $A^{+}(t_k)$, $k=\overline{0,k_{max}}$.

На втором этапе вычислений путем использования какого-либо численного метода теории аппроксимации (методы Ньютона, Лежандра и т.п.) вычисляются неавтономные псевдообратные матрицы $\overline{A}^{+}(t)$.

Замечание 1. Метод довольно прост и легко реализуем.

Замечание 2. Метод дает возможность расширения удовлетворительного интервала аппроксимации.

Замечание 3. Выбор большего числа точек аппроксимации не всегда приводит к лучшей аппроксимации. Это обусловлено эффектом Рунге — больших колебаний аппроксимирующей функции на границах интервала аппроксимации.

Вычислительные характеристики комбинированного метода зависят от числа точек аппроксимации и выбора метода вычисления псевдообратных матриц в фиксированных точках. Так, при выборе k_{max} аппроксимационных точек и применении метода Гревилля для вычисления псевдообратной матрицы A(t) размерностью $m\times n$ будут выполнены $k_{max}(0{,}5n-0{,}5r+0{,}5n^2-0{,}5r^2-mn+2mn^2-0{,}5mr^2+1{,}5mr)$ операций умножения и $k_{max}(-0{,}5r-0{,}5r^2-3mn+2mn^2-0{,}5mr^2+ +2{,}5mr)$ операций сложения.

Сравнительный анализ предложенных Д-аналогов

Проведем сравнительный анализ вычислительных характеристик предложенных методов (см. табл.).

Таблица

Вычислительные характеристики предложенных методов

Д-аналог	Количество операций умножения	Количество операций сложения
Блочное разбиен.	$m^2n-1/2m^3+1/2m^2+3/2N^2r^3+3/2r^3N+3/2r^2N^2n+3/2m^2N+1/2r^2N+$ $+1/2r^2N^2+r^2N^2m+mr^2N+1/2mmN^2+1/2mmN$	$3/2r^3N^2n-2mrN-1/2m-mrN-nmN-nm+3/2r^2N^2-rN-11/2r^2N+$ $+3/2r^3N+3/2N^2r^3-1/2m^3+m^2+nm^2+3/2r^2Nn+r^2N^2m+r^2Nm+$ $+1/2nmN^2r+1/2mmNr$
Гревилля	$1/4N^2n-1/4rN^2+1/4n^2N^2-1/4r^2N^2-1/2mNn+1/4Nn-1/4rN+$ $+1/4n^2N-1/4r^2N+mNn^2-1/2mN^2n+mN^2n^2-1/4mNr^2-1/4mN^2r^2+$ $+3/4mNr+3/4mN^2r$	$n+1/4N^2n-1/4rN^2+1/4n^2N^2-1/4r^2N^2-5/2mNn-5/4Nn+3/4rN-$ $-1/4n^2N-1/4r^3N-r+mNn^2-1/2mN^2n+mN^2n^2-1/4mNr^2-$ $-1/4mN^2r^2+7/4mNr+3/4mN^2r$
Грамма-Шмидта	$1/2mmN-1/2nNr-1/2nN^2r-2n-n^2N^2r-5/12Nr^3m+r+1/2r^2mN^2n+$ $+1/2r^2mNn+1/2mmN^2-5/12N^2r^3m+1/2mN^2n+1/2mNn+$ $+3/2mNn^2-11/12N^2r^3+1/2r^2N+nN^2+nN-11/12Nr^3+1/2Nn^2+$ $+1/2r^2mN+1/2mN^2n^2+5/12mN^2r+1/2r^2mN^2+5/12mNr+1/2r^2N^2-$ $-7/12Nr-7/12N^2r+2r^2N^2n+1/2n^2N^2+ +1/2n^2N^2+1/2n^3N^2+2r^2Nn-$ $-Nn^2r$	$1/2mmN-1/2nNr-1/2nN^2r+2n-n^2N^2r-5/12Nr^3m-r+1/2r^2mN^2n+$ $+1/2r^2mNn+1/2mmN^2-5/12N^2r^3m+1/2mN^2n-5/2mNn+$ $+3/2mNn^2-11/12N^2r^3-1/2r^2N+nN^2-4nN-1/12Nr^3-3/2Nn^2+$ $+1/2r^2mN+1/2mN^2n^2+5/12mN^2r+1/2r^2mN^2-19/12mNr+$ $+1/2r^2N^2+31/12Nr-7/12N^2r+2r^2N^2n+1/2n^3N^2+1/2n^3N^2+$ $+1/2n^3N+r^2Nn-Nn^2r$
Гаусса-Жордана	$-n+1/2nN^2+r+5/2mn^2N+3/4n^2N^2+3/4n^2N+3/4n^3N^2+ +3/2mn^2N^2-$ $1/2N^2r-1/2r^3N^2-1/2r^2N-1/2nNr-1/2Nr+3/4n^2N--n^2N^2r+3/2nN^2r^2-$ $1/2nN^2r-n^2Nr+3/2nNr^2+1/2nN$	$n+1/2nN^2-r+5/2mn^2N+3/4n^2N^2-9/4n^2N+3/4n^3N^2+3/2mn^2N^2-$ $-nNm-1/2r^2N-1/2N^2r-1/2r^3N^2-1/2r^3N+1/2nNr+2Nr+3/4n^3N-$ $-n^2N^2r+3/2nN^2r^2-1/2nN^2r-n^2Nr+3/2nNr^2-5/2nN$
Сингул. разлож.	$3+1/2N^2m^2n+1/2Nm^2n-m+r-5n+1/2mmN^2r+1/2mmNr-7N+$ $+1/2mN+5/4N^3n^2+1/2m^3N+15/4N^2n-3N^2+n^2mN+31/4nN-$ $-N^2m^2r+1/2N^2mr^2+n^2mN^2-m^2Nr+1/2N^2m^3+1/2N^2m^2+5/4Nn^2+$ $+1/2N^2m-1/2N^2r+1/2m^2N+1/2mNr^2-1/2Nr+3/2N^2n^3+3/2Nn^3+$ $+1/2Nn^4-1/2N^2n^3$	$-2+1/2mmNr-2mmN+m-r+7/2n+n^3-1/2n^2+1/2mmN^2r+4N-$ $-2mN+5/4N^2n^2+1/2m^3N+15/4N^2n-3N^2+n^2mN-33/4nN-N^2m^2r$ $+1/2N^2mr^2+n^2mN^2-m^2Nr+1/2N^2m^3+1/2N^2m^2+5/4Nn^2+$ $+1/2N^2m-1/2N^2r-m^2N+1/2mNr^2+2Nr+3/2N^2n^3+ +3/2Nn^4-$ $1/2Nr^2-7/2Nn^3-1/2N^2n^3+1/2nm^2N^2+1/2nm^2N-4n-2+m-r$

Заметим, что за исключением Д-аналога для вычисления нестационарных псевдообратных матриц, основанного на сингулярном разложении, все остальные Д-аналоги являются отображениями прямых (неитеративных) методов в области дифференциальных преобразований. Следовательно, их точности почти не отличаются, что и дает возможность делать выводы об эффективности того или иного метода, не учитывая вопросов точности методов. Комбинированный метод также не включен в сравнительный анализ, поскольку точность метода, в общем случае, отличается от точности методов Д-аналогов. Для проведения сравнительного анализа построены графики зависимостей вычислительных характеристик от разных входных параметров (приведены в диссертационной работе). Графики показывают, что при разных значениях входных параметров наилучшие вычислительные характеристики (минимальное число операций) обеспечивает Д-аналог метода Гревилля или Д-аналог метода блочного разбиения матрицы.

Третья глава посвящена вопросам расширения и усовершенствования известного ППП "NonAutonSys" путем дополнения его новыми методами, разработанными в диссертационной работе. ППП "NonAutonSys" был разработан на кафедре ИОТС ГИУА и предназначен для определения инвариантов неавтономных систем — определения собственных чисел, собственных векторов, обратных матриц и т.д.

Структура ППП представлена на рис. 1. Закрашенные блоки соответствуют новым модулям, которые были разработаны в диссертации.

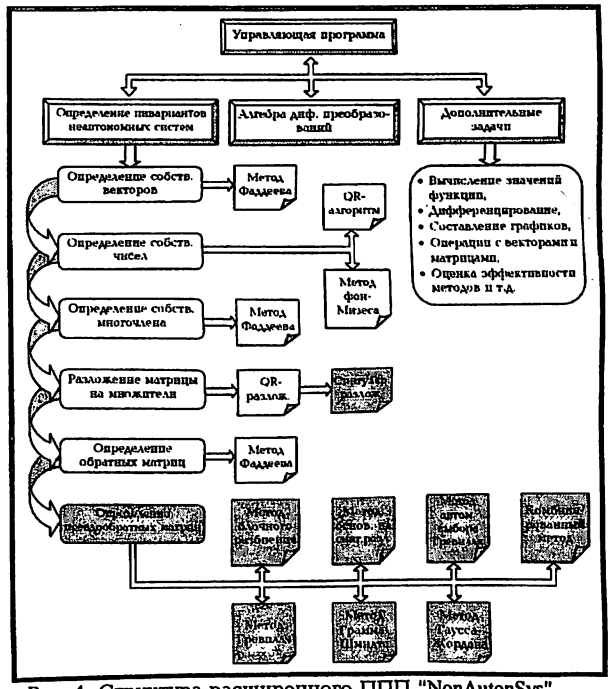

Рис. 1. Структура расширенного ППП "NonAutonSys"

На рис. 2 приведено основное окно ППП. Разработанные методы вычисления неавтономной псевдообратной матрицы включены в класс "Псевдообратные

матрицы", а сингулярное разложение - в класс "Разложение матриц".

ППП "NonAutonSys" предназначен для работы на персональных компьютерах, универсален, реализован на языке программирования C++ в среде Visual C++, операционная среда Windows. Основными математическими объектами ППП служат функциональные матрицы с целочисленными, действительными и комплексными коэффициентами. ППП работает в диалоговом режиме посредством меню, управляющих кнопок и панелей инструментальных средств. Результаты представляются в графическом и текстовом режимах. Пакет легко расширяем, что позволяет его постоянное обновление, улучшение и дополнение новыми методами и возможностями.

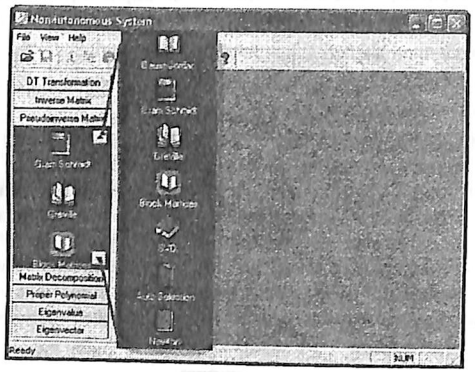

Рис. 2. Новые модули ППП "NonAutonSys"

Четвертая глава посвящена решению ряда модельных и прикладных задач посредством применения разработанных в работе методов определения псевдообратных матриц и сингулярного разложения нестационарных матриц.

1. Определены псевдообратные матрицы ряда модельных нестационарных матриц, в частности:
   - матрица размерами 3×4, имеющая неполный ранг и полиномиальные элементы. Псевдообратная матрица определена по ДП- и ДТ-аналогам, основанным на методе ортогонализации Грамма-Шмидта, а также по комбинированному методу;
   - матрица размерами 3×2, имеющая дробно-рациональные элементы, причем элементы псевдообратной матрицы не содержат разрывов. Псевдообратная матрица определена по ДП-аналогу метода Гревилля и по комбинированному методу;
   - матрица размерами 2×2, имеющая дробно-рациональные элементы, причем элементы псевдообратной матрицы содержат разрывы. Псевдообратная матрица определена по ДП-аналогу, основанному на методе ортогонализации Грамма-Шмидта;
   - матрица размерами 2×3, имеющая тригонометрические элементы, причем элементы псевдообратной матрицы содержат разрывы. Псевдообратная матрица определена по ДП-аналогу, основанному на сингулярном разложении.

   Для сравнения полученных результатов построены графики элементов псевдообратной матрицы, определенной по Д-аналогам, а также по комбинированным и точным методам. Получены также соответствующие разностные графики. Заметим, что элементы точной псевдообратной матрицы определялись следующим образом: рассматриваемый интервал разбивался на подынтервалы длиной 0,0001, после чего по методу Гревилля определялись псевдообратные матрицы стационарных матриц, полученных в точках подынтервалов. Для решений, полученных разными методами, приведены оценки предельной относительной и абсолютной погрешностей, а также оценки длительности решений. Метод Гревилля был реализован на языке программирования MATLAB. Проведен сравнительный анализ точности, вычислительных характеристик и интервала аппроксимации решений, полученных рассматриваемыми методами.
2. Определено сингулярное разложение (сингулярные значения-функции и сингулярные базисы-функции) матрицы размерностью 3×2 и дробно-рациональными элементами, рассмотренной в главе 4.
3. Используя предложенные методы, решены две прикладные задачи систем управления:
   - матричное диофантово уравнение, исследование области решений которого играет важную роль в различных задачах систем управления. Здесь нестационарная псевдообратная матрица используется как для выяснения существования решения матричного уравнения, так и для нахождения решения;
   - задача компенсации обратной связи, где нестационарная псевдообратная матрица применяется для нахождения такой передаточной функции по обратной связи, при которой передаточная функция замкнутой системы имеет предварительно заданный вид.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. В области математического обеспечения систем автоматизации:

Разработаны следующие методы определения нестационарных псевдообратных матриц:

- Д-аналог метода Гревилля, который эффективен для матриц, параметры которых удовлетворяют условиям $m\geq n$ и $r\approx n$ (m — число строк матрицы, n — число столбцов матрицы, r — ранг матрицы);
- Д-аналог, основанный на методе ортогонализации Грамма-Шмидта, который эффективен для матриц, параметры которых удовлетворяют условиям $r<\min(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$ и $m>n$;
- Д-аналог, основанный на методе исключения Гаусса-Жордана, который эффективен для матриц малых порядков;
- Д-аналог, основанный на сингулярном разложении нестационарных матриц, позволяющий определять сингулярные значения-функции и сингулярные базисы-функции нестационарных матриц;
- комбинированный метод, основанный на совместном использовании метода замороженных коэффициентов и теории аппроксимации;
- для всех разработанных методов получены аналитические выражения количества операций в зависимости от размерностей и ранга матрицы и количества дискрет.

2. В области информационного обеспечения систем автоматизации:

На основе разработанных методов усовершенствован и дополнен известный пакет прикладных программ "NonAutonSys" (объем: 1,4 Мбайт, инсталляционный пакет: 4,86 Мбайт, язык реализации: C++, операционная среда: Windows 9x и выше).

Расширенный ППП:

- позволяет определять псевдообратные матрицы и сингулярное разложение нестационарных матриц, полностью автоматизируя вычислительные процедуры. ППП работает в диалоговом режиме посредством меню, управляющих кнопок и панелей инструментальных средств, что значительно облегчает его использование;

- позволяет определять на основе вычислительных характеристик разработанных методов псевдообратную матрицу посредством Д-аналога, при котором выполняется минимальное количество операций. Используя разработанные модули и базовые возможности ППП, можно вычислить ДП- и ДТ- аналоги нестационарных псевдообратных матриц и сингулярного разложения матриц;
- предназначен для работы на персональных компьютерах, универсален, реализован на языке программирования C++ в среде Visual C++, операционная среда Windows. Основными математическими объектами ППП служат функциональные матрицы с целочисленными, действительными и комплексными коэффициентами.

3. В прикладной сфере систем автоматизации:

Применяя разработанные в диссертационной работе Д-аналоги и созданный пакет прикладных программ, определены псевдообратные матрицы ряда модельных нестационарных матриц. Для одной из рассматриваемых матриц также определено ее сингулярное разложение. Решены две задачи прикладного характера: матричное диофантово уравнение и задача компенсации обратной связи систем управления.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Симонян С.О., Бадалян Л.А. Дифференциально-тейлоровский аналог метода блочного разбиения для определения неавтономных псевдообратных матриц //Вестник Инженерной академии Армении.-2005.-Т.2, №1. -С. 109-116.
2. Симонян С.О., Бадалян Л.А. Дифференциально-тейлоровский аналог метода Гревилля для неавтономных матриц //Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. -2005. - Т. LVIII, № 2. - С.340-353.
3. Бадалян Л.А. Матричный аппроксимационный синтез неавтономных матриц // Сб. материалов Международной молодежной конференции "Информационные технологии". -Ереван, 2005. -С. 127-132.
4. Симонян С.О., Бадалян Л.А. Метод сингулярного разложения неавтономных матриц на основе дифференциальных преобразований //Вестник ГИУА. Сер. Моделирование, оптимизация, управление. —2005. -Вып.8, том 2.-С.120-133.
5. Симонян С.О., Бадалян Л.А. Аналоги для определения неавтономных псевдообратных матриц на основе метода ортогонализации Грамма-Шмидта и дифференциальных преобразований Пухова //Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. -2006. -Т. LIX, № 2. -С. 406-417.
6. Симонян С.О., Бадалян Л.А. Определение неавтономных псевдообратных матриц на основе метода исключения Жордана-Гаусса и дифференциальных преобразований Пухова //Вестник ГИУА. Сер. Моделирование, оптимизация, управление. —2006. -Вып.9, том 2. -С.128-137.
7. Бадалян Л.А. Расширение и усовершенствование пакета прикладных программ "NonAutonSys" //Вестник ГИУА. Сер. Моделирование, оптимизация, управление. -2007. -Вып.10, том 1. -С.37-43.

ԵԶՐԱՀԱՆԳՈՒՄ

1. Ավտոմատացված համակարգերի մաթեմատիկական ապահովման բնագավառում՝

Մշակվել են ոչ ստացիոնար մատրիցների կեղծ հակադարձների որոշման հետևյալ մեթոդները.

- Գրեվիլլի եղանակի Դ-նմանակը, որը նպատակահարմար է կիրառել $m \geq n$ և $r \approx n$ պայմաններին բավարարող պարամետրեր ունեցող մատրիցների համար (m-ը մատրիցի տողերի թիվն է, n-ը՝ սյուների թիվը, r-ը՝ ռանգը);
- Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման եղանակի վրա հիմնված Դ-նմանակը, որը, ինչպես

բլոկային մասնատման եղանակի Դ-նմանակը, նպատակահարմար է կիրառել $r < \min(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$ և $m > n$ պայմաններին բավարարող մուտքային պարամետրեր ունեցող մատրիցների համար;
- Գաուս-Ժորդանի արտաքսման եղանակի վրա հիմնված Դ-նմանակը, որը նպատակահարմար է կիրառել փոքր չափայնությամբ մատրիցների համար;
- Սինգուլյար վերլուծության վրա հիմնված Դ-նմանակը;
- Բլոկային մասնատման եղանակի Դ-նմանակը, որը նպատակահարմար է կիրառել $r < \min(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$ և $m > n$ պայմաններին բավարարող մուտքային պարամետրեր ունեցող մատրիցների համար;
- Ոչ ստացիոնար մատրիցի սինգուլյար վերլուծության Դ-նմանակը, որը թույլ է տալիս ստանալ ոչ ստացիոնար մատրիցի սինգուլյար արժեքներ-ֆունկցիաները և սինգուլյար բազիսները;
- Սառեցված գործակիցների և մոտարկման տեսության մեթոդների համատեղ օգտագործման վրա հիմնված զուգորդված եղանակը;
- Մշակված բոլոր Դ-նմանակների համար ստացվել են գործողությունների քանակների անալիտիկ արտահայտությունները՝ կախված մատրիցի չափայնությունից, մատրիցի ռանգից և դիսկրետների քանակից:

2. Ավտոմատացված համակարգերի ինֆորմացիոն ապահովման բնագավառում՝

Մշակված մեթոդներով համալրված և կատարելագործված է երկխոսային ռեժիմում աշխատող հայտնի «NonAutonSys» կիրառական ծրագրերի փաթեթը (ծավալը՝ 1,49 ՄԲա, ինստալացիոն փաթեթը՝ 4,86 ՄԲա ծավալի է, իրականացման լեզուն՝ C++, պահանջվող օպերացիոն միջավայրը՝ Windows 9x և բարձր):

Ընդլայնված կիրառական ծրագրերի փաթեթը.

- թույլ է տալիս որոշել ոչ ստացիոնար մատրիցների կեղծ հակադարձները, սինգուլյար վերլուծությունը՝ լիովին ավտոմատացնելով մեթոդների հաշվողական գործընթացները: Փաթեթի աշխատանքը կազմակերպված է երկխոսային ռեժիմում՝ մենյուների, կառավարող ստեղների և գործիքների միջոցով, ինչը հեշտացնում է փաթեթի շահագործումը:
- թույլ է տալիս մշակված Դ-նմանակների հաշվողական բնութագրերի հիման վրա ներմուծված ոչ ստացիոնար կեղծ հակադարձ մատրիցները հաշվարկել այն Դ-նմանակով, որն ապահովում է գործողությունների նվազագույն քանակ: Համալրած մոդուլների և ԿԾՓ-ի բազային հնարավորությունների հիման վրա կարելի է ստանալ ոչ ստացիոնար կեղծ հակադարձ մատրիցների և սինգուլյար վերլուծությունների ԴՊ- և ԴԹ-նմանակները:
- նախատեսված է անհատական օգտագործման ԷՀՄ-ների համար, իրականացման միջավայրը Visual C++-ն է: Փաթեթի հիմնական մաթեմատիկական օբյեկտներ են հանդիսանում կամայական ֆունկցիաները, մատրիցները, վեկտորները, շարքերը: Գործակիցները ամբողջ, իրական և կոմպլեքս տիպի են:

3. Ավտոմատացված համակարգերի կիրառական բնագավառում՝

Աշխատանքում մշակված Դ-նմանակների, զուգորդված եղանակի և ընդլայնված կիրառական ծրագրերի փաթեթի կիրառմամբ հաշվարկվել են մի շարք մոդելային ոչ ստացիոնար մատրիցների կեղծ հակադարձները, որոշվել է դիտարկվող օրինակներից մեկի սինգուլյար վերլուծությունը: Լուծվել են նաև կիրառական բնույթի երկու խնդիրներ. դիոֆանտային մատրիցային հավասարումը և կառավարման համակարգի հետադարձ կապի ազդազերծման խնդիրը: